

תכנית "שילוב תלמידי תיכון בלימודים בטכניון",
המסלול "מתיכון לטכניון" - בחינת קבלה
יום ג', ט"ו בסיון תשע"ו / 21 יוני 2016, 17:00-18:30

1. (20 נקודות) מצאו את כל הפתרונות הממשיים x של מערכת האי-שוויונות הבאה:

$$\begin{cases} \sin 2x > \sin^2 2x \\ \log_2 x < -3 \end{cases}$$

נמקו בפירוט את כל שלבי הפתרון!

2. פתרו את הסעיפים הבאים.

א. (2 נקודות) תנו הגדרה גיאומטרית של $\sin x, \cos x$ עבור זווית כלשהי $x \in \mathbb{R}$ (נדגיש ש- x לא חייבת להיות בין 0 ל- $\pi/2$). (רמז: מעגל היחידה).

ב. (2 נקודות) כתבו את הנוסחאות המבטאות את $\sin(x+y), \cos(x+y)$ באמצעות $\sin x, \cos x, \sin y, \cos y$.

ג. (16 נקודות) תנו הוכחה גיאומטרית של הנוסחאות שכתבתם בסעיף ב' במקרה $0 < x < \pi/2, y = \pi/2$.

3. יהיו $O = (0, 0), A = (1, 0), B = (2, 1)$ נקודות במישור הקואורדינטות. עבור כל אחד משני התנאים הבאים מצאו את המקום הגיאומטרי של קבוצת הנקודות $X = (x, y)$ במישור המקיימות את התנאי:

א. (5 נקודות) ניתן להציג את $\vec{OX} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$ עבור איזשהם $a, b \in [0, 1]$.

ב. (5 נקודות) $(\vec{OX} - \vec{OA}, \vec{OX} - \vec{OA}) \leq 9$. כאן $(,)$ מסמן מכפלה פנימית של וקטורים.

ציירו כל קבוצה במישור הקואורדינטות בציור נפרד. אם הקבוצה היא תחום עם גבול נא תארו את כל חלק של הגבול באמצעות משוואה והדגישו איזה חלק של הגבול נכלל בקבוצה ואיזה לא.

נמקו את תשובותכם בפירוט!

4. נסמן את המספר $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 100$ על ידי N ונתבונן בפירוק של N לגורמים ראשוניים.

א. (15 נקודות) כמה פעמים מופיע הגורם 2 וכמה פעמים מופיע הגורם 5 בפירוק של N לגורמים ראשוניים? (למשל, בפירוק $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ של המספר 120 לגורמים ראשוניים הגורם 2 מופיע שלוש פעמים והגורם 5 מופיע פעם אחת).

ב. (15 נקודות) כמה ספרות 0 יש בסוף המספר N ? (למשל, בסוף המספר 1050 יש ספרה 0 אחת, בסוף המספר 10500 יש שתי ספרות 0 וכו').

נמקו בפירוט את כל שלבי הפתרון!

5. יהיו $P(x)$ ו- $Q(x)$ פולינומים עם מקדמים ממשיים, כאשר לפחות אחד מהמקדמים של $Q(x)$ שונה מ-0. כתוצאה של חילוק הפולינום $P(x)$ בפולינום $Q(x)$ עם שארית ("חילוק ארוך") מתקבלת מנה, המסומנת על ידי $S(x)$, ושארית, המסומנת על ידי $R(x)$.

א. (4 נקודות) כתבו את הנוסחה המבטאת את הפולינום $P(x)$ באמצעות הפולינומים $Q(x), S(x), R(x)$.

ב. (4 נקודות) מצאו את $S(x), R(x)$ עבור $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 1, Q(x) = x - 1$. **הראו את כל שלבי הפתרון!**

ג. (12 נקודות) מהם הערכים האפשריים עבור המעלות של $S(x)$ ושל $R(x)$ אם המעלה של $P(x)$ היא 10 והמעלה של $Q(x)$ היא 26? ואם המעלה של $P(x)$ היא 26 והמעלה של $Q(x)$ היא 10? **נמקו את תשובתכם בפירוט!**

בהצלחה!