תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי <u>חט"ב</u>

יום ו', כ"ב באלול תש"פ / 11 ספטמבר 2020, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. **בשאלון יש 9 שאלות. יש להגיש תשובות לכל התשובות דרך הטופס המקוון באתר התחרות.**
2. **אין אפשרות להגיש פתרונות או לשלוח תשובות או פתרונות בדוא"ל.**

בהצלחה!

__שאלה 1:__ העמודים בספר ממוספרים $1,2,3,4,\ldots$. מספר הספרות המופיעות בכל מספרי העמודים יחד הוא 2973. כמה עמודים יש בספר?

תשובה:

1) 1000

2) 350

3) 2020

4) 2222

5) 965

6) 1030

7) 2000

8) 2040

9) 2010

10) 1020

רעיון של פתרון:

התשובה היא 1020.

בכל המספרים החד־ספרתיים (החיוביים) יש סה"כ $9 = 9\times 1$ ספרות. בכל המספרים הדו־ספרתיים יש סה"כ $180 = 90 \times 2$ ספרות. בכל המספרים הדו־ספרתיים יש סה"כ $2700 = 900 \times 3$ ספרות. כיוון שמספר הספרות הכולל הוא 2973, זה אומר שבספר יש עמודים מ־1 עד 999 ובשאר מספרי העמודים (שהם 4־ספרתיים) יש סה"כ

$$2973 - (9 + 180 + 2700) = 84$$

ספרות. זה אומר שיש $21 = 4 : 84$ עמודים שמספריהם הם 4־ספרתיים - אלה הם העמודים $1020,\ldots,1000$. לכן בספר יש 1020 עמודים.

שאלה 2:

יוסי קנה דבק סלוטייפ שעובי רצועת הדבק שלו הוא 0.1 סנטימטר. רצועת הדבק מגוללת סביב גליל (טבעת) פלסטיק ברדיוס 5 סנטימטר. הסלוטייפ המגולל יחד עם טבעת הפלסטיק הם בקירוב בצורת עיגול. מהו המספר הקרוב ביותר לרדיוס העיגול הזה אם ידוע שאורך רצועת הדבק שקנה יוסי הוא 1000 סנטימטרים?

תשובה:

1) $5+\pi$

2) $\frac{100}{\pi}+5$

3) 8.2

4) 7.8

5) $\sqrt{25+\frac{100}{\pi}}$

6) $\sqrt{100\pi+25}$

7) $5+\sqrt{100\pi}$

8) 9.2

9) $\frac{1000}{2\pi}$

10) $2\pi+5$

רעיון של פתרון:

התשובה היא $\sqrt{\frac{100}{\pi}+25}$.

כשמסתכלים על סלוטייפ מהצד רואים טבעת שהרדיוס הפנימי שלה הוא 5 ס"מ (רדיוס הגליל) והרדיוס החיצוני שלה הוא x ס"מ עבור איזשהו $x>5$ (זה הרדיוס אותו צריך למצא בקירוב). לכן השטח של הטבעת הוא $\pi\cdot x^2-\pi\cdot 5^2=\pi(x^2-25)$ סמ"ר. מצד שני, השטח הזה שווה (בערך) לאורך הסלוטייפ כפול העובי שלו - כלומר, $0.1\times 1000=100$ סמ"ר. לכן $\pi(x^2-25)\approx 100$ ולפיכך $x\approx\sqrt{\frac{100}{\pi}+25}$.

<u>שאלה 3:</u>

כמה מספרים ראשוניים יש שניתן להציג אותם גם כסכום של שני ראשוניים וגם כהפרש של שני ראשוניים? (ראשוני זה מספר שלם גדול מאחד שאין לו מחלקים חיוביים שלמים פרט לאחד ולמספר הזה עצמו).

תשובה:

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

5) 5

6) 6

7) 7

8) אין־סוף

9) לא קיימים ראשוניים כאלה

10) 8

רעיון של פתרון:

התשובה היא 1.

