

תחרות גרוסמן
שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', כ"ד באלול תשע"ז / 15 ספטמבר 2017, 10:00-13:00

1. האם אפשר למצא שני מספרים ממשיים חיוביים $a > b > 0$ כך ש- $a - b < 1$ אבל $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 1$? מצאו דוגמה או הוכיחו שזה בלתי-אפשרי.

2. כל המספרים השלמים החיוביים נצבעו באופן כלשהו בשני צבעים: שחור ולבן. הוכיחו שאפשר למצא שלושה מספרים שלמים חיוביים שונים A, B, C שנצבעו באותו צבע כך ש- $A + B = 2C$.

3. 7 מספרים שלמים חיוביים שונים כתובים במעגל. ידוע שבכל זוג של מספרים שכנים (מבחינת מיקומם על המעגל) אחד מהמספרים מתחלק בשני (ללא שארית). הוכיחו שאפשר למצא בין שבעת המספרים זוג של מספרים שאינם שכנים כך שאחד מחלק את השני.

4. במדינה מסוימת בין כל שתי ערים יש כביש יחיד והוא חד-סטרי. הוכיחו שקיימת עיר שממנה אפשר להגיע ברכב (לפי חוקי התנועה) לכל עיר אחרת. (מספר הערים במדינה, כמובן, סופי).

5. ריבוע שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 1 מ' נחתך למלבנים. חלק מהצלעות של המלבנים נצבעו בשחור, כך שבכל אחד מהמלבנים יש בדיוק צלע שחורה אחת. הוכיחו שסכום האורכים של הצלעות השחורות גדול או שווה ל-1 מ'.

6. נתונה טבלת מספרים (לא בהכרח שונים) עם 1000 שורות ו-1000 עמודות. נניח כי עבור כל $i, j = 1, \dots, 1000$, מתקיימים התנאים הבאים:

$$i \leq a_{ij} = a_{ji} \leq j$$

כאשר a_{ij} זה המספר בטבלה הנמצא בשורה מס' i ובעמודה מס' j . הוכיחו שיש בטבלה שורה המכילה לפחות 10 מספרים שונים. האם חייבת להיות שורה עם 12 מספרים שונים?

7. נתונים n קוים ישרים במישור ($n \geq 3$) כך שאף שני קוים אינם מקבילים ואף שלושה קוים לא נפגשים בנקודה אחת. כל אחד מהקווים הנתונים נצבע כולו בכחול או באדום כך שיש לפחות קו אחד כחול ולפחות קו אחד אדום. הקווים מחלקים את המישור לתחומים שונים (למשל, שלושה קוים המקיימים את התנאי הנ"ל מחלקים את המישור ל-7 תחומים כאשר אחד מהם משולש). הוכיחו שלפחות אחד מהתחומים הוא משולש שלא כל הצלעות שלו צבועות באותו צבע.