

חידות לדוגמא

1. נתון לוח של 8×8 משבצות ללא זוג משבצות בשתי פינות נגדיות (סה"כ 62 משבצות). הראו כי לא ניתן לרצף את הלוח

2. נתון לוח משבצות בגודל 9×9 ובכל משבצת נמצאת צפרדע. ברגע מסויים כל צפרדע קופצת משבצת אחת באלכסון למשבצת אחרת בלוח (ייתכן כי מספר צפרדעים קפצו לאותה משבצת). הראו כי לאחר שכל צפרדע קפצה פעם אחת נותרו על הלוח לפחות 9 משבצות ריקות.

3. הראו כי לכל מספר טבעי $n > 1$ הסכום $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ אינו מספר שלם.

4. יהי n אי-זוגי ויהיו המספרים $1, 2, \dots, 2n$ רשומים על הלוח. בכל שלב אנו מוחקים מן הלוח זוג מספרים a, b ורושמים במקומם את המספר $|a - b|$. הראו כי המספר האחרון שיוותר על הלוח יהיה בהכרח אי-זוגי.

5. נתון לוח של 11×11 משבצות. 10 משבצות צבועות שחור והשאר לבן. בכל שלב ניתן להשחיר משבצת לבנה אם היא סמוכה (יש לה צלע משותפת) לפחות לשתי משבצות שחורות וכך להמשיך ככל שנרצה. הראו כי לא ניתן להשחיר בצורה זו את כל משבצות הלוח.

6. n מספרים רשומים על הלוח. בכל שלב בוחרים שניים מן המספרים a, b מוחקים אותם ורושמים על הלוח את המספר $\frac{a+b}{4}$. הראו כי אם מתחילים במצב בו כל

המספרים שווים ל-1 אזי לאחר $n - 1$ שלבים יוותר על הלוח מספר אחד הגדול או שווה ל- $\frac{1}{n}$.

7. כל אחד מהמספרים $1, 2, \dots, 10^6$ מוחלף שוב ושוב (במידת הצורך) בסכום ספרותיו עד אשר בידינו 10^6 ספרות. האם בין הספרות הללו יהיו יותר 7 מאשר 4?

8. יהיו a, b מספרים טבעיים זרים. הראו כי קיימים טבעיים x, y כך ש- $xa - yb = 1$.

9. יהי n מספר טבעי אשר אינו כפולה של 2 ולא של 5. הראו כי יש כפולה שלמה של n אשר בבסיס עשרוני כתובה אך ורק ע"י 1-ים.

10. תהיינה a_1, \dots, a_{100} ו- b_1, \dots, b_{100} שתי רשימות של האיברים $\{1, \dots, 100\}$. הראו כי לשניים מבין המספרים $a_1 b_1, \dots, a_{100} b_{100}$ יש אותה השארית מודולו 100.

11. נתונות n נקודות אדומות ו- n נקודות כחולות במישור כך שאף שלוש מהן אינן על ישר אחד. הראו כי קיימים n קטעים זרים (שאינן להם אף נקודה משותפת) במישור כך שכל קטע מחבר בין נקודה כחולה לנקודה אדומה.

12. הראו כי מבין כל 15 טבעיים זרים החדית בין 1 ל-1992 יש לפחות ראשוני אחד.

13. הראו כי בכל טטראדר קיים קדקד אשר בעזרת הצלעות היוצאות ממנו ניתן לבנות משולש.

14. $2n + 1$ אנשים ניצבים בשדה באופן שהמרחקים ההדדיים ביניהם שונים זה מזה. כל אחד מן האנשים

יורה באיש הקרוב ביותר אליו. הראו כי בהכרח לפחות אדם אחד לא ייפגע כלל על ידי אדם אחר.

15. עבור a טבעי ו- p ראשוני הראו כי $a^p \equiv a \pmod{p}$.

16. הראו כי לא קיים פתרון בשלמים למשוואה:

$$15x^2 - 7y^2 = 9$$

17. הראו כי $2^n \nmid n!$.

18. בכמה אפסים מסתיים המספר $1000!$?

19. תהיינה a_1, a_2, a_3, \dots ו- b_1, b_2, b_3, \dots שתי סדרות של

מספרים טבעיים. הראו כי קיים זוג אינדקסים $i < j$ כך

$$a_i \leq a_j \text{ וגם } b_i \leq b_j.$$

20. במשחק לשני שחקנים כל שחקן מניח בתורו סוס

על לוח שחמט. ניתן להניח את הסוס במשבצת ריקה

אשר אינה מאוימת ע"י סוס ששם השחקן היריב. מפסיד

השחקן שאינו יכול בתורו להניח סוס. למי מן השחקנים

יש אסטרטגיית ניצחון?