יהי p מספר ראשוני שניתן להציגו גם כסכום של שני ראשוניים וגם כהפרש של שני ראשוניים. כיוון ש־p הוא סכום של שני ראשוניים וכיוון שמספר ראשוני, לפי ההגדרה, גדול מאחד, נקבל $p > 2$. המספר הראשוני הזוגי היחיד הוא 2 ולכן p הוא אי־זוגי ובהצגה של p כסכום או הפרש של שני ראשוניים אחד מהראשוניים הללו חייב להיות זוגי, כלומר 2. זה אומר ש־$p-2$, p, $p+2$ הם מספרים ראשוניים. עכשיו נשים לב שמתוך כל שלושה מספרים אי־זוגיים עוקבים אחד חייב להיות כפולה של 3 (הוכיחו את הטענה הזאת!). זה גורר שאחד מהמספרים הראשוניים $p-2$, p, $p+2$ מתחלק ב־3 ולכן הוא עצמו 3. זה יכול להיות רק $p-2$ (הסבירו למה!). זה אומר ש־$p=5$ - כלומר, 5 הוא המספר הראשוני היחיד שניתן להציגו גם כסכום של שני ראשוניים ($5 = 3 + 2$) וגם כהפרש של שני ראשוניים ($5 = 7 - 2$).

שאלה 4:

אחת הספרות ביצוג העשרוני של מספר שלם מסויים היא 0. כאשר מוציאים את הספרה הזו מקבלים מספר חדש עם ספרה אחת פחות, הקטן בדיוק פי 9 מהמספר המקורי. מהו מיקומה של הסיפרה 0 שהורדנו במספר המקורי?

תשובה:

1) סיפרה ראשונה משמאל

2) סיפרה שנייה משמאל

3) סיפרה שלישית משמאל

4) סיפרה רביעית משמאל

5) סיפרה ראשונה מימין

6) סיפרה שנייה מימין

7) סיפרה שלישית מימין

8) סיפרה רביעית מימין

9) סיפרה אמצעית במספר (שחייב להיות בעל מספר אי־זוגי של ספרות)

10) לא קיים מספר כזה

רעיון של פתרון:

התשובה היא "סיפרה שנייה משמאל".
ספרה 0 אינה הספרה הראשונה או האחרונה במספר המקורי (הסבירו למה!). לכן אפשר לכתוב את המספר המקורי כ־$A0B$ כאשר A הוא מספר k־ספרתי ו־B הוא מספר m־ספרתי עבור איזשהם שלמים חיוביים k, m. אזי

$$AB0 = 10 \cdot AB = 9 \cdot AB + AB = A0B + AB$$

(כי $A0B = 9 \cdot AB$, לפי הנחת השאלה). מכאן, $B0 = B + AB$. לכן, כיוון ש־B הוא מספר m־ספרתי, נקבל ש־AB מכיל לא יותר מ־$m+1$ ספרות (הסבירו למה!). זה אומר ש־A הוא מספר חד־ספרתי - כלומר, $k = 1$ וספרת 0 עמדה במקום השני משמאל במספר המקורי.

<u>שאלה 5:</u>

בני רוצה לסמן $n \geq 3$ נקודות במישור כך שעבור כל שתי נקודות מסומנות A, B תהיה נקודה מסומנת שלישית C כך ש־$AC = BC$. עבור אילו n בני יכול להצליח במשימתו?

תשובה:

1) אך ורק עבור $n = 3$

2) אך ורק עבור $n = 5$

3) אך ורק עבור $n = 3$ ו־$n = 5$

4) אך ורק עבור n שהוא כפולה של 3 ו/או 5

5) אך ורק עבור כל n שמתחלק ב־3

6) עבור כל n ששארית החילוק שלו ב־6 שווה ל־3

7) עבור כל $n \geq 3$

8) אך ורק עבור כל n אי־זוגי

9) יש בדיוק שלושה מספרים n כאלה

רעיון של פתרון:

התשובה היא "עבור כל $n \geq 3$".
בני יכול להצליח במשימתו עבור כל $n \geq 3$ באופן הבא:
אם n הוא אי־זוגי, ניקח מעגל מרדיוס 1 ונשים עליו $\frac{n-1}{2}$ זוגות נקודות, כך שהמרחק בין הנקודות בכל זוג הוא 1. זה יתן $n-1$ נקודות. בתור הנקודה מספר n ניקח את מרכז המעגל. עוד אפשרות במקרה של n אי־זוגי היא לקחת את הקודקודים של מצולע משוכלל (בעל n קודקודים).
אם n הוא זוגי, נעשה אותו דבר, רק שיהיו בין הזוגות שניים כאלה שיש להם נקודה אחת משותפת.
(השלימו את הפרטים והוכיחו שהנקודות מקיימות את התנאי הנדרש!)

