תחרות גרוסמן 2011 עם פתרונות

זמן – 3.5 שעות

1. מצולע קמור א׳ נמצא בתוך מצולע קמור ב׳. הוכיחו שהיקפו של ב׳ גדול מהיקפו של א׳.

פתרון: האריכו את אחת הצלעות של א׳ עד שיפגוש את הצלעות של ב׳ בשתי נקודות, P ו-Q. החלק של ב׳ בין P ו-Q ארוך מן הקטע הישר PQ. לכן המצולע שמתקבל מ-ב׳ על ידי החלפת החלק הזה בקטע PQ הוא בעל היקף קטן או שווה לזה של ב׳, ועדיין מכיל את א׳. נמשיך זאת עם צלע נוספת של א׳. כך מגיעים מ-ב׳ ל-א׳ במספר צעדים כמספר צלעות א׳, ובכל צעד לא עלה ההיקף של המצולע.

2. על חפיסה של 2010 קלפים רשומים המספרים מ-1 עד 2010, כל מספר מופיע בדיוק על קלף אחד. שני שחקנים, א׳ ו-ב׳, מקבלים כל אחד 1005 קלפים, בחלוקה כלשהי. כל שחקן בתורו (שחקן א׳ פותח) מניח קלף גלוי על השולחן. הזוכה הוא הראשון שאחרי שהניח קלף, סכום המספרים המופיעים על השולחן מתחלק ב-2011.
א. הוכיחו שבשלב כלשהו אחד השחקנים מנצח.
ב. למי מהשחקנים יש אסטרטגיה שמבטיחה ניצחון?

פתרון: א. שימו לב כי בכל מקרה לאחר שכל הקלפים על השולחן סכומם מתחלק ב-2011 ולכן אם אין ניצחון עד התור האחרון אז השחקן השני מנצח בתור זה.

לשחקן ב׳ יש אסטרטגיה לניצחון. אחרי ש-א׳ מבצע צעד, נותרו ל-ב׳ יותר קלפים מאשר ל-א׳. אם הסכום שכרגע נמצא על הלוח הוא A, נביט על קבוצת המספרים $A+B$ (חיבור מודולו 2011), ל-B בקבוצת המספרים שבידי ב׳. זו קבוצה גדולה מאשר קבוצת המספרים מהצורה $2011-C$, ל-C בקבוצת המספרים שבידי א׳. לכן קיים בקבוצה הראשונה מספר שאינו בשנייה. המסע B המתאים הוא מסע שאחריו אין ל-א׳ מענה זוכה. כך ימשיך השחקן השני ומובטח לו שינצח לכל המאוחר בתור האחרון.

3. מדינת טריגוניה רוצה לשלוח צוותי הצלה ליפן בעקבות רעידת האדמה. בכל צוות צריך להיות רופא, אחות וכבאי. לרשות המארגנים עומדים 10 רופאים, 10 אחיות ו-10 כבאים. מסיבות שונות לא כל בחירה של (רופא, אחות, כבאי) אפשרית. המארגנים מנו את כל השלשות שהן כן אפשריות, וגילו שיש 501 כאלה. הוכיחו שאפשר לשלוח לפחות 6 צוותים.

פתרון: מספרו את הרופאים מ- 0 ל-9, את האחיות במספרים בין 0 ל-9, וכנ״ל את הכבאים.
לכל אחד מ-100 הזוגות (a,b) של מספרים בין 0 ל-9 הסתכלו בקבוצת השלשות: $\{(i,i+a,i+b) \mid i<10\}$ (אלה הן 10 שלשות זרות, שמכסות יחד את כל הרופאים, האחיות והכבאים). כל שלשה בין 1000 השלשות של (רופא, אחות, כבאי) מופיעה באחתמ-100 העשיריות האלה, כשכל עשיריה מכילה שלשות זרות. לפי עקרון שובך היונים, באחת מן העשיריות האלה יהיו 6 שלשות, שכמובן הן זרות.

4. על מעגל ברדיוס 1 מסודרות 100 נקודות ממוספרות על פי סדר $1,2,\ldots,100$. מתוכן נצבעו באדום 25 נקודות כלשהן, ובכחול 75 נקודות. המרחק בין שתי

נקודות הוא מספר הדילוגים שצריך לעשות כדי להגיע מאחת לשנייה (המרחק בין שתי נקודות סמוכות הוא 1, המרחק בין שתי נקודות שמפרידה ביניהן נקודה אחת הוא 2, וכו׳. המרחק המקסימלי בין שתי נקודות הוא 50). יהא a סכום כל 300 המרחקים בין זוגות של נקודות אדומות, ויהא b סכום כל 2775 המרחקים בין זוגות של נקודות כחולות. הראו שההפרש b-a אינו תלוי בבחירת הנקודות, וחשבו אותו.

דרך שרבים בחרו – הראו שהחלפת נקודה אדומה וכחולה סמוכות אינה משנה את ההפרש.

