תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חט"ב

יום ו', י"ג באלול תשע"ט / 13 ספטמבר 2019, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. **בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!**
2. **יש לכתוב את הפתרונות אך ורק בטופס הבחינה הזה, בעט, בעברית. אין להחזיר מחברות טיוטה.**
3. **בתחרות אסור להשתמש במחשבונים, ספרים, דפי נוסחאות או כל חומר עזר אחר.**

בהצלחה!

---

1. סדרו את המספרים $1, 2, 3, \ldots, 20$ בשורה כך שההפרש בין כל שני מספרים שכנים יהיה לפחות 10.

תשובה: $11, 1, 12, 2, \ldots, 19, 9$.

2. נתונה טבלת מספרים שלמים, לא בהכרח חיוביים. (הטבלה היא בצורת מלבן אבל לא ידוע מלכתחילה כמה שורות וכמה עמודות יש בה). ידוע שסכום המספרים בכל שורה של הטבלה הוא 2 וסכום המספרים בכל עמודה הוא 1. האם יכול להיות שבטבלה כזאת יש סה"כ 100 משבצות? הוכיחו שזה לא יכול להיות או הביאו דוגמה של טבלה כזאת עם 100 משבצות.

תשובה: אין טבלה כזאת.
רמז: הסכום של כל המספרים בטבלה $= 2 \times$ מספר השורות $=$ מספר העמודות.

3. איזה מספר יותר גדול: המספר

$$\frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \ldots \times \frac{100}{99}$$

או 10? **נמקו את תשובתכם בפירוט!**

רעיון של הוכחה: הוכיחו כי

$$\frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \ldots \times \frac{100}{99} \geq \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \ldots \times \frac{101}{100}$$

ומצאו את המכפלה של המספר באגף שמאל והמספר באגף ימין. השתמשו בתוצאה כדי להוכיח שהמספר באגף שמאל גדול מ־10.

4. האם יכול להיות משולש במישור ששלושת הגבהים שלו הם $2, 4, 5$ ס"מ? הוכיחו שאין משולש כזה או הסבירו בפירוט איך לבנות אותו.

תשובה: אין משולש כזה.
רעיון של הוכחה: נניח שמשולש כזה קיים. נסמן את השטח שלו על ידי S. אזי הצלעות שלו יהיו $2S/2$, $2S/4$ ו־$2S/5$. אבל $2S/2 > 2S/4 + 2S/5$ - כלומר, צלע במשלוש יותר קטנה מסכום שתי הצלעות האחרות. זה בלתי־אפשרי ולכן משולש כזה לא קיים.

5. לאורי ובועז יש לוח משחק בצורת ריבוע 22×22 ס"מ. אורי ובועז משחקים במשחק הבא: אורי שם על הלוח (באיזשהו אופן) 10 מטבעות עגולות זהים, כל אחד מרדיוס 1 ס"מ, כך שהמטבעות לא נוגעים אחד בשני. אחרי זה בועז

מנסה לשים על הלוח עוד מטבע עגול מרדיוס 2 ס"מ כך שהמטבע הזה לא יגע במטבעות שאורי שם על הלוח קודם. (לשים מטבע על הלוח פירושו לשים את כולו בתוך שטח הלוח, כך שהוא לא יצא אפילו חלקית מעבר לקצה הלוח). אם בועז מצליח במשימתו, הוא מנצח, ואם לא ־ אורי מנצח. האם יש לאורי דרך בטוחה לנצח? **נמקו את תשובתכם בפירוט!**

תשובה: לאורי אין דרך בטוחה לנצח - לא משנה איך אורי שם את המטבעות שלו לבועז יש תמיד אפשרות לנצח.
רעיון של הוכחה: נניח אורי שם את המטבעות שלו על הלוח באופן כלשהו. נתבונן בריבוע מגודל 18×18 ס"מ שצלעותיו מקבילות לצלעות הלוח ומרכזו הוא מרכז הלוח. נקרא לו "הריבוע הקטן". העיגולים מרדיוס 3 ס"מ עם המרכזים במרכזי המטבעות של אורי לא יכולות לכסות את הריבוע הקטן כי השטח הכולל שלהם קטן מהשטח של הריבוע (בדקו!). לכן בתוך המלבן הקטן בהכרח תהיה נקודה הנמצאת מחוץ לכל אותם העיגולים. אם בועז שם את המטבע שלו כך שמרכזו יהיה באותה הנקודה, המטבע שלו יהיה כולו בתוך הלוח ולא יגע במטבעות של אורי (הוכיחו!).

