תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', כ"ז באלול תשע"ח / 7 ספטמבר 2018, 10:00-13:00

---

1. המספר $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ שווה לאיזשהו מספר שלם. מצאו את המספר השלם הזה. נמקו את תשובתכם בפירוט!

רמז: למצא את הריבוע של המספר.

2. הוכיחו שעבור כל מספר שלם חיובי הגדול מ־9 המכפלה של הספרות שלו קטנה מהמספר השלם עצמו. (לדוגמה, עבור המספר 253 המכפלה של הספרות היא $2\cdot 5\cdot 3=30$ והיא אכן קטנה מהמספר 253 עצמו).

פתרון: אם מספר שלם חיובי A נכתב כ־$a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0$, כאשר $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ הן הספרות שלו, אזי

$$A=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$$

כיוון ש־$A>9$, יש ב־A לפחות 2 ספרות - כלומר, $n>0$. כיוון שכל הספרות הן או 0 או מספרים חיוביים הקטנים מ־10 ו־$a_n>0$, אם נחליף במכפלה

$$a_n\cdot a_{n-1}\cdot\ldots\cdot a_1\cdot a_0$$

את כל אחד מ־n הגורמים $a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ ב־10, המכפלה רק תגדל:

$$a_n\cdot a_{n-1}\cdot\ldots\cdot a_1\cdot a_0<a_n\cdot 10^n\le a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0=A$$

מש"ל.

3. האם אפשר לסמן באדום 6 נקודות במישור כך שעבור כל נקודה אדומה (נגיד A) יהיו בדיוק 3 נקודות אדומות שהמרחק מהן ל־A שווה ל־1? נמקו את תשובתכם בפירוט!

פתרון: כן, אפשר: צריך לקחת משולש שווה צלעות עם צלע 1 ואת המשולש השני המתקבל מהראשון על ידי הזזה מקבילה ב־1 בכיוון של אחד התיכונים של המשולש הראשון. הקודקודים של שני המשולשים הם 6 הנקודות המבוקשות (הוכיחו!).

4. נעמי בחרה $2n$ נקודות כלשהן על מעגל במישור וסימנה אותן $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ (n הוא מספר שלם חיובי; הנקודות ממוספרות לפי הסדר שלהן על המעגל, לפי כיוון השעון).

נעמי מתבוננת בחלוקות של הנקודות הללו ל־n זוגות. עבור כל חלוקה כזאת היא מחברת כל זוג נקודות על ידי מיתר ומחברת את אורכי n המיתרים שהיא ציירה. היא מחפשת חלוקה שעבורה הסכום הזה יהיה גדול ככל האפשר. הוכיחו שיש בדיוק חלוקה אחת שעבורה הסכום הזה יהיה המקסימלי האפשרי והיא:

$$\{A_1, A_{n+1}\}, \{A_2, A_{n+2}\}, \ldots, \{A_n, A_{2n}\}$$

רמז: מספר החלוקות הוא סופי ולכן יש ביניהן חלוקה עם הסכום המיתרים המקסימלי.

נשים לב, שאם בחלוקה יש שני זוגות נקודות $\{A_i, A_j\}$, $\{A_k, A_l\}$ כך שהמיתרים A_iA_j, A_kA_l לא נפגשים ונניח ללא הגבלת הכלליות ש־A_i, A_k, A_l, A_j הוא סדר הקודקודים לפי כיוון השעון במרובע $A_iA_kA_lA_j$. אזי אפשר להחליף את שני הזוגות הללו בזוגות $\{A_i, A_l\}$, $\{A_k, A_j\}$ וסכום המיתרים יגדל:

$$A_iA_l + A_kA_j = A_iO + A_lO + A_kO + A_jO > A_iA_j + A_kA_l$$

כאשר O היא נקודת החיתוך של האלכסונים A_iA_l ו־A_kA_j של המרובע $A_iA_kA_lA_j$. לכן בחלוקה שבה סכום המיתרים הוא מקסימלי, כל שני מיתרים נפגשים. יהי $\{A_i, A_j\}$, $i < j$, זוג נקודות כלשהו המופיע בחלוקה כזאת. אזי בכל זוג אחר $\{A_k, A_l\}$ הנקודות A_k, A_l נמצאות בשני הצדדים של הישר A_iA_j. זה אומר שמתוך $2n-2$ הנקודות השונות מ־A_k, A_l יש $n-1$ נקודות בצד אחד של A_iA_j ו־$n-1$ נקודות בצד השני. מכאן ש־$j = i + n$. כיוון שזה נכון עבור כל זוג $\{A_i, A_j\}$, $i < j$, בחלוקה, החלוקה היא

$$\{A_1, A_{n+1}\}, \{A_2, A_{n+2}\}, \ldots, \{A_n, A_{2n}\}$$

מש"ל.

5. בכיתה לומדים 30 תלמידים. במהלך שנת הלימודים בית הספר אירגן טיולים לתלמידי הכיתה. מספר הטיולים אינו ידוע (ויכול להיות כלשהו), אומנם ידוע שבכל טיול השתתפו לפחות 11 תלמידים. הוכיחו שהיה לפחות טיול אחד שכל תלמיד שנכח בו השתתף בלפחות 5% של כלל הטיולים.

רמז: נדמיין שלכל טיול נמכרו כרטיסים ושכל תלמיד שהשתתף בטיול קנה כרטיס לאותו טיול. נקרא לתלמיד שהשתתף בפחות מ־5% של כלל הטיולים 'עני'. נניח שהיו סך הכל N טיולים. צריך להוכיח שבלפחות אחד מהטיולים היו רק תלמידים שאינם עניים.