<u>שאלה 6:</u>

על לוח משבצות בגודל 8×8 מניחים בחלק מהמשבצות אבן שחורה או לבנה. חייב להתקיים שבכל שורה ועמודה בלוח מספר האבנים הלבנות כפול ממספר האבנים השחורות. מהו המספר המרבי של אבנים שניתן להניח כך על הלוח?

תשובה:

1) 64

2) 36

3) 50

4) 20

5) 48

6) 24

7) 40

8) 34

9) 30

10) 9

עיון של פתרון:

התשובה היא 48.

מספר האבנים (השחורות והלבנות ביחד) בכל עמודה הוא כפולה של 3, ולכן אינו גדול מ־6. לכן בכל הלוח יש לא יותר מ־$48 = 8 \times 6$ אבנים (השחורות והלבנות ביחד). מצד שני, אפשר לשים 48 אבנים לפי התנאי שבשאלה: נשים 32 אבנים לבנות על המשבצות הלבנות של הלוח (נחשוב על הלוח בתור לוח שחמט, עם משבצות לבנות ושחורות לסירוגין), 8 אבנים שחורות על האלכסון "הראשי השחור", ועוד 8 השחורות על שני האלכסונים "השחורים" באורך 4 המקבילים לאלכסון "הראשי השחור". מכאן שהתשובה היא 48.

<u>שאלה 7:</u>

דני רוצה לקנות סט משקולות שמקיים את התנאים הבאים:

- בין המשקולות בסט יש 5 משקולות שמשקליהן כולם שונים.
- לכל זוג משקולות בסט יש עוד זוג משקולות אחרות בסט עם אותו המשקל הכולל כמו לזוג הראשון.

(בסט יש מספר סופי של משקולות ויכולות להיות כמה משקולות עם אותו משקל).

מהו המספר הקטן האפשרי של משקולות שיכול להיות בסט כזה?

תשובה:

1) 8

2) 6

3) 7

4) 5

5) 9

6) 10

7) 14

8) 11

9) 12

10) 13

רעיון של פתרון:

התשובה היא 13.
נסדר את המשקלים של המשקולות בסט בסדר עולה. נשים לב שלפי ההנחה של השאלה בסדרה של המשקלים צריכים להיות לפחות 5 משקלים שונים.
יהי A המשקל הקטן ביותר של המשקולות בסט ויהי B המשקל הבא אחרי A בסדר העולה של המשקלים.
הזוג היחיד של משקולות בסט שיכול להיות לו אותו משקל כולל כמו לזוג המשקולות עם המשקלים A, B זה עוד זוג עם המשקלים A, B. לכן יש לפחות שתי משקולות עם המשקל A ולפחות שתי משקולות עם המשקל B.

הזוג היחיד של משקולות בסט שיכול להיות לו אותו משקל כולל כמו לזוג המשקולות עם המשקלים A, A זה עוד זוג עם המשקלים A, A. לכן יש לפחות 4 משקולות עם המשקל A.

יהי E המשקל הכי גדול של המשקולות בסט ויהי D המשקל הבא אחריו בסדר יורד של המשקלים. טיעון דומה לטיעון הנ"ל מראה שבסט צריכות להיות לפחות 2 משקולות עם המשקל D ולפחות 4 משקולות עם המשקל E.

כיוון שבין המשקולות בסט יש 5 משקולות עם 5 משקלים שונים, נקבל שהמשקלים A, B, D, E כולם שונים ובנוסף צריכה להיות בסט לפחות משקולת אחת שהמשקל שלה C נמצא בין B ל־D. זה אומר שבסט צריכות להיות לפחות $4 + 2 + 1 + 2 + 4 = 13$ משקולות.

מצד שני, סט של 13 משקולות עם המשקלים $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5\}$ מקיים את התנאים בשאלה (בדקו!).

זה אומר ש־13 הוא המספר הקטן האפשרי של משקולות שיכול להיות בסט.

