תחרות גרוסמן תשע"ז

שאלון לתלמידי תיכון - תשובות ורמזים

1. בלתי אפשרי. רמז: לשים לב ש- $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

2. $A+B=2C$ פירושו ש־C נמצא בדיוק באמצע הקטע בין A ל־B. הוכיחו שיש מספרים חיוביים שלמים a,b כך ש- $0<2a-b<a<b<2b-a$, $a+b$ זוגי והצבעים של a, b זהים. אזי הצבעים של $2a-b$, b שונים והצבעים של a, $2b-a$ שונים (אחרת אפשר לקחת $A=2a-b, B=b, C=a$ או $A=a, B=2b-a, C=b$). אזי, לפי הצבע של $(a+b)/2$, אפשר לקחת או $A=a, B=b, C=(a+b)/2$ או $A=2a-b, B=2b-a, C=(a+b)/2$.

3. אם מספר a על המעגל מחלק את השכן שלו b נשים על קשת המעגל ביניהם חץ המכוון מ־a ל־b. חייבים להיות שתי קשתות שכנות המכוונות באותו כיוון (הוכיחו!) וזה אומר שיש שני מספרים לא שכנים שאחד מהם מחלק את השני.

4. אינדוקציה לפי מספר הערים. בצעד של אינדוקציה, במעבר מ־N ל־$N+1$ ערים, לעיין האם אפשר להגיע מהעיר החדשה שהתווספה עתה לעיר הישנה שממנה היה אפשר להגיע לכל N הערים הישנות.

5. נניח a_i, b_i, $i=1,\dots,k$, הם אורכי הצלעות של המלבן מספר i כאשר a_i מסמן את האורך של הצלע השחורה. אזי סכום השטחים של המלבנים הוא $1=a_1b_1+...+a_kb_k\le a_1+\ldots+a_k$, כי כל $b_i\le 1$.

6. נוכיח באינדוקציה לפי n שלכל טבלה מהצורה הזאת בגודל $2^{n+1}\times 2^{n+1}$, יש שורה ועמודה עם לפחות $n+1$ מספרים שונים. (אפשר לבנות באינדוקציה דוגמה של טבלה בגודל $2^{n+1}\times 2^{n+1}$ שאין בה $n+2$ מספרים שונים). הבסיס $n=0$ ברור. צעד האינדוקציה מתבסס על כך שטבלה כזו בגודל $2^{n+1}\times 2^{n+1}$ מתחלקת ל־4 טבלאות בגודל $2^n\times 2^n$. לגבי 2 הטבלאות על האלכסון (העובר מהפינה השמאלית העליונה של הטבלה לפינה הימנית התחתונה), מהנחת האינדוקציה יש שורה ועמודה עם לפחות $n+1$ מספרים שונים. שורה ועמודה זו מגדירות איבר מחוץ לאלכסון שניתן להוסיף לאחת מהן ולקבל $n+2$ מספרים שונים.

7. שוב נוכיח באינדוקציה על כמות הישרים. עם 3 ישרים הטענה ברורה. לצעד האינדוקציה, נתבונן במשולש שקיים מהנחת האינדוקציה ונוסיף ישר לאוסף. יש כמה מקרים אפשריים, המעניין מביניהם יוצר משולש שכן למשולש הנתון עם התכונה הדרושה.