תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', י"ג באלול תשע"ט / 13 ספטמבר 2019, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. **בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות ולנמק בפירוט את כל התשובות!**
2. **יש לכתוב את הפתרונות אך ורק בטופס הבחינה הזה, בעט, בעברית. אין להחזיר מחברות טיוטה.**
3. **בתחרות אסור להשתמש במחשבונים, ספרים, דפי נוסחאות או כל חומר עזר אחר.**

בהצלחה!

---

1. האם יש מספר שלם חיובי n כזה ש־$n(n+1)$ הוא ריבוע של מספר שלם? מצאו n כזה או הוכיחו שהוא לא קיים.

תשובה: אין n כזה.
רמז: אם $k^2 = n(n+1)$ ו־$k > 0$, אזי $n < k < n+1$.

2. קבלן התחייב לסלול כביש באורך 10 ק"מ. בשבוע עבודה ראשון הוא סלל 1 ק"מ. אחר כך הוא התחיל לעבוד לפי השיטה הבאה: אם עד שבוע מסוים הוא כבר סלל x ק"מ, אז באותו שבוע הוא סולל עוד $1/x$ ק"מ. האם הקבלן יסיים מתישהו לסלול את כל הכביש?

תשובה: כן, הקבלן יסיים את סלילת הכביש.
רמז: עבור $n = 1, 2, 3, \ldots$ נסמן על ידי x_n את מספר הקילומטרים שהקבלן סלל ב־n השבועות הראשונים. אם הקבלן עבד בשבוע מספר $n+1$ אזי $x_{n+1}^2 > x_n^2 + 1$ (הוכיחו!). זה אומר שהקבלן יסיים לסלול את הכביש תוך $10^2 = 100$ שבועות (הסבירו למה!).

3. מלבן $ABCD$ מחולק באיזשהו אופן למלבנים יותר קטנים כך שהצלעות שלהם מקבילות לצלעות של $ABCD$. ידוע שכל ישר המקביל ל־AB וכל ישר המקביל ל־BC שעובר דרך $ABCD$ עובר דרך לפחות 3 מהמלבנים הקטנים. (כשמדובר על ישר העובר דרך מלבן זה כולל גם את המקרה שהוא מכיל אחת מהצלעות של המלבן). הוכיחו שמספר המלבנים הקטנים הוא לפחות 8. מצאו חלוקה של $ABCD$ ל־8 חלקים המקיימים את התנאי הנ"ל.

רעיון של פתרון: כל אחת מהצלעות של $ABCD$ עוברת דרך לפחות 3 מלבנים קטנים. אף מלבן שדרכו עוברת הצלע AB לא חותך אף מלבן שדרכו עוברת הצלע CD, וכנ"ל עבור הצלעות AD ו־BC (הסבירו למה!). המלבן שמכיל קודקוד של $ABCD$ (עבור כל קודקוד של $ABCD$ יש רק מלבן אחד כזה) הוא המלבן היחיד שדרכו עוברות שתי הצלעות הנפגשות באותו קודקוד (הסבירו למה!). לכן חייבים להיות לפחות $3 \cdot 4 - 4 = 8$ מלבנים (3 מלבנים עבור כל צלע של $ABCD$; המלבנים המכילים את הקודקודים של $ABCD$ נספרים פעמיים ולכן מחסרים את 4).

כדי לבנות את החלוקה של $ABCD$ ל־8 חלקים המקיימת את התנאי הנ"ל נניח ש־$ABCD$ הוא מגודל 4×4.

נחלק את $ABCD$ ל־4 ריבועים 2×2 על ידי הישרים המקבילים לצלעות של $ABCD$ והעוברים דרך המרכז של $ABCD$. עכשיו נחלק כל אחד מהריבועים 2×2 או לשני מלבנים 1×2 או לשני מלבנים 2×1 (הסבירו איך בדיוק צריך לחלק כל אחד מהריבועים 2×2 ולמה החלוקה שמתקבלת בצורה כזאת היא החלוקה המבוקשת!).

4. נתונה טבלת מספרים שלמים (לא בהכרח חיוביים) בצורת ריבוע 10×10. סכום כל המספרים בטבלה חיובי. הוכיחו שאפשר להחליף את סדר העמודות בטבלה כך שסכום המספרים הנמצאים באלכסון העובר מהפינה השמאלית העליונה של הטבלה לפינה הימנית התחתונה יהיה חיובי.

רעיון של פתרון: ניקח שני עותקים של הטבלה. נדביק את הקצה הימני של העותק הראשון לקצה השמאלי של העותק השני ואת הקצה השמאלי של העותק הראשון לקצה הימני של העותק השני. נקבל טבלה חדשה בצורת גליל.

