

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חט"ב

יום ו', כ"ז באלול תשע"ח / 7 ספטמבר 2018, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק בטופס הבחינה הזה, בעט, בעברית. אין להחזיר מחברות טיוטה.
3. בתחרות אסור להשתמש במחשבוני, ספרים, דפי נוסחאות או כל חומר עזר אחר.

בהצלחה!

1. בכיתה לומדים 25 תלמידים. הם קיבלו ציונים במבחן. ידוע שעבור כל שלושה תלמידים בכיתה אפשר למצא תלמיד רביעי כך שהציון הממוצע של ארבעתם יהיה גדול מ-80. האם זה בהכרח אומר שהציון הממוצע של כל התלמידים בכיתה גדול מ-80? הוכיחו שכן או הפריכו על ידי דוגמה נגדית.

2. בקבוצת כדורגל יש 11 שחקנים. ידוע שלא כל השחקנים נולדו באותו תאריך ושלא כל השחקנים נולדו באותה עיר. האם זה אומר שבהכרח יש בקבוצה זוג שחקנים שנולדו בערים שונות בתאריכים שונים? הוכיחו שכן או הפריכו על ידי דוגמה נגדית.

3. יוני לוקח דף נייר (דף רגיל בצורת מלבן) וחותך אותו בקו ישר לשני חלקים. אחר כך הוא לוקח אחד מהחלקים וחותך אותו בקו ישר לשני חלקים, וכך הוא ממשיך חלצה חלקי נייר 100 פעמים. אחרי 100 חיתוכים יוני מקבל מספר פיסות נייר, כל אחת בצורה של מצולע. יוני משתדל לחתוך את פיסות הנייר כך שמספר הצלעות הכולל של המצולעים הללו יהיה קטן ככל האפשר. מהו הערך המינימלי האפשרי של מספר הצלעות הכולל שיוני יכול לקבל? נמקו את תשובתכם בפירוט!

4. במדינה מסוימת יש מספר ערים. ידוע שכל המרחקים בין הערים שונים (כלומר, עבור כל שני זוגות ערים המרחק בין הערים בזוג הראשון שונה מהמרחק בין הערים בזוג השני). תייר שמבקר במדינה נוסע מעיר לעיר לפי השיטה הבאה: הוא מתחיל בעיר A , משם הוא נוסע לעיר B המרוחקת ביותר מ- A , משם הוא נוסע לעיר המרוחקת ביותר מ- B וכן הלאה. הוכיחו שאם התייר לא חוזר מ- B ל- A (אחרי הנסיעה הראשונה שלו מ- A ל- B), אזי הוא לעולם לא יחזור ל- A .

5. בדף משבצות בגודל 2018×5778 (כלומר, גובה הדף הוא 5778 משבצות והרוחב הוא 2018 משבצות) סומנו 100 משבצות. הוכיחו שאפשר לבחור מתוכן 25 משבצות כך שלאף שתיים מ-25 המשבצות הללו אין קודקוד משותף או צלע משותפת.

6. על הלוח כתובים שני מספרים: $1/7$ ו- $1/8$. אבי ובני משחקים במשחק הבא: אבי אומר מספר חיובי (לא בהכרח שלם) כרצונו - נקרא לו x - ואז בני בוחר אחד משני המספרים על הלוח כרצונו ומחליף אותו בסכום שלו עם x (כך שעל הלוח יש עוד פעם שני מספרים). בתור הבא אבי עוד פעם אומר מספר חיובי כרצונו - נקרא לו y - ואז בני עוד פעם בוחר אחד משני המספרים על הלוח כרצונו ומחליף אותו בסכום שלו עם y , וכן הלאה. אבי ינצח אם אחרי 100 או פחות מהלכים אחד המספרים על הלוח יהיה 1. אחרת בני ינצח. האם יש לאבי או לבני דרך המבטיחה ניצחון? נמקו את תשובתכם בפירוט!

7. בשכבה ט' בבית ספר לומדים 99 תלמידים. לכל אחד מהתלמידים יש בשכבה לפחות 50 חברים. (אם תלמיד א' הוא חבר של תלמיד ב', אז גם תלמיד ב' הוא חבר של תלמיד א'). הוכיחו שניתן לחלק את כל התלמידים בשכבה לכמה קבוצות של 2 או 3 תלמידים, כך שבתוך כל קבוצה כל זוג תלמידים יהיו חברים.