תחרות גרוסמן תשע"ז - תשובות ורמזים

שאלון לתלמידי חט"ב - תשובות ורמזים

1. זה קורה למשל בריבוע $\frac{9999}{200} \times \frac{9999}{200}$ מטר.

2. דוגמה נגדית: $x^2/2 + x/2$ (כלומר, $a = 1/2, b = 1/2, c = 0$).

3. דוד לא יוכל להביא למצב שכל המספרים על הלוח יהיו שווים. רמז: שימו לב שבכל שלב, לא משנה אילו מהשינוים המותרים דוד יעשה עם המספרים, הזוגיות של הסכום של כל המספרים תישמר (כלומר, אם הסכום היה זוגי/אי־זוגי הוא יישאר זוגי/אי־זוגי).

4. נסמן על ידי n את מספר הקולות הגדול ביותר שמפלגה כלשהי קיבלה בבחירות. אזי המספר האחרון בסכום $\ldots + d_1 + d_2$ הוא d_n והוא מספר המפלגות שקיבלו בדיוק n קולות. עבור כל $i = 1, \ldots, n-1$ מספר המפלגות שקיבלו בדיוק i קולות הוא $d_i - d_{i+1}$ ומספר הקולות הכולל שהן קיבלו הוא $i(d_i - d_{i+1})$. לכן מספר הקולות הכולל (כלומר, מספר האזרחים שהצביעו בבחירות) הוא

$$(d_1 - d_2) + 2(d_2 - d_3) + 3(d_3 - d_4) + \ldots + (n-1)(d_{n-1} - d_n) + nd_n$$

וזה שווה ל־$d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ (הוכיחו!).

5. אי־אפשר. עבור x חד־ספרתי, y דו־ספרתי, z תלת־ספרתי מתקיים: $1/y + 1/z \leq 1/10 + 1/100 < 1/9 \leq 1/x$.

6. לשחקן הראשון יש דרך שמבטיחה נצחון: במהלך הראשון הוא צריך להשאיר על השולחן $127 = 2^7 - 1$ גולות, ואז במהלכים הבאים להשאיר $2^6 - 1$ גולות, $2^5 - 1$ גולות וכו'.

7. נסמן את מספר המרחקים השונים על ידי k ואת המרחקים העצמם על ידי $R_1, \ldots, R_k$. ניקח שתיים מתוך הנקודות, נקרא להן A ו־B. ניקח את k המעגלים הקונצנטריים מהרדיוסים $R_1, \ldots, R_k$ עם המרכז ב־A ואת k המעגלים הקונצנטריים מהרדיוסים $R_1, \ldots, R_k$ עם המרכז ב־B. כל הנקודות, פרט ל־A ו־B, חייבות להימצא גם על k המעגלים הראשונים וגם על k המעגלים האחרונים, כלומר הן חייבות להיות נקודות חיתוך של אחד מהמעגלים הראשונים עם אחד מהמעגלים האחרונים. מספר נקודות החיתוך של שני מעגלים עם מרכזים שונים הוא לכל היותר 2. לכן מספר נקודות החיתוך הכולל של k המעגלים הראשונים עם k המעגלים האחרונים הוא לכל היותר $2k^2$. כלומר, מספר נקודות הכולל הוא לכל היותר $2k^2 + 2$ (הוספנו 2 כי צריך לספור גם את A ו־B). מצד שני נתון שמספר הנקודות הכולל הוא 400. לכן $400 \leq 2k^2 + 2$ ומכאן ש־$k \geq 15$.