

תכנית "שילוב תלמידי תיכון בלימודים בטכניון", המסלול "מתיכון לטכניון"

בחינת קבלה

יום ב', א' בשבט תש"ף / 27 ינואר 2020, 16:30-18:00

1. (20 נקודות) הוכיחו שעבור כל n שלם חיובי

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

2. יהיו $O = (0, 0)$, $A = (1, 1)$, $B = (0, 2)$ נקודות במישור הקואורדינטות. עבור כל אחד משני התנאים הבאים מצאו את המקום הגיאומטרי של קבוצת הנקודות $X = (x, y)$ במישור המקיימות את התנאי:

א. (10 נקודות) ניתן להציג את $\vec{OX} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$ עבור איזשהם $a \in [-1, 0]$, $b \in \mathbb{R}$

ב. (10 נקודות)

$$\frac{(\vec{OX}, \vec{OB})}{|\vec{OX}| |\vec{OB}|} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

כאן (\cdot, \cdot) מסמן מכפלה סקלרית של וקטורים.

ציירו כל קבוצה במישור הקואורדינטות בציר נפרד.

אם הקבוצה היא תחום עם גבול נא תארו את כל חלק של הגבול באמצעות משוואה והדגישו איזה חלק של הגבול נכלל בקבוצה ואיזה לא.

נמקו את תשובותכם בפירוט!

3. (20 נקודות) מספר אי-זוגי של אנשים התכנס לפגישה. חלק מהאנשים לחצו ידיים. הוכיחו שלפחות אחד האנשים לחץ יד למספר זוגי של אנשים אחרים. (רמז: להתבונן במספר הכולל של לחיצות הידיים.)

4. (20 נקודות) נתון מרובע במישור. אורך כל אחת מהצלעות שלו קטן מ-1 מ'. הוכיחו שהשטח של המרובע קטן מ-1 מ"ר.

5. (20 נקודות) האם אפשר למצא קבועים ממשיים a, b כך ש- $\sin 3x = a \sin x + b \sin 2x$ עבור כל x ממשי? נמקו את תשובתכם בפירוט!

בהצלחה!