פתרונות גרוסמן 2006

1. אהוד ובנימין משתתפים בעימות פומבי. כל אחד מציג, בתורו, שאלה ליריבו. אהוד נבחר להיות הראשון שמציג שאלה. "שאלה מכשילה" היא שאלה שעליה אין ליריב תשובה. מתמודד שמצליח לשאול שאלה מכשילה מנצח מיד בעימות. ההסתברות של כל אחד משני המתמודדים למצוא (בתורו) שאלה מכשילה היא בדיוק ½. כמו כן, ידוע שאין כל תלות בין השאלות. מה ההסתברות של אהוד לנצח בעימות?

פתרון:

אהוד ינצח לאחר n סיבובי שאלות אם ב $n-1$ סיבובי השאלות הראשונים אף אחד משני המשתתפים לא הצליח להציג שאלה מכשילה ואילו בשאלה מספר n אהוד הצליח להציג שאלה מכשילה. ההסתברות למאורע זה היא $\frac{1}{2^n}$, ו n יכול להיות כל מספר אי זוגי לכן ההסתברות לניצחון של אהוד ניתנת ע"י סכום הטור

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

2. על דף נייר רושמים את כל המספרים הטבעיים בין 1 ל 2006, ומבצעים סדרת פעולות כמתואר להלן. בכל שלב מוחקים מספר כלשהו של מספרים מהרשימה ומסמנים את סכומם ב S. במקום המספרים שנמחקו מוסיפים מספר יחיד שהוא השארית המתקבלת מהחלוקה של S ב 13. לאחר מספר כלשהו של צעדים כאלו נותרו על הנייר שני מספרים בלבד. אחד מהם הוא 100. מצא את המספר השני.

פתרון:

נשים לב ששארית החלוקה ב-13 של סכום המספרים ברשימה נותרת ללא שינוי בתום כל שלב במשחק. בפרט, אם נסמן ב x את המספר שעלינו למצוא, מתקיים

$$100+x\equiv\sum_{k=1}^{2006}k=1003\cdot 2007\equiv 10 \pmod{13}\Rightarrow x\equiv 1 \pmod{13}$$

מכיוון ש 100>13, המספר 100 נותר מהרשימה המקורית ולכן x התקבל בהכרח כתוצאה של השלב הקודם, כלומר $x<13$, ונובע ש x=1.

3. א. האם קיימת במישור קבוצה A שחיתוכה עם כל מעגל מכיל שתי נקודות בדיוק?

ב. האם קיימת במישור קבוצה B שחיתוכה עם כל מעגל ברדיוס 1 מכיל שתי נקודות בדיוק?

פתרון:

א. לא קיימת קבוצה כזו. נניח בשלילה ש A קבוצה כזו. נבחר שני מעגלים שונים שאינם נחתכים, שחיתוכם עם A הוא שני זוגות הנקודות P1,P2 ו Q1,Q2 בהתאמה. כעת קיים מעגל C העובר דרך הנקודות P1,P2,Q1 . על כן, חיתוכו עם A מכיל 3 נקודות לפחות, בסתירה לנתון.

ב. נבנה קבוצה B המורכבת מאוסף של ישרים המקבילים לציר y כשהמרחק בין כל זוג ישרים סמוכים הוא 2. יהי C מעגל כלשהו ברדיוס 1. תיתכנה שתי אפשרויות בלבד: המעגל C חותך את אחד הישרים בשתי נקודות בדיוק, או שהמעגל משיק לזוג ישרים סמוכים. לכן B היא קבוצה כזו.

4. נתונים שני סוגים של מרצפות. צורתה של כל מרצפת מהסוג הראשון היא משושה משוכלל בעל צלע באורך 1. צורתה של כל מרצפת מהסוג השני היא משושה משוכלל בעל צלע באורך 2. נתון מלאי בלתי מוגבל של מרצפות מכל אחד מהסוגים. האם ניתן לרצף את כל המישור באמצעות מרצפות אלו, תוך שימוש בכל אחד משני סוגי המרצפות?

פתרון:

יש שתי דרכים: להשתמש רק במרצפות מהסוג האחד או רק במרצפות מהסוג השני. נניח כי יש ריצוף ובו שני הסוגים משתתפים. נתבונן במרצפת גדולה **A** ובמרצפת קטנה **B** אשר יש להן צלע משותפת (לאורך **B** ולאורך חלק מ **A**). קיים לפחות זוג אחד כזה. בנקודה שהיא קצה הצלע של **B** ועל הצלע של **A** נוצרת זווית של 300 מעלות המכוסה על ידי חלק ממרצפת **A** וחלק מ **B** . נותרת לכיסוי פינה של 60 מעלות. אי אפשר להשתמש באף מרצפת נוספת בפינה זאת כי הזווית של משושה משוכלל היא 120 מעלות. לכן הריצוף בלתי אפשרי.

