תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חט"ב

יום ו', כ"ד באלול תשע"ז / 15 ספטמבר 2017, 10:00-13:00

---

1. נתון מלבן במישור. האם יכול להיות שאחרי שכל צלע של המלבן הוגדלה ב־1 ס"מ השטח של המלבן גדל ב־1 מ"ר? הביאו דוגמה או הוכיחו שזה בלתי־אפשרי.

2. נתונים מספרים ממשיים a, b, c כך שעבור כל מספר שלם x המספר $ax^2 + bx + c$ שלם. האם זה בהכרח אומר ש־a, b, c שלמים? הוכיחו שכן או הביאו דוגמה נגדית.

3. על הלוח כתובים המספרים $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ודוד אמור לשנות אותם בשלבים. בכל שלב מותר לדוד לבחור שניים מתוך המספרים על הלוח כרצונו ולשנות כל אחד מהם ב־1 (כלומר, להוסיף לכל אחד מהם 1, או להוסיף לאחד מהם 1 ולהחסיר מהשני 1, או להחסיר משניהם 1). האם דוד יוכל אחרי מספר שלבים להביא למצב שבו כל המספרים על הלוח יהיו שווים? נמקו את תשובתכם בפירוט.

4. בבחירות לפרלמנט של מדינה מסוימת השתתפו מספר מפלגות (לא ידוע כמה). כל אזרח שהשתתף בבחירות הצביע למפלגה אחת. עבור כל מספר שלם חיובי k נסמן על ידי d_k את מספר המפלגות שקיבלו k **או יותר** קולות. הוכיחו שהסכום

$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$$

שווה למספר האזרחים שהצביעו בבחירות.

5. האם אפשר למצא מספרים שלמים חיוביים x, y, z כך ש־

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

ו־x חד־ספרתי, y דו־ספרתי, z תלת־ספרתי? הביאו דוגמה או הוכיחו שזה בלתי־אפשרי.

6. שני שחקנים משחקים במשחק הבא: על השולחן נמצאות 200 גולות. בתור שלו כל שחקן חייב לקחת מהשולחן מספר גולות (השונה מאפס) כרצונו, אך לא יותר מחצי של הגולות הנמצאות עדיין על השולחן. מי שבתור שלו לא יכול לקחת גולות לפי התנאי הנ"ל (זה אומר שנשארה לפניו בדיוק גולה אחת על השולחן) מפסיד. האם יש לאחד השחקנים דרך שמבטיחה ניצחון? הוכיחו את תשובתכם.

7. נתונות 400 נקודות במישור. אבי מדד את המרחקים בין כל שתי נקודות שונות (מתוך 400 הנקודות הנ"ל) ורשם את המספרים המתקבלים. הוכיחו כי בין כל המספרים שאבי רשם חייבים להיות לפחות 15 מספרים <u>שונים</u>.