שאלה 8:

למסיבה באו 100 אורחים. חלק מאורחי המסיבה הם ידידים (אם A ידיד של B אז גם B ידיד של A; יכול להיות שלחלק מהאורחים אין ידידים במסיבה; אורח לא נחשב לידיד של עצמו). בשעה 22:00 כל האורחים שאין להם ידידים במסיבה קמו ועזבו את המסיבה. בשעה 22:01 כל האורחים שעדיין נמצאים במסיבה ויש להם בדיוק ידיד אחד בין האורחים שעדיין נמצאים במסיבה קמו ועזבו את המסיבה. בשעה 22:02 כל האורחים שעדיין נמצאים במסיבה ויש להם בדיוק 2 ידידים בין האורחים שעדיין נמצאים במסיבה קמו ועזבו את המסיבה. כך זה המשיך גם עבור האורחים שיש להם בדיוק $3, 4, \ldots, 99$ ידידים הנמצאים במסיבה בזמן עזיבתם. מהו המספר המקסימלי של האורחים שיכולים להישאר במסיבה בסוף התהליך הזה?

תשובה:

1) 0

2) 1

3) 2

4) 3

5) 50

6) 51

7) 97

8) 98

9) 99

10) 100

רעיון של פתרון:

התשובה היא 98.

אם כל אורח מכיר כל אורח אחר פרט לכך שזוג מסוים A, B לא מכירים אחד את השני (אבל מכירים את שאר האורחים), אזי ל־A ו־B יש בהתחלה 98 ידידים במסיבה ולכל אחד משאר האורחים יש 99. עד שיעברו 98 דקות אחרי 22:00 אף אורח לא יעזוב את המסיבה. A ו־B יעזבו את המסיבה ביחד 98 דקות אחרי 22:00 ואז לכל אחד מ־98 אורחים שנשארו יהיו עדיין 98 ידידים במסיבה ואף אחד מהם לא יעזוב את המסיבה (כי בשלבים הבאים עוזבים רק אלה שיש להם 99 ו־100 ידידים ואין יותר אורחים כאלה). זה מראה שבסוף התהליך יכולים להשרא 98 אורחים.

נראה שלא יוכלו להישאר יותר מ־98 אורחים. יהי C אחד מ־100 האורחים המקוריים שיש לו הכי פחות ידידים במסיבה - נסמן את מספר הידידים שלו ב־k. באיזשהו שלב של התהליך הוא בהכרח יעזוב את המסיבה (הסבירו למה!). נניח בשלילה שרק C עזב את המסיבה במהלך התהליך וכל שאר האורחים נשארו. כיוון שאף אחד משאר האורחים לא עזב את המסיבה, זה אומר שלכל אחד מהם יש יותר מ־k ידידים (בין אלה שעדיין נמצאים במסיבה) בכל שלב של התהליך לפני עזיבתו של C ופחות מ־$(k+1)$ בכל שלב אחרי עזיבתו. זה אומר ש־C הוא ידיד של כל שאר האורחים, כלומר $k = 99$. לפי ההגדרה של k, זה אומר שגם לכל אחד משאר האורחים המקוריים יש 99 ידידים במסיבה - כלומר, כל אחד מהאורחים המקוריים הוא ידיד של כל אורח אחר. זה אומר שבשלבים $1, \ldots, 98$ (בשעות $\ldots$,22:00, 22:01) אף אחד מהאורחים לא יעזוב את המסיבה ובשלב 100 (בשעה 23:39) כל 100 אורחים יקומו ויעזבו - בניגוד להנחה ש־C הוא האורח היחיד שעזב את המסיבה. קיבלנו סתירה וזה אומר ש־98 הוא המספר המקסימלי של אורחים שיכולים להישאר במסיבה בסוף התהליך.

שאלה 9:

נתון מצולע משוכלל P בעל 100 קודקודים. בהינתן מצולע כלשהו במישור (בעל לפחות 3 קודקודים), נקרא לו "טוב" אם כל אחד מקודקודיו הוא קודקוד של P. (בפרט, P עצמו הוא טוב).

