תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', כ"ב באלול תש"פ / 11 ספטמבר 2020, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. **בשאלון יש 9 שאלות. יש להגיש תשובות לכל התשובות דרך הטופס המקוון באתר התחרות.**
2. **אין אפשרות להגיש פתרונות או לשלוח תשובות או פתרונות בדוא"ל.**

בהצלחה!

שאלה 1:

במשולש ΔABC התיכון, חוצה הזווית והגובה היוצאים מהקודקוד B מחלקים את הזווית $\angle ABC$ לארבעה חלקים שווים. הזווית $\angle BAC$ היא הקטנה ביותר במשולש. מהי הזווית $\angle BCA$ (במעלות)?

תשובה:

1) 60

2) 61.5

3) 63

4) 63.5

5) 65

6) 65.5

7) 67

8) 67.5

9) 68

10) 68.5

רעיון של פתרון:

התשובה היא 67.5.
ניקח את המעגל החוסם של המשולש. יהיו D, E נקודות על המעגל כך ש־BD, BE מכילים את התיכון ואת חוצה הזווית של ΔABC היוצאים מ־B.
הוכיחו ש־E נמצא על האנך האמצעי של AC וש־ΔABE הוא משולש שווה שוקיים.
הסיקו מזה ש־BD מכיל את מרכז המעגל ושמרכז המעגל הוא נקודת האמצע של AC.
הסיקו מזה ש־$\angle ABC = 90°$ וכתוצאה מכך $\angle BAC = 22.5°$, $\angle ACB = 67.5°$.
כלומר, התשובה היא $67.5°$.

<u>שאלה 2:</u>

נתונה טבלת משבצות בגודל 100×100. בכל משבצת רשום מספר שלם אי־שלילי. אם במשבצת מסויימת רשום 0 אז בהכרח סכום כל המספרים בשורה והעמודה (יחד) של אותה משבצת הוא לפחות 100. מהו הסכום הקטן ביותר האפשרי של כל המספרים הרשומים בטבלה כזאת?

תשובה:

1) 200

2) 10000

3) 20000

4) 1000

5) 2000

6) 2500

7) 5000

8) 7500

9) 500

10) 100

רעיון של פתרון:

התשובה היא 5000.
נניח שיש לנו טבלה כמו בשאלה. נראה שסכום המספרים בה גדול או שווה ל־5000.
עבור כל שורה וכל עמודה בטבלה ניקח את סכום המספרים בה, ובין כל הסכומים הללו ניקח את הסכום הקטן ביותר - נקרא לו a.
אם $a \geq 50$ אז סכום המספרים בטבלה גדול או שווה ל־5000 (הסבירו למה!) וסיימנו.
לכן נניח ש־$a < 50$.
ניקח שורה, או עמודה, שסכום המספרים בה שווה ל־a - נניח ללא הגבלת הכלליות שזו שורה. יהי b מספר האפסים באותה שורה. אזי $b \geq 100 - a$ (הסבירו למה!).
הסכום הכולל של המספרים בעמודות המכילות את אותם b האפסים הוא לפחות $b(100-a)$ (הסבירו למה!). סכום המספרים הכולל בשאר $100-b$ העמודות הוא לפחות $(100-b)a$. לכן הסכום הכולל של כל המספרים בטבלה הוא לפחות $100a+b(100-2a)$.

כיוון ש־$a < 50$, מתקיים $100 - 2a \geq 0$ ולכן

$$100a + b(100-2a) \geq 100a + (100-a)(100-2a)$$

הביטוי $100a + (100-a)(100-2a) = 2a^2 - 200a + 10000$ מקבל את הערך הקטן ביותר שלו כאשר $a = 50$ (הסבירו למה!) והערך הזה שווה ל־5000. לכן סכום המספרים בטבלה גדול או שווה ל־5000.

זה אומר שסכום המספרים הטבלה תמיד גדול או שווה ל־5000.