דרך שנייה: לכל k בין 1 לבין 50 נסובב את המעגל k יחידות עם כיוון השעון. יהא t מספר הנקודות האדומות שעוברות לנקודות שהיו כחולות. אזי גם t נקודות כחולות עוברות לנקודות שהיו אדומות. מספר הנקודות האדומות שעברו לאדומות הוא אם כן 25-t ומספר הנקודות הכחולות שעברו לכחולות הוא 75-t. לכן ההפרש בין מספר המרחקים הכחולים השווים ל-k ומספר המרחקים האדומים השווים ל-k הוא 50. לכן הפרשי סכומי המרחקים הוא 50 פעמים סכום כל המרחקים k בין 1 ל-50, שהוא 51 x 50/2 . כלומר ההפרש הוא 50x51x25.

5. על לוח שחמט נמצאות נורות, אחת בכל משבצת, וכולן כבויות.
א. אפשר לבחור בלוח ריבוע (רציף) במימדים 4 x 4 או 5 x 5 (כלומר ריבוע שצלעו 4 משבצות או ריבוע שצלעו 5 משבצות, שניהם מותרים), ולהפוך את מצבן של הנורות בתוך הריבוע. מותר לחזור על פעולה זו ככל שרוצים. האם אפשר להגיע בדרך זו לכל צירוף של נורות כבויות ומודלקות?

פתרון: יש 2^{64} צירופים של נורות דלוקות וכבויות, ורק 2^{25} אפשרויות לבחור קבוצה של ריבועים בגודל 4 (ריבוע כזה נקבע על ידי הפינה הימנית העליונה שלו, והערכים שהפינה הזאת יכולה לקבל הם בין (4,4) ל-(8,8)) ו-2^{16} אפשרויות לבחור קבוצה של ריבועים בגודל 5, ומספר האפשרויות לבחור קבוצה של ריבועים בגודל 4 וקבוצה של ריבועים בגודל 5 שאותם נהפוך היא אם כן $2^{25}x2^{16}=2^{41}$, ולכן יש לפחות 2^{64}-2^{41} צירופים שאין להגיע אליהם.

ב. אותה שאלה כמו ב-א׳, כשהפעם מותר להפוך את המצב בריבועים בעלי מימדים 2×2 או 3×3.

פתרון: הסתכלו בקבוצת כל העמודות, פרט לעמודות השלישית והשישית. כל ריבוע מן הסדרים האמורים פוגש את הקבוצה הזאת במספר זוגי של משבצות, ולכן לא יושג מצב שבו בקבוצת העמודות האלה מספר הנורות הדלוקות הוא אי זוגי.

6. לפולינום P(n) יש מקדמים שהם מספרים שלמים לא שליליים. ידוע כי P(1)=100. הראו שלא ייתכן ש $P(10)=10^{20}-1$ (כלומר מספר בן 20 ספרות של 9).

מחברי השאלה לא שמו לב לכך שיש לשאלה פתרון פשוט: לכל שני מספרים a ו- b ולכל פולינום P(n) מתקיים $(a-b) \mid P(a)-P(b)$, ובמקרה זה P(10)-P(1) אינו מתחלק ב-9.

כדי להגיע למצב שאליו התכוונו מחברי השאלה, נשנה אותה: הוכיחו שלא ייתכן ש-$P(10)=10^{20}-9$ (עכשיו ההפרש אכן מתחלק ב-9, והנימוק הקודם אינו עובד).
הוכחה: נשתמש בטענת עזר.

טענה: לכל מספר m נסמן ב-$f(m)$ את סכום הספרות שלו בייצוגו העשרוני. אזי $f(a+b)$ אינו עולה על $f(a)+f(b)$.

הוכיחו את הטענה לעצמכם. הנתון $P(1)=100$ משמעו שסכום מקדמי הפולינום הוא 100. כשמציבים בפולינום 10, כל איבר a_k10^k תורם ל-$P(10)$ מספר שסכום ספרותיו הוא $f(a_k)$, שאינו עולה על a_k, ולכן על פי טענת העזר סכום הספרות של $P(10)$ אינו יכול לעלות על סכום המקדמים, שהוא כאמור 100.

7. לפולינום $P(n)$ יש מקדמים שהם מספרים שלמים לא שליליים, והמקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 1. ידוע ש-$P(n)$ מתחלק ב-49 לכל מספר שלם n. הוכיחו שמעלת הפולינום היא לפחות 14. מצאו דוגמה לפולינום כזה ממעלה 14.

פתרון: תהא k מעלת הפולינום. כתבו את סדרת ההפרשים $P(n)-P(n-1)$. זהו פולינום ממעלה $k-1$, שהמקדם הראשון בו הוא k. כמובן, גם הוא מקיים את תנאי ההתחלקות ב-49. ניקח את סדרת ההפרשים שלו. זהו פולינום ממעלה $k-2$ שהמקדם הראשון בו הוא $k(k-1)$. ב-$k-1$ צעדים מגיעים כך למספר קבוע, ששווה ל-$k!$, ולפי התנאי הוא מתחלק ב-49. לכל מספר k קטן מ-14 $k!$ אינו מתחלק ב-49.

פולינום ממעלה 14 שמקיים את התנאי: $(x^7-x)^2$. בדקו מדוע.