

תחרות על שם ירמיהו גרוסמן, תשס"ט

זמן - שלוש שעות.

1. האם יש סדרה גיאומטרית שבה מופיעים כאברים 2, 3 ו-5 (לאו דווקא בסדר זה)?

2. א. הראה ש-24 הספרות האחרונות ב-100! הן אפס.

ב. מהי הספרה ה-25 במספר 100!, כשסופרים מימין?

3. בין כל המשולשים שרדיוס המעגל החסום בהם הוא 1, מהו המשולש בעל השטח הקטן ביותר? הוכח.

4. נתונה קבוצה S של 2009 נקודות במישור, המקיימות את התנאי שאין ביניהן שתיים עם אותו שיעור (ערך קואורדינטה) x או אותו שיעור y .

לכל נקודה $p = (a, b)$ במישור מגדירים:

$S_{++}(p)$ היא קבוצת הנקודות ב- $S(x, y)$ המקיימות $x > a, y > b$

$S_{+-}(p)$ היא קבוצת הנקודות ב- $S(x, y)$ המקיימות $x > a, y < b$

$S_{-+}(p)$ היא קבוצת הנקודות ב- $S(x, y)$ המקיימות $x < a, y > b$

$S_{--}(p)$ היא קבוצת הנקודות ב- $S(x, y)$ המקיימות $x < a, y < b$

א. הוכח שיש נקודה p במישור ש- $S_{++}(p)$ ו- $S_{--}(p)$ מכילות כל אחת 502 נקודות, או שיש נקודה p במישור ש- $S_{+-}(p)$ ו- $S_{-+}(p)$ מכילות כל אחת 502 נקודות.

ב. הוכח שיש נקודה p ב- S (שים לב לדרישה הנוספת מ- p) ש- $S_{++}(p)$ ו- $S_{--}(p)$ מכילות כל אחת 251 נקודות, או שיש נקודה p ב- S ש- $S_{+-}(p)$ ו- $S_{-+}(p)$ מכילות כל אחת 251 נקודות.

ג. מצא S כנ"ל שבה בסעיף ב' אי אפשר להחליף את המספר 251 ב-252. (הוכחה שאי אפשר להחליף ב-260 תתקבל כפתרון כמעט מלא.)

5. א. על המעגל מסודרות 4 נקודות, ובכל אחת מהן נתון מספר שלם. מחליפים כל מספר בערך המוחלט של ההפרש בינו לבין המספר הבא אחריו, בכיוון השעון. חוזרים על התהליך. הראה שבשלב כלשהו יופיעו אפסים בכל הנקודות.

ב. מה קורה לאותו תהליך כשבמקום 4 נקודות יש n נקודות, למספר n כלשהו?

6. א. תלמידי בית הספר "חוגים" הולכים לחוגים. בכל חוג יש לפחות תלמיד אחד. לכל תלמיד x מסמנים ב- $h(x)$ את מספר החוגים שבהם x משתתף, ולכל חוג y מסמנים ב- $p(y)$ את מספר התלמידים המשתתפים

ב- y . נתון כי לכל תלמיד x ולכל חוג y מתקיים
 $p(y) \geq h(x)$. הוכח שמספר התלמידים הוא לפחות כמספר החוגים.
ב. גם בבית הספר "אורים" הולכים התלמידים לחוגים, וגם שם כל חוג
אינו ריק. אלא ששם ידוע תנאי יותר חלש: לכל חוג y ולכל תלמיד
 x שמתנתף בחוג y מתקיים $p(y) \geq h(x)$. הוכח שגם ב"אורים" מספר
התלמידים הוא לפחות כמספר החוגים.