

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למתמטיקה

אולימפיאדת המתמטיקה ע"ש פרופ' י. גרוסמן

תשס"ד

17.5.2004 – כ"ו באיר תשס"ד

ברוכים הבאים לטכניון. אנחנו מאחלים לכם עניין והנאה.

הוראות למתחרים

מתחרות ומתחרים יקרים:

- השאלות שלפניכם הן ברמות קושי שונות. נסו לפתור מספר רב של שאלות ככל הניתן.
 - אין להשתמש בכל חומר עזר, בפרט לא במחשבון.
 - הזמן המוקצב לתחרות הוא 3 שעות.
 - חלק מהפניות וההוראות בטופס זה מובאות בלשון זכר מטעמי נוחיות בלבד, והן מופנות לתלמידות ולתלמידים כאחד.
 - בתום התחרות יש להגיש מחברת בה תשובותיך.
 - נא לשים לב:
 - יש להתחיל כל שאלה בעמוד נפרד.
 - יש לנמק את כל התשובות.
 - יש להקפיד על ניסוח התשובות ועל צורת ההגשה:
 - נקודות אלה תלקחנה בחשבון בעת הערכת העבודות.
 - עבודות מרושלות ו/או בלתי קריאות, לא תבדקנה.
- בהצלחה!**
-

שאלות התחרות

1. הוכח כי אם המספרים p ו p^2+2 הם ראשוניים, אזי גם המספר p^3+2 ראשוני.
2. שני אצנים הרצים במהירות קבועה, מתחרים בריצה לאורך מסלול מעגלי. אצן א' משלים סיבוב אחד בזמן שהוא מספר שלם בשניות. אצן ב' משלים סיבוב אחד בזמן הארוך ב 10 שניות מזה של אצן א'. שני האצנים התחילו את הריצה יחד (באותו כיוון), ונפגשו בפעם הראשונה M שניות אחרי הזינוק. מהם הערכים האפשריים עבור M, אם נתון כי M הוא מספר שלם, והפגישה ארעה תוך פחות משתי דקות מזמן הזינוק?
3. ABC הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים. זווית B היא ישרה ואורך כל שוק שווה 4.
 - א. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור עבורן שלש הזוויות APB, BPC, APC הן זוויות קהות.
 - ב. נסמן ב D את אוסף כל הנקודות המקיימות את התנאי הנזכר בסעיף א'. מהו השטח של התחום D?
4. מצא שני מספרים בעלי אותו מספר ספרות, אשר מכפלתם היא מספר באורך 50 ספרות לפחות, שכל ספרותיו הן 1.
5. הוכח כי אין פונקציה ממשית f המקיימת, לכל x, y ממשיים, את אי השוויון

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y|$$
6. N נמלים נמצאות על מקל שארכו מטר. כל נמלה נעה במהירות מטר לשניה לעבר אחד משני הקצוות. כאשר נמלה מגיעה לאחד מקצוות המקל היא נופלת. כאשר שתי נמלים מתנגשות, הן ממשיכות לנוע, כל אחת בכיוון הנגדי לכיוון תנועתה המקורי. מהו משך הזמן המכסימלי שיעבור עד שכל הנמלים תיפולנה מהמקל?
7. כדור משוגר במהירות של מטר לשניה, בזווית של 45° , מהקודקוד השמאלי התחתון של מלבן שרוחבו 2004 ס"מ וגובהו 2005 ס"מ. בכל פעם שהוא פוגע באחת הצלעות, הוא מוחזר לפי הכלל הבא: זווית ההחזרה שווה לזווית הפגיעה (ראה ציור המדגים מהלך של חמש פגיעות/החזרות). הוכח כי כעבור זמן סופי הכדור יחזור לקודקוד ממנו שוגר.