נתבונן בכל האלכסונים בטבלה החדשה העוברים מהקצה העליון ימינה ומטה (יש 20 אלכסונים כאלה). נסמן את סכומי המספרים באלכסונים הללו על ידי $x_1, \ldots, x_{20}$. אזי:

א. הסכום $x_1 + x_2 + \ldots + x_{20}$ שווה לסכום כל המספרים בטבלה החדשה ולכן הוא חיובי (הסבירו למה!). מכאן שלפחות אחד מהמספרים $x_1, \ldots, x_{20}$ חיובי (הסבירו למה!).

ב. כל אחד מהאלכסונים הנ"ל בטבלה החדשה מתקבל כאלכסון בטבלה המקורית על ידי החלפת סדר עמודות (הסבירו למה!).

מ־א' ו־ב' מסיקים את הטענה (השלימו את הפרטים!).

5. ידוע שלמספרים 2^n ו־5^n עבור איזשהו n שלם חיובי יש אותה ספרה ראשונה a. מצאו את כל הערכים האפשריים של a. **נמקו את תשובתכם בפירוט!**

תשובה: $a = 3$.

רעיון של פתרון: נניח של־ 2^n ול־ 5^n יש אותה ספרה ראשונה a, ושל־ 2^n יש $p+1$ ספרות ול־ 5^n יש $q+1$ ספרות. אזי

$$a \cdot 10^p < 2^n < (a+1) \cdot 10^p, \; a \cdot 10^q < 5^n < (a+1) \cdot 10^q$$

(הסבירו למה!). לכן

$$a^2 \cdot 10^{p+q} < 10^n < (a+1)^2 \cdot 10^{p+q}$$

(הסבירו למה!) וזה גורר

$$a^2 < 10^{n-p-q} < (a+1)^2.$$

מצד שמני, a היא ספרה ולכן קטנה מ־10. זה אומר ש־ $(a+1)^2 \leq 100$. מכאן ש־ $n-p-q = 1$ (הסבירו למה!) ו־

$$a^2 < 10 < (a+1)^2$$

יש רק ספרה אחת a שעבורה זה נכון: $a = 3$. הספרה 3 היא אכן הספרה הראשונה של $2^5 = 32$ ושל $5^5 = 3125$.

6. נתון מרובע קמור $ABCD$ במישור. (מרובע נקרא קמור אם עבור כל שתי נקודות בו הקטע הישר המחבר אותן נמצא כולו במרובע). מצאו נקודה O בתוך $ABCD$ כך שארבעת הקטעים הישרים המחברים את O לנקודות האמצע של הצלעות AB, BC, CD, DA מחלקים את $ABCD$ לארבע מרובעים בעלי אותו שטח. **הסבירו בפירוט איך למצא את O והוכיחו ש־O שמצאתם היא אכן הנקודה המבוקשת.**

רעיון של פתרון: להעביר דרך האמצע של האלכסון AC קו ישר המקביל לאלכסון BD ודרך האמצע של האלכסון BD קו ישר המקביל לאלכסון AC. נקודת המפגש של שני הישרים היא הנקודה המבוקשת (הוכיחו!).

7. נתונות שתי נקודות U ו־V במישור. דרך כל אחת משתי הנקודות עוברים 3 ישרים כך שכל אחד מהישרים העוברים דרך U פוגש כל אחד מהישרים העוברים דרך V בדיוק בנקודה אחת. מתוך נקודות המפגש הנ"ל נבחרו 3 נקודות R_1, R_2, R_3 שסומנו באדום ו־3 נקודות אחרות B_1, B_2, B_3 שסומנו בכחול, כך שעל כל אחד מהישרים יש בדיוק נקודה אדומה אחת ונקודה כחולה אחת. הוכיחו כי

$$\frac{UR_1 \cdot UR_2 \cdot UR_3}{UB_1 \cdot UB_2 \cdot UB_3} = \frac{VR_1 \cdot VR_2 \cdot VR_3}{VB_1 \cdot VB_2 \cdot VB_3}$$

רעיון של פתרון: נקח מערכת קואורדינטות במישור כך שהנקודות U ו־V נמצאות על הציר y. נסמן את הקואורדינטות x של הנקודות R_i, B_i על ידי x_{R_i} ו־ x_{B_i}.

אם R_i, B_j ו־U נמצאים על ישר אחד אזי $UR_i/UB_j = x_{R_i}/x_{B_j}$ ואם R_i, B_j ו־V נמצאים על ישר אחד אזי $VR_i/VB_j = x_{R_i}/x_{B_j}$ (הסבירו למה!). לכן

$$\frac{UR_1 \cdot UR_2 \cdot UR_3}{UB_1 \cdot UB_2 \cdot UB_3} == \frac{x_{R_1} \cdot x_{R_2} \cdot x_{R_3}}{x_{B_1} \cdot x_{B_2} \cdot x_{B_3}} = \frac{VR_1 \cdot VR_2 \cdot VR_3}{VB_1 \cdot VB_2 \cdot VB_3}$$

(הסבירו למה!).