תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חט"ב

יום ו', כ"ז באלול תשע"ח / 7 ספטמבר 2018, 10:00-13:00

---

1. בכיתה לומדים 25 תלמידים. הם קיבלו ציונים במבחן. ידוע שעבור כל שלושה תלמידים בכיתה אפשר למצא תלמיד רביעי כך שהציון הממוצע של ארבעתם יהיה גדול מ־80. האם זה בהכרח אומר שהציון הממוצע של כל התלמידים בכיתה גדול מ־80? הוכיחו שכן או הפריכו על ידי דוגמה נגדית.

פתרון: דוגמה נגדית: ל־24 תלמידים יש ציון 79 ולתלמיד ה־25 יש ציון 84. (הוכיחו שזו אכן דוגמה נגדית!)

2. בקבוצת כדורגל יש 11 שחקנים. ידוע שלא כל השחקנים נולדו באותו תאריך ושלא כל השחקנים נולדו באותה עיר. האם זה אומר שבהכרח יש בקבוצה זוג שחקנים שנולדו בערים שונות בתאריכים שונים? הוכיחו שכן או הפריכו על ידי דוגמה נגדית.

פתרון: כן, בהכרח יש זוג שחקנים כאלה. על מנת להוכיח את זה, ניקח שני שחקנים שנולדו בתאריכים שונים - נגיד, תאריכים X (תאריך הלידה של השחקן הראשון) ו־Y (תאריך הלידה של השחקן השני). אם שני השחקנים הללו נולדו בערים שונות, אז סיימנו - הם זוג השחקנים המבוקש. אם הם נולדו באותה עיר - נגיד, עיר A - אזי, לפי ההנחה של השאלה, יש שחקן שלישי שנולד בעיר השונה מ־A. אם השחקן השלישי נולד בתאריך השונה מ־X, ניקח בתור הזוג המבוקש את השחקן הראשון והשלישי, ואם השחקן השלישי נולד בתאריך X, אז ניקח את השני והשלישי, וכך נקבל את הזוג המבוקש.

3. יוני לוקח דף נייר (דף רגיל בצורת מלבן) וחותך אותו בקו ישר לשני חלקים. אחר כך הוא לוקח אחד מהחלקים וחותך אותו בקו ישר לשני חלקים, וכך הוא ממשיך הלאה וחותך חלקי נייר 100 פעמים. אחרי 100 חיתוכים יוני מקבל מספר פיסות נייר, כל אחת בצורה של מצולע. יוני משתדל לחתוך את פיסות הנייר כך שמספר הצלעות הכולל של המצולעים הללו יהיה קטן ככל האפשר. מהו הערך המינימלי האפשרי של מספר הצלעות הכולל שיוני יכול לקבל? נמקו את תשובתכם בפירוט!

פתרון: אחרי 100 חיתוכים יהיו 101 מצולעים, לכל אחד מהם 3 או יותר צלעות. לכן מספר הצלעות הכולל של המצולעים הוא $3 \times 101 = 303$ או יותר. ניתן להשיג את 303 אם חותכים כל פעם את המצולע (מלבן בשלב הראשון או משולש בשאר השלבים) לשני משולשים.

4. במדינה מסוימת יש מספר ערים. ידוע שכל המרחקים בין הערים שונים (כלומר, עבור כל שני זוגות ערים המרחק בין הערים בזוג הראשון שונה מהמרחק בין הערים בזוג השני). תייר שמבקר במדינה נוסע מעיר לעיר לפי השיטה הבאה: הוא מתחיל בעיר A, משם הוא נוסע לעיר B המרוחקת ביותר מ־A, משם הוא נוסע לעיר המרוחקת ביותר מ־B וכן הלאה. הוכיחו שאם התייר לא חוזר מ־B ל־A (אחרי הנסיעה הראשונה שלו מ־A ל־B), אזי הוא לעולם לא יחזור ל־A.

רמז: מסלול התייר מורכב מקטעים: הקטע הראשון מהעיר הראשונה (A) לעיר השנייה (B), הקטע השני מהעיר השנייה לעיר השלישית וכו'. מקטע לקטע במסלול אורך הקטע (המרחק מהעיר בתחילת הקטע לעיר בסוף הקטע) הולך וגודל (הוכיחו!). לכן אם התייר חוזר ל־A מעיר X השונה מ־B זה אומר שהמרחק מ־X ל־A (אורך הקטע האחרון של הנסיעה) גדול מהמרחק מ־A ל־B (אורך הקטע הראשון של הנסיעה), בניגוד להנחה ש־B העיר המרוחקת ביותר מ־A. לכן התייר יכול לחזור ל־A רק מ־B. אם זה לא קרה בקטע השני של הנסיעה, זה לא יקרה לעולם (הוכיחו!).

5. בדף משבצות בגודל 2018×5778 (כלומר, גובה הדף הוא 5778 משבצות והרוחב הוא 2018 משבצות) סומנו 100 משבצות. הוכיחו שאפשר לבחור מתוכן 25 משבצות כך שלאף שתיים מ־25 המשבצות הללו אין קודקוד משותף או צלע משותפת.

