# תחרות על שם גרוסמן, 3.4.2012

1. צובעים כל נקודה במישור באדום או בכחול. הוכיחו שקיימים $x_1, x_2, x_3$ שונים ו־$y_1, y_2, y_3$ שונים, כך שכל הנקודות $(x_i, y_j)$ צבועות באותו צבע.

2. בכיתה יש יחסי ידידויות. יחס הידידות הוא סימטרי, כלומר אם א' ידיד של ב' אז ב' ידיד של א'. תלמיד אינו נחשב לידיד של עצמו.
הוכיחו שאפשר לחלק את הכיתה לשתי קבוצות, כך שלא יהיה אף תלמיד שיש לו יותר ידידים בקבוצה שהוא שייך אליה מאשר בקבוצה שאינו שייך אליה.

3. בתוך ריבוע בעל אורך צלע $1$ מצויר מצולע פשוט (כלומר שאינו חותך את עצמו) שהיקפו $120$. הוכיחו שלמצולע הזה יש לפחות $10$ זוויות נישאות (גדולות מ־$180$ מעלות). אפשר להוכיח גם יותר מ־$10$ – נסו.

   הערה: מצולע הוא קו שבור סגור. זווית של מצולע היא זווית פנימית שלו.

4. תהא $S$ קבוצת מלבנים שיש לה התכונה הבאה: לכל שני מלבנים ב־$S$ יש ישר המקביל לאחד הצירים (ציר ה־$x$ או ציר ה־$y$) שחותך את שניהם. הוכיחו שקיים זוג ישרים, אחד מקביל לציר $x$ ואחד מקביל לציר $y$, כך שכל מלבן ב־$S$ פוגש לפחות אחד מהם.

5. מהו האורך המקסימלי של סדרה של אותיות מתוך אלף־בית בן $n$ אותיות (למשל $\{1, 2, \dots, n\}$) שמקיימת את התכונות הבאות:
   1. אין בסדרה שתי אותיות זהות סמוכות.
   2. אין בסדרה $4$ איברים הנראים כך: "$...A...B...A...B....$", כאשר $A$ ו־$B$ הן אותיות שונות זו מזו כלשהן.

לדוגמא: $1, 3, 2, 3, 1$ היא סדרה מותרת בעוד שהסדרה $1, 3, 3, 1$ אסורה משום שהיא מכילה שתי אותיות זהות סמוכות, והסדרה $1, 2, \underline{3}, 4, \underline{5}, \underline{3}, 9, 10, \underline{5}, 19$ אסורה כיוון שהיא מכילה תבנית אסורה מסוג שני (האותיות המודגשות בקו תחתון).

6. תהא $S$ קבוצה סופית בעלת לפחות שני איברים. האם כל פונקציה $f : S \times S \times S \to S$ (כלומר פונקציה $f(a, b, c)$ שמקבלת שלשות של ערכים ב־$S$ ומוציאה כפלט ערכים מ־$S$) אפשר לכתוב בצורה הבאה:

   $f(a, b, c) = g(h(a, b), c)$ כאשר $g(x, y), h(x, y)$ הן פונקציות בשני משתנים שמקבלות כקלט זוגות של איברים ב־$S$ ומוציאות כפלט איברים של $S$.

7. נתון לוח שחמט של $n \times n$. מסלול של צריח על הלוח נקרא "עולה ימינה" אם הצריח מורשה רק ללכת ימינה ולמעלה. מסלול של צריח נקרא "עולה שמאלה" אם הצריח הולך שמאלה או למעלה. (נקודות המוצא והיעד של הצריח הן כלשהן).

   א. הוכיחו שדרושים לפחות $n$ מסלולים עולים ימינה כדי לכסות את כל הלוח.

   ב. הראו שאפשר לכסות את הלוח ב־$\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ מסלולים של צריח, שכל אחד מהם הוא או עולה ימינה או עולה שמאלה.

   ג. האם $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ הוא אכן האופטימום? מה תוכלו לומר על המספר המזערי של מסלולים (עולים ימינה ועולים שמאלה) הדרוש לכיסוי הלוח?