

תומבה

דף תרגילים מספר 1-מבוא

שאלות משחק

1. (נים) נתונים 20 אבנים ושני שחקנים, דן ודנה. דן מתחיל, וכל אחד בתורו לוקח 1 או 2 אבנים לפי בחירתו. מי שלוקח את האבן האחרונה מנצח. האם לדן יש אסטרטגיה שמבטיחה נצחון? האם לדנה יש אסטרטגיה שמבטיחה נצחון?

2. כמו בשאלה הקודמת, אבל עכשיו כל אחד בתורו לוקח 1 או 2 או 3 אבנים לפי בחירתו.

שאלות יסוד

1. 3 מחלק את 6 ו 4 לא מחלק את 10. הגדירו מתי מספר שלם a מחלק מספר שלם b . האם 5 מחלק את 0 לפי הגדרתכם? האם 0 מחלק את 5?

2. יהיו a, b, c מספרים שלמים ונניח ש a מחלק את b ו a מחלק את c לפי הגדרתכם בשאלה 1. הוכיחו ש a מחלק את $b+c$.

3. המספרים הטבעיים $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$ הם מספרים ראשוניים. הגדירו מספר ראשוני. הוכיחו באינדוקציה שלכל מספר שלם $1 <$ יש מחלק ראשוני.

4. הוכיחו כי יש אינסוף מספרים ראשוניים. [רמז: תגלו מחדש את ההוכחה של אויקלידס: הראו שלכל קבוצה סופית של ראשוניים, יש מספר טבעי שאינו מתחלק באף אחד מהם.]

5. הראו כי כל מספר אי-זוגי הוא מהצורה $4n+1$ או $4n+3$. הוכיחו כי יש אינסוף מספרים ראשוניים מהצורה $4n+3$. האם ההוכחה עובדת עבור $4n+1$? תנסו להוכיח כי יש אינסוף מספרים ראשוניים מהצורה $4n+1$ (זה יותר קשה—נחזור לשאלה זו יותר מאוחר).

שאלות חישוב

1. א. מתי שני מספרים רציונליים נקראים הופכיים? מה ההופכי של 5? מה ההופכי של $1/3$? מהי השארית של חלוקת המספר 8 ב-7? מהי השארית בחלוקת המספר 10 ב-7? מהי השארית בחלוקת המספר (-2) ב-7? מהן השאריות האפשריות בחלוקה במספר שלם n כלשהו?

ב. הסתכל על לוח החיבור הבא:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7	8
3	3	4	5	6	7	8	9
4	4	5	6	7	8	9	10
5	5	6	7	8	9	10	11
6	6	7	8	9	10	11	12

ג. הסתכל על לוח הכפל הבא:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	8	10	12
3	0	3	6	9	12	15	18
4	0	4	8	12	16	20	24
5	0	5	10	15	20	25	30
6	0	6	12	18	24	30	36

רשום את הנתונים בשתי הטבלאות כשאריות בחלוקה ב-7. באלו מקרים השארית 0 בלוח החיבור? באלו מקרים השארית 1 בלוח הכפל? סכום של איזה זוגות מספרים נותן שארית 0? מכפלה של איזה זוגות מספרים נותנת שארית 1? האם תוכל לנחש מה ההופכי של 5? מה השארית כאשר כופלים את 3 בעצמו? האם זה נותן לך רעיון מהו $\sqrt{2}$? מהן השאריות האפשריות בכפולה של איזשהו שלם בעצמו?

נתרכז בכפל בשתי השאלות הבאות.

2. טבלת הכפל שרשמתם (לאחר לקיחת שארית) נקראת טבלת הכפל של Z_7 . כתבו את טבלת הכפל של Z_6 (עם שאריות חלוקה ב 6) ואת טבלת הכפל של Z_5 .

3. מצאו את האיברים הבאים ב- Z_5 : $-1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \sqrt{-1}$

מי מהם תוכלו למצוא ב- Z_6 ? ב- Z_{10} ? ב- Z_{11} ? ב- Z_{13} ?

4. יהי $n = 65536$ בבסיס 10. כתבו אותו בבסיס 7 ובבסיס 16. (בבסיס 16 השתמשו בספרות $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$)

5. בלי לעבור לבסיס 10, חישובו

א. $(6513)_7 + (3545)_7$

ב. $(4534)_7 - (2436)_7$

ג. $(562)_7 (61)_7$

ד. $(432)_7 \div (12)_7$

ה. ושכתב $(34612)_7$ בבסיס 9.

שאלות למתקדמים

הערה: חלק מהשאלות למתקדמים עלולים להסתמך על חומר יסודי בדפים מאוחרים יותר, בעיקר במשפט הפירוק של מספרים שלמים לגורמים ראשוניים.

1. הוכח כי $n^4 + 4$ הוא מספר פריק בעבור $n > 1$.

2. הוכח או הפרד: יהיו a ו- b מספרים טבעיים כלשהם. אזי

א. אם $a^n | b^n$ אזי $a | b$.

ב. אם $n^m | m^m$ אזי $n | m$.

ג. אם $a^n | 2b^n$ ו- $n > 1$, אזי $a | b$.

3. הוכח כי כל מספר טבעי $n \geq 12$ הוא סכום של שני מספרים פריקים.

4. נתון $n > 0$, תהי S קבוצת מספרים טבעיים $2n \geq$ כך שאם a ו- b ב- S ו-

$a \neq b$ אזי a אינו מחלק את b . מהו הגודל המקסימלי של S ?

(רמז: S יכולה להכיל לכל היותר אחד מהשלמים $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$, לכל היותר אחד

מהשלמים $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, \dots$ (וכו').)

5. הוכח כי אם $n > 1$ אזי $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ איננו שלם.

6. יהי n מספר טבעי ויהי a_1, a_2, \dots, a_{n+1} מספרים שלמים. הוכיחו כי קיימת תת-קבוצה שסכומה מתחלק ב- n .

7. הוכיחו כי שתי התכונות הבאות של קבוצת השלמים החיוביים N שקולות אחת לשנייה:

- א. לכל תת-קבוצה לא ריקה של N יש איבר מינימלי.
ב. (אינדוקציה) תהי S תת-קבוצה של N כך ש- $1 \in S$ ולכל $n \in N$, אם $m \in S$ עבור כל $1 \leq m < n$, מתקיים $n \in S$. אזי $S = N$.

8. אתגר 44 (ב. פרנקין) יהיו a ו- b מספרים טבעיים. ידוע כי $a^2 + b^2$ מתחלק ב- ab הוכח כי $a = b$.