נניח בשלילה שבכל טיול היה לפחות תלמיד עני אחד. אזי העניים קנו לכל הטיולים לפחות N כרטיסים. מצד שני, כל עני קנה פחות מ־$N/20$ כרטיסים ($5\% = 1/20$). לכן מספר התלמידים העניים גדול מ־20. נבחר 20 תלמידים עניים - הם קנו פחות מ־$N = 20 \times N/20$ כרטיסים. כל אחד מ־10 התלמידים הנשארים (עני או לא עני) קנה לא יותר מ־N כרטיסים (כי היו סה"כ N טיולים). לכן 10 התלמידים הללו קנו לא יותר מ־$10N$ כרטיסים וכל 30 התלמידים ביחד קנו פחות מ־$N + 10N = 11N$ כרטיסים. אומנם בכל טיול השתתפו לפחות 11 תלמידים ולכן לכל הטיולים נמכרו לפחות $11N$ כרטיסים. סתירה. מש"ל.

6. נתונה סדרת שלמים חיוביים $a_1, a_2, a_3, \ldots$ המוגדרת באופן הבא: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$, ומהמקום הרביעי והלאה כל a_k הוא הסכום של שלושת המספרים הקודמים לו בסדרה:

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3} \text{ עבור כל } k \geq 4$$

(כלומר, $a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 3 + 6 = 11$ וכו'). הוכיחו שניתן להציג כל מספר שלם חיובי כסכום של מספרים <u>שונים</u> מהסדרה (כלומר, כל מספר מהסדרה שמופיע בסכום כזה מופיע שם רק פעם אחת).

רמז: להוכיח באינדוקציה. עבור $n = 1$ הטענה ברורה. נניח שהטענה כבר הוכחה עבור n ונוכיח אותה עבור $n+1$. נתבונן בהצגה של n כסכום מספרים שונים מהסדרה. אזי יש k שלם חיובי כזה שהמספרים $a_1, \ldots, a_k$ מהסדרה מופיעים בהצגה והמספר a_{k+1} לא מופיע. במקרה ש־$k = 1$ או $k = 2$, קל לבנות הצגה של $n+1$ כסכום מספרים שונים מהסדרה (מצאו איך!). אם $k \geq 3$, נחליף את a_{k-2}, a_{k-1}, a_k בהצגה של n על ידי $a_{k+1} = a_{k-2} + a_{k-1} + a_k$, את $a_{k-3}, a_{k-4}, a_{k-5}$ על ידי $a_{k-2} = a_{k-3} + a_{k-4} + a_{k-5}$ וכו', עד שנקבל את ההצגה של n כסכום מספרים שונים מהסדרה שבה לא מופיע לפחות אחת משני המספרים $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. בעזרת ההצגה החדשה כזאת של n קל למצא הצגה של $n+1$ (מצאו איך!).

7. נתונה קבוצה כלשהי A של n אנשים, $n \geq 100$. הוכיחו שאפשר לבחור ממנה תת־קבוצה B של 99 אנשים כך שלכל תאריך x בהיסטוריה אחוז חברי הקבוצה A שנולדו בתאריך x או אחריו ואחוז חברי הקבוצה B שנולדו בתאריך x או אחריו יהיו קרובים עד כדי 1% (כלומר, ההפרש בין שני האחוזים הנ"ל הוא 1% או פחות).

פתרון: מכל תאריכי הלידה של אנשי הקבוצה ניקח את התאריך הכי מאוחר X_1 כך שאחוז אנשי הקבוצה שנולדו ב־X_1 או אחריו הוא גדול מ־1%. אחר כך "נזוז אחורה בזמן" ובאותה צורה ונבחר מתוך תאריכי הלידה של אנשי הקבוצה תאריכים

$$X_{99} \leq \ldots \leq X_2 \leq X_1$$

כך שעבור כל i התאריך X_i הוא התאריך המאוחר ביותר (בין תאריכי הלידה של אנשי הקבוצה) עם התכונה שאחוז אנשי הקבוצה שנולדו ב־X_i או אחריו הוא גדול מ־$i\%$.

ייתכן שחלק מהתאריכים שבחרנו זהים - אם

$$X_{i+j} = \ldots = X_i$$

עבור איזשהם i, j, זה אומר שבתאריך $X_{i+j}+1 = X_i+1$ או אחריו נולדו לא יותר מ־$i\%$ של אנשי הקבוצה ובתאריך $X_{i+j} = X_i$ או אחריו נולדו יותר מ־$(i+j)\%$ של אנשי הקבוצה. מכאן שבתאריך $X_{i+j} = X_i$ עצמו נולדו יותר מ־$j\%$ של אנשי הקבוצה - כלומר, לפחות $j+1$ אנשים (זה נובע מכך ש־$n \geq 100$ - הוכיחו!).

נבחר 99 אנשי קבוצה שנולדו בתאריכים $X_{99}, \ldots, X_2, X_1$: כל פעם שיש בסדרת התאריכים $j+1$ תאריכים זהים $X_{i+j} = \ldots = X_i$ נבחר $j+1$ אנשים שנולדו בתאריך $X_{i+j} = X_i$. תת־הקבוצה של 99 האנשים שבחרנו היא תת־הקבוצה המבוקשת (הוכיחו!).