

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', כ"ז באלול תשע"ח / 7 ספטמבר 2018, 10:00-13:00

1. המספר $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ שווה לאיזשהו מספר שלם. מצאו את המספר השלם הזה. נמקו את תשובתכם בפירוט!

2. הוכיחו שעבור כל מספר שלם חיובי הגדול מ-9 המכפלה של הספרות שלו קטנה מהמספר השלם עצמו. (לדוגמה, עבור המספר 253 המכפלה של הספרות היא $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ והיא אכן קטנה מהמספר 253 עצמו).

3. האם אפשר לסמן באדום 6 נקודות במישור כך שעבור כל נקודה אדומה (נגיד A) יהיו בדיוק 3 נקודות אדומות שהמרחק מהן ל- A שווה ל-1? נמקו את תשובתכם בפירוט!

4. נעמי בחרה $2n$ נקודות כלשהן על מעגל במישור וסימנה אותן A_1, A_2, \dots, A_{2n} (n הוא מספר שלם חיובי; הנקודות ממוספרות לפי הסדר שלהן על המעגל, לפי כיוון השעון).

נעמי מתבוננת בחלוקות של הנקודות הללו ל- n זוגות. עבור כל חלוקה כזאת היא מחברת כל זוג נקודות על ידי מיתר ומחברת את אורכי n המיתרים שהיא ציירה. היא מחפשת חלוקה שעבורה הסכום הזה יהיה גדול ככל האפשר. הוכיחו שיש בדיוק חלוקה אחת שעבורה הסכום הזה יהיה המקסימלי האפשרי והיא:

$$\{A_1, A_{n+1}\}, \{A_2, A_{n+2}\}, \dots, \{A_n, A_{2n}\}$$

5. בכיתה לומדים 30 תלמידים. במהלך שנת הלימודים בית הספר אירגן טיולים לתלמידי הכיתה. מספר הטיולים אינו ידוע (ויכול להיות כלשהו), אומנם ידוע שבכל טיול השתתפו לפחות 11 תלמידים. הוכיחו שהיה לפחות טיול אחד שכל תלמיד שנכח בו השתתף בלפחות 5% של כלל הטיולים.

6. נתונה סדרת שלמים חיוביים a_1, a_2, a_3, \dots המוגדרת באופן הבא: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$, ומהמקום הרביעי והלאה כל a_k הוא הסכום של שלושת המספרים הקודמים לו בסדרה:

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3} \text{ עבור כל } k \geq 4$$

(כלומר, $a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 3 + 6 = 11$, וכו'). הוכיחו שניתן להציג כל מספר שלם חיובי כסכום של מספרים שונים מהסדרה (כלומר, כל מספר מהסדרה שמופיע בסכום כזה מופיע שם רק פעם אחת).

7. נתונה קבוצה כלשהי A של n אנשים, $n \geq 100$. הוכיחו שאפשר לבחור ממנה תת-קבוצה B של 99 אנשים כך שלכל תאריך x בהיסטוריה אחוז חברי הקבוצה A שנולדו בתאריך x או אחריו ואחוז חברי הקבוצה B שנולדו בתאריך x או אחריו יהיו קרובים עד כדי 1% (כלומר, ההפרש בין שני האחוזים הנ"ל הוא 1% או פחות).