

## תחרות על שם ירמיהו גרוסמן, תש"ע

זמן - שלוש שעות.

1. הוכיחו שהמספר  $11111111...1$  שבו יש 2010 ספרות של 1 איננו סכום של שני ריבועים של מספרים שלמים.
2. הוכיחו שאי אפשר לחלק את המישור למעגלים. (הסברים: מעגל הוא ההיקף של עיגול. נקודה אינה נחשבת למעגל. "לחלק" פירושו שכל נקודה נמצאת בדיוק במעגל אחד).
3. תהא נתונה קבוצה של  $n$  נקודות במישור. הוכיחו שאפשר לסדר אותן בסדר  $P_1, P_2, \dots, P_n$  כך שלכל  $1 \leq i < n-1$  הזווית  $\angle P_i P_{i+1} P_{i+2}$  חדה.
4. נתונות שתי קבוצות  $A_1, A_2, \dots, A_m$  ו-  $B_1, B_2, \dots, B_n$  של קשתות במעגל (ההנחה היא שקשת מכילה את שני קצותיה), ונתון שאיחוד הקשתות בכל אחת משתי הקבוצות מכסה את כל המעגל, כלומר  $\bigcup A_i = \bigcup B_j$  הוא כל המעגל. הוכיחו שאפשר לכסות את המעגל באמצעות  $m+n$  קשתות מהצורה  $A_i \cap B_j$ . ("חיתוך" מציין "חיתוך"). האם לכל  $m$  ו-  $n$  יש דוגמה לקבוצות כאלה, שעבורן נחוצות לפחות  $m+n$  קשתות מהצורה  $A_i \cap B_j$  לכיסוי כל המעגל? (הסברים: איחוד של קבוצות מכיל בדיוק אותם איברים שנמצאים לפחות באחת מהן. חיתוך של קבוצות מכיל את האיברים שנמצאים בכולן).
5. א.  $n$  נורות מסודרות על לוח, וכולן כבויות. אדם עומד מול הלוח, ומבצע סדרה של צעדים. בכל צעד הוא בוחר  $k$  נורות (כאשר  $k$  מספר קבוע לאורך כל הדרך) ומשנה את מצבן - כל אחת מן הנורות שבחר נדלקת אם הייתה קודם כבויה, וכבה אם קודם הייתה דלוקה. לאילו ערכים של  $n$  ו-  $k$  האדם יכול להגיע בסדרה סופית של צעדים למצב שבו כל הנורות דלוקות?  
ב. נתון לוח ריבועי של  $2010 \times 2010$  נורות, שבמצב ההתחלתי הן כבויות. בכל צעד הופכים את מצבן של 4 נורות שנמצאות ברצף אנכי, או רצף אופקי, או רצף אלכסוני (זווית של 45 או 135 מעלות לצדדי הלוח). הוכיחו שאי אפשר להגיע למצב שבו כל הנורות דלוקות.
6. בקטע  $[0, 1]$  נתונה קבוצה  $S$  של 2010 מספרים. מחלקים את  $S$  בצורה שרירותית לשתי קבוצות,  $A$  ו-  $B$ . ידוע שבכל קטע  $I$  חלקי ל-  $[0, 1]$  ההפרש בין מספר האיברים ב-  $A$  השייכים לקטע ומספר האיברים ב-  $B$  השייכים לקטע אינו עולה בערכו המוחלט על 10 (בנוסחה:  $||I \cap A| - |I \cap B|| \leq 10$ ). הוכיחו: ההפרש בין סכום המספרים ב-  $A$  וסכום המספרים ב-  $B$  אינו עולה בערכו המוחלט על 10.