

תכנית "שילוב תלמידי תיכון בלימודים בטכניון",
המסלול "מתיוון לטכניון" - בחינת קבלה
יום א', כ"א בשבט תשע"ט / 27 ינואר 2019, 16:30-18:00

1. פתרו את הסעיפים הבאים.

א. (6 נקודות) תנו הגדרה גיאומטרית של $\sin x, \cos x$ עבור זווית כלשהי $x \in \mathbb{R}$. וודאו שההגדרה שלכם מתיחסת באופן מפורט גם למקרה ש- x לא נמצא בין 0 ל- $\pi/2$. (רמז: מעגל היחידה).

ב. (14 נקודות) מצאו את כל הפתרונות הממשיים של אי-השוויון הבא:

$$\sin x \leq -1 - \cos^4 x.$$

נמקו את כל שלבי הפתרון בפירוט!

2. (20 נקודות) נקרא למספר שלם חיובי "טוב" אם הוא לא מתחלק ב-2 ו-3. כמה יש מספרים שלמים חיוביים "טובים" הקטנים מ-10000? **נמקו את תשובתכם בפירוט!**

3. (20 נקודות) נתונה מקבילית $ABCD$ במישור. הוכיחו שסכום הריבועים של האלכסונים שלה שווה לסכום הריבועים של הצלעות שלה:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

4. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. (4 נקודות) יהיו n מספר חיובי שלם, a, b משתנים. פתחו את הסוגריים וכתבו את תוצאות הכפל:

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = \dots$$

$$(a + b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots + (-1)^{n-2}ab^{n-2} + (-1)^{n-1}b^{n-1}\right) = \dots$$

כתבו בפירוט את כל שלבי הפתרון!

ב. (16 נקודות) הוכיחו שעבור כל שלם חיובי n המספר $45^n - 19^n$ מתחלק ב-13, ועבור כל שלם חיובי אי-זוגי n המספר $45^n + 19^n$ מתחלק ב-16.

5. (20 נקודות) תהי $A = (a_1, a_2)$ נקודה במישור הקואורדינטות. הנקודה B מתקבלת מ- A על ידי שיקוף בישר l המוגדר על ידי המשוואה $y = 2x$ (כלומר, הקטע AB מאונך לישר l ונקודת האמצע של AB שייכת ל- l). מצאו את הנוסחאות המבטאות את הקואורדינטות של B באמצעות a_1, a_2 . **נמקו את תשובתכם בפירוט!**

בהצלחה!