6. לתמר יש משולש מנייר שכל אחת מהזוויות שלו קטנה או שווה ל־$120°$. תמר חתכה את המשולש לכמה משולשים יותר קטנים. הוכיחו שבין המשולשים היותר קטנים הללו יהיה לפחות משולש אחד שכל אחת מהזוויות שלו קטנה או שווה ל־$120°$.

רעיון של ההוכחה: נסמן את המשולש המקורי על ידי ABC. נרכיב בחזרה את המשולש ABC מהמשולשים הקטנים לפי החיתוכים שתמר חתכה. הקודקודים של המשולשים הקטנים מתחלקים לשלושה סוגים: אלה הנמצאים בתוך המשולש ABC ("הסוג הראשון"), אלה הנמצאים בתוך הצלעות של המשולש ABC ("הסוג השני") ואלה הנמצאים בקודקודים של ABC - כלומר A, B, C עצמם ("הסוג השלישי"). נסמן את מספר הקודקודים מהסוג הראשון על ידי m ואת מספר הקודקודים מהסוג השני על ידי n. אזי הסכום הכולל של הזוויות של המשולשים הקטנים הוא

$$180° + 180° \cdot n + 360° \cdot m$$

וזה אומר שיש סה"כ $2m + n + 1$ משולשים קטנים (הוכיחו את הטענות הללו!).
נתבונן בזוויות של המשולשים הקטנים הגדולות מ־$120°$ - נקרא לזווית כזאת "רעה". כל קודקוד מהסוג הראשון סמוך ל־2 או פחות זוויות רעות, כל קודקרד מהסוג השני סמוך ל־1 או פחות זוויות רעות ואף קודקוד מהסוג השלישי אינו סמוך לאף זווית רעה. (הוכיחו את הטענות הללו!). לכן המספר הכולל של הזוויות הרעות הוא ככל היותר $2m + n$ וקטן ממספר המשולשים הקטנים. לכן יש משולש קטן שבו אין זוויות רעות - כלומר, כל הזוויות שלו קטנות או שוות ל־$120°$.

7. 50 פושעים מהעולם התחתון באו למפגש. לכל אחד מהפושעים יש לכל היותר 24 אויבים מבין אלה שהגיעו למפגש. הוכיחו שאפשר להושיב את כל הפושעים סביב שולחן עגול כך שאף אחד מהם לא ישב ליד אויב שלו. (אם פושע א' הוא אויב של פושע ב', אז פושע ב' הוא אויב של פושע א').

רעיון של ההוכחה: אם שני פושעים אינם אויבים נקרא להם "חברים".
בהתחלה נושיב את הפושעים סביב שולחן עגול באופן כלשהו. נניח שמימינו של פושע א' יושב פושע ב' והם אויבים. אזי יש פושע ד', שהוא חבר של ב', שהוא יושב לימינו של פושע ג', שהוא חבר של א' (הוכיחו!). ניקח את הפושעים היושבים בין א' ל־ד' ונושיב אותם באותם המקומות בסדר הפוך (כלומר, ב' ישב לשמאלו של ד', מי שישב לימינו של ב' ישב עכשיו לשמאלו וכן הלאה - בפרט, ג' ישב לימינו של א'). אחרי החלפת מקומות כזאת מספר זוגות השכנים שהם אויבים ירד ב־1 (הסבירו למה!). לכן אם נמשיך באופן דומה, נוכל אחרי מספר סופי של החלפות מקומות להושיב את הפושעים כך שאף אחד מהם לא ישב ליד אויב שלו.