פתרון: נחלק את הדף לריבועים 2×2 (זה אפשרי כי הגובה והרוחב של הדף זוגיים). בכל ריבוע כזה נצבע את המשבצת השמאלית העליונה באדום, את הימנית העליונה בצהוב, את שמאלית התחתונה בכחול ואת הימנית התחתונה בירוק. אזי כל המשבצות של הדף יהיו צבועות באחד מארבעת הצבעים ולאף שתי משבצות מאותו צבע לא יהיו קודקוד או צלע משותפים. מתוך 100 משבצות המסומנות, שכולן צבועות באחד מארבעת הצבעים, יש לפחות $100/4 = 25$ משבצות מאותו צבע - נגיד, ירוק. נבחר 25 משבצות ירוקות - הן המשבצות המבוקשות.

6. על הלוח כתובים שני מספרים: $1/7$ ו־$1/8$. אבי ובני משחקים במשחק הבא: אבי אומר מספר חיובי (לא בהכרח שלם) כרצונו - נקרא לו x - ואז בני בוחר אחד משני המספרים על הלוח כרצונו ומחליף אותו בסכום שלו עם x (כך שעל הלוח יש עוד פעם שני מספרים). בתור הבא אבי עוד פעם אומר מספר חיובי כרצונו - נקרא לו y - ואז בני עוד פעם בוחר אחד משני המספרים על הלוח כרצונו ומחליף אותו בסכום שלו עם y, וכן הלאה. אבי ינצח אם אחרי 100 או פחות מהלכים אחד המספרים על הלוח יהיה 1. אחרת בני ינצח. האם יש לאבי או לבני דרך המבטיחה ניצחון? נמקו את תשובתכם בפירוט!

פתרון: אבי צריך כל פעם לומר את המספר $1/8 \cdot 1/7 = 1/56$. בתחילת המשחק המספרים על הלוח הם $8/56 = 1/7$ ו־$7/56 = 1/8$ וממהלך למהלך כל מספר על הלוח או יגדל ב־$1/56$ או יישאר ללא שינוי. לכן, לא משנה לאיזה מספר על הלוח בני יוסיף את $1/56$, כל המספרים על הלוח יהיו תמיד כפולות של $1/56$ במספרים שלמים. תוך $49 + 48 = 97$ או פחות מהלכים אחת לפחות אחד משני המספרים $8/56 = 1/7$, $7/56 = 1/8$ יגיע בצעדים של $1/56$ ל־1 (כי $8/56 + 48/56 = 7/56 + 49/56 = 1$) ואבי ינצח. כלומר, לאבי יש דרך בטוחה לנצחון.

7. בשכבה ט' בבית ספר לומדים 99 תלמידים. לכל אחד מהתלמידים יש בשכבה לפחות 50 חברים. (אם תלמיד א' הוא חבר של תלמיד ב', אז גם תלמיד ב' הוא חבר של תלמיד א'). הוכיחו שניתן לחלק את כל התלמידים בשכבה לכמה קבוצות של 2 או 3 תלמידים, כך שבתוך כל קבוצה כל זוג תלמידים יהיו חברים.

פתרון: נעמיד את התלמידים מחוץ לכיתה ונתחיל להכניס אותם לכיתה אחד־אחד באופן הבא, כך שהתלמידים הנמצאים בכיתה יהיו כבר מחולקים לקבוצות הנדרשות:

בשלב הראשון ניקח שני חברים (בטוח יש כאלה כי לכל אחד מהתלמידים יש בשכבה לפחות 50 חברים) ונכניס אותם לכיתה כקבוצה של שני חברים.

נניח שאחרי כמה שלבים הכנסנו חלק מהתלמידים לכיתה ושם הם מחולקים לקבוצות של שניים או שלושה חברים. ניקח אחד התלמידים שעומד מחוץ לכיתה - נגיד, תלמיד שקורים לו אבי - ונכניס אותו לכיתה באופן הבא:

אם אחד החברים של אבי נמצא מחוץ לכיתה, נכניס את שניהם לכיתה כקבוצה של שני חברים ואז נעבור לתלמיד הבא העומד מחוץ לכיתה.

אחרת כל החברים של אבי כבר נמצאים בכיתה. כיוון שבכיתה יש פחות מ־99 תלמידים המחולקים לקבוצות של 2 או 3, יש בכיתה פחות מ־50 קבוצות כאלה. כיוון שלאבי יש לפחות 50 חברים והם כולם בכיתה, בין הקבוצות שבכיתה יש לפחות אחת שבה יש יותר מחבר אחד של אבי. אם בקבוצה ההיא יש שני תלמידים נצרף את אבי לשני החברים האלה ונקבל קבוצה של שלושה חברים. אם בקבוצה ההיא יש שלושה חברים של אבי, אז ניקח אחד מהם ונעשה קבוצה חדשה ממנו ומאבי (ובקבוצה המקורית יישארו שני תלמידים שהם חברים). אחרי זה נעבור לתלמיד הבא העומד מחוץ לכיתה.

נמשיך כך ונכניס את כל התלמידים אחד־אחד לכיתה, שם הם יהיו מחולקים לקבוצות הנדרשות.