

תחרות גרוסמן
שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', כ' באלול תשע"ו / 23 ספטמבר 2016, 10:00-13:00

יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!

1. על הלוח כתובים כמה מספרים שלמים עוקבים. בדיוק 52% של המספרים הללו הם מספרים זוגיים. כמה מספרים כתובים על הלוח?
2. על השולחן מונחים 5 דפי נייר. על הצד העליון של כל דף כתוב מספר אחד. המספרים המופיעים על הצדדים העליונים של הדפים הם 7, 8, 12, 14, 17. בצד התחתון של כל דף כתוב מספר כלשהו ויכול להיות שלא כתוב שם שום דבר בכלל. מצאו את המספר המינימלי של הדפים אותם צריך להפוך על מנת לבדוק את הנכונות של הטענה הבאה: "אם בצד אחד של דף כלשהו על השולחן כתוב מספר זוגי אז בצד השני שלו כתוב מספר חד-ספרתי".
3. נקרא למספר שלם **טוב** אם ניתן להציג אותו כסכום של שני ריבועים של מספרים שלמים. (למשל, 5 הוא מספר טוב: $5 = 2^2 + 1^2$, ו-3 לא טוב). הוכיחו שאם x הוא מספר טוב, אז גם המספר $2x$ הוא טוב.
4. ידוע שמשחק בין שתי קבוצות כדורגל הסתיים בתוצאה 5 : 7 אבל לא ידוע באיזה סדר הקבוצות הבקיעו את השערים שלהן. הוכיחו שבמהלך המשחק היה רגע שהקבוצה הראשונה הבקיעה לפניו אותו מספר שערים כמו שהקבוצה השנייה הבקיעה אחריו.
5. בכל המדינות ביבשה מסוימת שולטות שתי מפלגות: מפלגת ימין ומפלגת שמאל. כל שנה, פעם אחת בשנה, באחת מהמדינות השלטון יכול לעבור למפלגה האחרת: זה קורה במדינה כלשהי X אך ורק אם ברוב המדינות הגובלות ב- X השלטון לא נמצא בידי אותה המפלגה כמו ב- X . האם יכול להיות מצב שבו שינויי השלטון במדינות הללו יימשכו לנצח? הוכיחו שזה בלתי-אפשרי או הביאו דוגמה של מיקום מדינות שעבורו זה מתקיים.
6. * רצפה אינסופית מרוצפת (כמו בדף משבצות רגיל) בבלטות ריבועיות שמימדיהן מטר על מטר. כל נקודת מפגש בין ארבע בלטות מסומנת באדום. ישנה ערימה אינסופית של מרצפות (לא בהכרח בצורות זהות) עם התכונות הבאות:
 - א. שטח כל המרצפות זהה ושווה לאיזשהו מספר חיובי A .
 - ב. ניתן לכסות כל מרצפת מהערימה על ידי עיגול ברדיוס 10 מטרים.
 - ג. אפשר לרצף את כל הרצפה האינסופית במרצפות מהערימה כך שכל מרצפת מכסה בדיוק נקודה אדומה אחת (ואף נקודה אדומה לא נמצאת על השפה של שום מרצפת).מהם הערכים האפשריים של A ?