איילה רוצה לצייר קבוצה קטנה ביותר של מצולעים טובים כך שכל קטע בין זוג קודקודים של P (כלומר, אלכסון או צלע של P) יופיע כצלע של לפחות אחד מהמצולעים המצוירים הטובים. נסמן ב־m את המספר הקטן ביותר של מצולעים טובים כאלה שאיילה יכולה לצייר. מי מבין המספרים הבאים הוא הקרוב ביותר ל־m?

תשובה:

1) 60

2) 1200

3) 75

4) 1500

5) 45

6) 1320

7) 1440

8) 1380

9) 1260

10) 90

רעיון של פתרון:

התשובה היא 1260.

נקרא לקבוצת מצולעים טובים המקיימת את התנאי בשאלה "קבוצה נחמדה". כלומר, קבוצת מצולעים טובים היא נחמדה אם המצולעים הטובים המרכיבים אותה "מכסים" את כל הקטעים הישרים בין הקודקודים של P.

עבור כל שני קודקודים שונים x, y של P יש שתי דרכים להגיע מ־x ל־y דרך הצלעות של P. כל אחת מהדרכים הללו מכילה מספר צלעות. נגדיר את <u>המשקל</u> של הקטע הישר בין x ל־y כהקטן בין שני המספרים הנ"ל. משקל כזה הוא מספר בין 1 ל־50 (כולל).

נחשב את סכום המשקלים של כל הקטעים האפשריים בין הקודקודים של P (כלומר, סכום המשקלים של כל הצלעות וכל האלכסונים של P). יש בדיוק 100 קטעים הללו עם משקל 1, בדיוק 100 קטעים עם משקל 2, ..., בדיוק 100 קטעים עם משקל 49 (הסבירו

למה!). בנוסף לכך יש 50 קטעים עם משקל 50 (הסבירו למה!). זה אומר שסכום המשקלים של כל הקטעים הוא $100(1+2+3+\ldots+49)+50\times 50$.

מצד שני, נשים לב שסכום המשקלים של כל הצלעות של מצולע טוב אינו גדול מ־100 ויכול להיות שווה ל־100 (הוכיחו!).

נניח עכשיו שאיילה ציירה קבוצה נחמדה של k מצולעים טובים ושסכום המשקלים של כל הצלעות של המצולעים הללו הוא n.

כיוון ש־$n \leq 100k$ וכיוון שכל קטע ישר בין הקודקודים של P מכוסה על ידי המצולעים הטובים מהקבוצה הנחמדה, נקבל ש־

$$100k \geq n \geq 100(1+2+3+\ldots+49)+50\times 50$$

ולכן

$$k \geq \frac{100(1+2+3+\ldots+49)+50\times 50}{100} =$$

$$= (1+2+3+\ldots+49)+25 = \frac{49\times 50}{2}+25 = 25\times 50 = 1250.$$

כלומר, $k \geq 1250$. זה אומר שהמספר המינימלי m של מצולעים טובים בקבוצה נחמדה גם הוא מקיים $m \geq 1250$.

נראה עכשיו ש־$m \leq 1275$. נוכיח את זה על ידי בניה מפורשת של קבוצה נחמדה של 1275 מצולעים טובים. עבור כל $i = 1, 2, \ldots, 24$ נצייר 50 מלבנים טובים כך שמשקלי הצלעות שלהם יהיו i ו־$50-i$ (הסבירו איך לצייר מלבנים כאלה!). זה נותן לנו קבוצה של $24\times 50 = 1200$ מצולעים טובים המכסה את כל הקטעים הישרים בין הקודקודים של P עם משקל השונה מ־25 ו־50. בנוסף לכך נצייר 25 ריבועים טובים שמשקלי הצלעות שלהם הם 25, כך שהריבועים הללו יכסו את כל הקטעים הנ"ל עם המשקל 25. לבסוף, נצייר איזשהם 50 מצולעים טובים המכסים את כל הקטעים הנ"ל עם המשקל 50. בנינו קבוצה נחמדה של מצולעים טובים בעלת $1275 = 25 + 50 + 1200$ מצולעים. לכן $m \leq 1275$.

לסיכום, קיבלנו ש־$1250 \leq m \leq 1275$. זה אומר שבין כל התשובות המוצעות 1260 הוא המספר הקרוב ביותר ל־m.