

תכנית "שילוב תלמידי תיכון בלימודים בטכניון",
המסלול "מתיוון לטכניון" - בחינת קבלה
יום א', כ"ד בסיון תשע"ז 18 יוני 2017, 16:30-18:00

1. (20 נקודות) הוכיחו שעבור כל $a, b > 0$

$$\frac{\log_{0.5} a + \log_{0.5} b}{2} \geq \log_{0.5} \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

נמקו בפירוט את כל שלבי הפתרון.

2. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. (2 נקודות) נסחו את משפט הקוסינוסים עבור משולש במישור.

ב. (18 נקודות) הוכיחו את משפט הקוסינוסים עבור משולש חד-זווית.

3. (20 נקודות) נניח k מספר שלם, $1 \leq k \leq 9$. מספר שלם k -ספרתי נקרא "טוב" אם כל הספרות שלו שונות והספרה 0 לא מופיעה בו. (למשל, אם $k = 4$ המספרים ה-4-ספרתיים 9134, 2458 "טובים" והמספרים 6012, 2216 אינם "טובים"). כמה יש מספרים "טובים" שלמים k -ספרתיים? הוכיחו את תשובתכם בפירוט!

4. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. (2 נקודות) יהיו m, n מספרים שלמים, $m > 0$. כתוצאה של החילוק של n ב- m עם שארית מתקבלת מנה, המסומנת על ידי k , ושארית, המסומנת על ידי r . מהי הנוסחה המקשרת בין m, n, k, r ?

ב. (12 נקודות) נניח m, n_1, n_2 מספרים שלמים, $m > 0$. יהיו r_1 שארית החילוק של n_1 ב- m , r_2 שארית החילוק של n_2 ב- m ו- r שארית החילוק של $n_1 n_2$ ב- m . הוכיחו ש- r שווה לשארית החילוק של $r_1 r_2$ ב- m . נמקו בפירוט את כל שלבי הפתרון.

ג. (6 נקודות) מהם הערכים האפשריים של שארית החילוק של $4n$ ב-6 עבור המספרים השלמים n ? הוכיחו את תשובתכם בפירוט! אפשר להשתמש בסעיף ב' אפילו אם לא פתרתם אותו.

5. (20 נקודות) יהיו $O = (0, 0)$, $A = (1, -1)$, $B = (-1, 0)$, $C = (0, -1)$ נקודות במישור הקואורדינטות. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות X במישור המקיימות את התנאים הבאים:

$$\begin{cases} (\vec{OX}, \vec{OA}) > 1 \\ (\vec{OX}, \vec{OB}) \leq -2 \\ (\vec{OX}, \vec{OC}) \geq -1 \end{cases}$$

כאן (\cdot, \cdot) מסמן את המכפלה הסקלרית של וקטורים במישור. הגדירו את קבוצת הנקודות X באמצעות תנאים מפורשים על הקואורדינטות של X , ציירו את הקבוצה במישור וציינו האם הגבולות של הצורה שציירתם, או איזה חלק מהם, שייכים לקבוצה. נמקו את תשובתכם בפירוט!

בהצלחה!