

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חט"ב

יום ו', י"ג באלול תשע"ט / 13 ספטמבר 2019, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק בטופס הבחינה הזה, בעט, בעברית. אין להחזיר מחברות טיוטה.
3. בתחרות אסור להשתמש במחשבוני, ספרים, דפי נוסחאות או כל חומר עזר אחר.

בהצלחה!

1. סדרו את המספרים $1, 2, 3, \dots, 20$ בשורה כך שההפרש בין כל שני מספרים שכנים יהיה לפחות 10.

2. נתונה טבלת מספרים שלמים, לא בהכרח חיוביים. (הטבלה היא בצורת מלבן אבל לא ידוע מלכתחילה כמה שורות וכמה עמודות יש בה). ידוע שסכום המספרים בכל שורה של הטבלה הוא 2 וסכום המספרים בכל עמודה הוא 1. האם יכול להיות שבטבלה כזאת יש סה"כ 100 משבצות? הוכיחו שזה לא יכול להיות או הביאו דוגמה של טבלה כזאת עם 100 משבצות.

3. איזה מספר יותר גדול: המספר

$$\frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \dots \times \frac{100}{99}$$

או 10? נמקו את תשובתכם בפירוט!

4. האם יכול להיות משולש במישור ששלושת הגבהים שלו הם 2, 4, 5 ס"מ? הוכיחו שאין משולש כזה או הסבירו בפירוט איך לבנות אותו.

5. לאורי ובוני יש לוח משחק בצורת ריבוע 20×20 ס"מ. אורי ובוני משחקים במשחק הבא: אורי שם על הלוח (באיזשהו אופן) 9 מטבעות עגולים זהים, כל אחד ברדיוס 1 ס"מ. אחרי זה בוני מנסה לשים על הלוח עוד מטבע עגול ברדיוס 2 ס"מ כך שהמטבע הזה לא יגע במטבעות של אורי. (לשים מטבע על הלוח פירושו לשים את כולו בתוך שטח הלוח, כך שהוא לא יצא אפילו חלקית מעבר לקצה הלוח). אם בוני מצליח במשימתו, הוא מנצח, ואם לא - אורי מנצח. האם יש לאורי דרך בטוחה לנצח? נמקו את תשובתכם בפירוט!

6. לתמר יש משולש מנייר שכל אחת מהזוויות שלו קטנה או שווה ל- 120° . תמר חתכה את המשולש לכמה משולשים יותר קטנים. הוכיחו שבין המשולשים היותר קטנים הללו יהיה לפחות משולש אחד שכל אחת מהזוויות שלו קטנה או שווה ל- 120° .

7. 50 פושעים מהעולם התחתון באו למפגש. לכל אחד מהפושעים יש לכל היותר 24 אויבים מבין אלה שהגיעו למפגש. הוכיחו שאפשר להושיב את כל הפושעים סביב שולחן עגול כך שאף אחד מהם לא ישב ליד אויב שלו. (אם פושע א' הוא אויב של פושע ב', אז פושע ב' הוא אויב של פושע א').