5. יהי $n>2$ מספר שלם, ויהיו $t_1, t_2, \dots, t_n$ מספרים ממשיים חיוביים כך ש

$$\left(t_1+t_2+\ldots+t_n\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right) < n^2+1$$

הוכח כי לכל i,j,k כך ש $1\le i<j<k\le n$, שלשת המספרים t_i, t_j, t_k הם אורכי הצלעות של משולש.

פתרון:

נניח בשלילה שקיימים t_i, t_j, t_k שאינם אורכי צלעות של משולש. בלי הגבלת הכלליות, נוכל להניח שמדובר ב t_1, t_2, t_3, ושמתקיים $t_3 \ge t_1+t_2$. מאי שוויון הממוצעים, נובע כי לכל זוג מספרים חיוביים a,b מתקיים $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$, ובצורה שקולה מתקיים $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$. לכן

$$\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_2}{t_3}+\frac{t_3}{t_1}+\frac{t_3}{t_2}\ge\frac{t_1+t_2}{t_3}+\frac{4t_3}{t_1+t_2}=\left(\frac{t_1+t_2}{t_3}+\frac{t_3}{t_1+t_2}\right)+3\cdot\frac{t_3}{t_1+t_2}\ge 5$$

כעת, מהפעלה נוספת של תוצאה זו,

$$n^2+1>\left(t_1+t_2+\ldots+t_n\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)=n+\sum_{i<j}^{n}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)=$$

$$=n+\left(\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1}\right)+\left(\frac{t_2}{t_3}+\frac{t_3}{t_2}\right)+\sum_{\substack{i<j\\(i,j)\ne(1,3)\\(i,j)\ne(2,3)}}^{n}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)\ge n+5+2\left(\frac{n(n-1)}{2}-2\right)=$$

$$=n+5+n^2-n-4=n^2+1$$

וקיבלנו סתירה. לפיכך, הטענה נכונה.

6. יהי p(x) פולינום עם מקדמים שלמים המקיים
p(-2006)<p(2006)=2005. הוכח ש: p(-2006)≤-2007 .

פתרון:

נשתמש בתכונה הפשוטה הבאה של פולינום p עם מקדמים שלמים: לכל זוג שלמים m ו n, $m-n \mid p(m)-p(n)$. לכן

$$4012 = 2*2006 = 2006-(-2006) \mid p(2006)-p(-2006)$$

לפי הנתון $p(2006)-p(-2006)>0$, ולכן

$$4012 \le p(2006)-p(-2006) = 2005-p(-2006)$$

לפיכך,

$$p(-2006) \le 2005-4012 = -2007$$

7. נתונה במישור מערכת צירים x-y. יש להגיע מהנקודה (1,0) אל הנקודה (2006,2005), כאשר בכל מהלך מותר לנוע יחידה אחת מעלה (בכיוון החיובי של ציר y) או יחידה אחת ימינה (בכיוון החיובי של ציר x).

א. בכמה מסלולים שונים ניתן לבצע את המשימה?
ב. בכמה מסלולים שונים ניתן לבצע את המשימה אם אסור באף שלב לעבור דרך נקודה הנמצאת על הישר x=y?

פתרון:

א. על מנת להגיע, יש לעשות בסך הכל 2005 צעדים ימינה ו 2005 למעלה. בכל צעד ניתן להחליט האם צועדים מעלה או ימינה. לכן מספר המסלולים האפשריים הוא כמספר הבחירות של 2005 צעדים ימינה מתוך 4010 הצעדים, כלומר

$$\binom{4010}{2005}$$

ב. נתבונן בכל המסלולים האפשריים (החוקיים) מ (1, 0) עד (2005, 2006) שהיא הנקודה הסימטרית ל (2006, 2005) ביחס לקו y=x. כל מסלול כזה מתקבל מ 2004 צעדים ימינה ו 2006 למעלה ומספר המסלולים הזה הוא $\binom{4010}{2004}$ (כמו בסעיף א).

נשים לב כי כל מסלול כזה חותך בהכרח את הקו y=x לפחות פעם אחת. נסמן ב P את נקודת החיתוך הראשונה שלו עם הקו. ממסלול זה נבנה מסלול חדש הזהה לו עד הנקודה P ושווה לשיקוף שלו דרך הישר y=x מהנקודה P ואילך. המסלול החדש הוא מסלול (חוקי) המתחיל מ (1, 0) ומסתיים ב (2005, 2006), ונוגע ב y=x. קל לראות כי זוהי התאמה חח"ע, ולכן מספר המסלולים מ (1, 0) ל (2006, 2005), העוברים דרך נקודות על הישר y=x, הוא $\binom{4010}{2004}$ (משיקול הדומה לשיקול בסעיף א'). לפי סעיף א, מספר המסלולים האפשריים מ (1, 0) ל (2006, 2005) הוא $\binom{4010}{2005}$. לכן, מספר המסלולים שלא עוברים דרך נקודות על הישר y=x הוא $\binom{4010}{2004}-\binom{4010}{2005}$.