נבנה עכשיו טבלה כמו בשאלה שסכום המספרים בה הוא בדיוק 5000. נחשוב על הטבלה בתור "לוח שחמט", עם משבצות שחורות ולבנות לסירוגין, ונשים 1 בכל משבצת שחורה ו־0 בכל משבצת לבנה. הטבלה הזאת מקיימת את התנאי בשאלה וסכום המספרים בה הוא 5000 (השלימו את הפרטים!).

שאלה 3:

ליאור אוהב תחרויות שחמט. הוא מנסה לברר האם יכולה להיות תחרות שחמט עם $x \geq 3$ שחקנים שבה כל אחד מהשחקנים שיחק נגד כל שחקן אחר בדיוק פעם אחת וכל אחד מהשחקנים קיבל חצי מהנקודות שלו במשחקים נגד שלושת השחקנים שזכו בשלושת המקומות האחרונים בתחרות. מהם הערכים האפשריים של x שעבורם יכולה להיות תחרות כזאת?

(דברי הסבר: משחק שחמט הוא משחק בין שני שחקנים; המנצח במשחק מקבל נקודה אחת והמפסיד 0 נקודות; אם יש תיקו, שניהם מקבלים חצי־נקודה. בסוף התחרות מדרגים את השחקנים לפי הנקודות שהם קיבלו וכך רואים מי זכה באיזה מקום. יכול להיות שכמה שחקנים קיבלו אותו מספר נקודות ואז בדירוג הסופי שמים אותם אחד אחרי שני בסדר סתמי כלשהו).

תשובה:

1) כל כפולה של 3 הגדולה מ־3

2) כל מספר שלם הגדול מ־5

3) אין ערכים אפשריים ל־x (כלומר, לא יכולה להיות תחרות כזאת)

4) כל הכפולות חיוביות של 6

5) 6

6) 6, 12 ו־18

7) 8

8) 12

9) 4 ו־9

10) 9

רעיון של פתרון:

התשובה היא 9.

כיוון שכל אחד מהשחקנים שיחק מול כל שחקן אחר בדיוק פעם אחת, היו בתחרות סה"כ $x(x-1)/2$ משחקים (הסבירו למה!).

מספר הנקודות הכולל ששני שחקנים מקבלים בעקבות משחק ביניהם הוא 1. לכן סכום הנקודות שכל השחקנים קיבלו בתחרות שווה למספר המשחקים - כלומר, ל־$x(x-1)/2$.

נקרא לשחקנים שזכו בשלושת המקומות האחרונים בתחרות A, B, C.

לפי הנחת השאלה, כל שחקן קיבל חצי מהנקודות שלו במשחקים מול A, B, C ואת החצי השני של הנקודות שלו במשחקים מול שאר השחקנים.

השחקנים A, B, C שיחקו 3 משחקים אחד מול השני ושלושתם קיבלו במשחקים הללו סה"כ 3 נקודות - שזה חצי מסה"כ הנקודות ששלושתם ביחד קיבלו בתחרות. כלומר, השחקנים A, B, C ביחד קיבלו בתחרות 6 נקודות.

שאר $x-3$ השחקנים שיחקו בינם ובין עצמם $(x-3)(x-4)/2$ משחקים וקיבלו ביחד במשחקים הללו מספר הנקודות השווה למספר המשחקים. זה חצי מסך כל הנקודות שהם ביחד קיבלו בתחרות. לכן, $x-3$ השחקנים הללו ביחד קיבלו בתחרות $(x-3)(x-4)$ נקודות.

זה אומר שכל השחקנים בתחרות קיבלו ביחד $(x-3)(x-4)+6$ נקודות. לכן $(x-3)(x-4)+6 = x(x-1)/2$, כלומר $x^2 - 13x + 36 = 0$.

למשוואה האחרונה יש שני פתרונות: $x = 4$ ו־$x = 9$. המקרה $x = 4$ אינו תואם את תנאיי השאלה: אילו היו 4 שחקנים בתחרות, השחקנן שהגיע למקום הראשון היה מקבל את כל הנקודות שלו במשקים מול שלושת השחקנים האחרונים, אבל לפי תנאי השאלה הוא אמור לקבל בהם רק חצי מהנקודות שלו ולא ייתכן שהוא קיבל 0 נקודות (כי אז הוא לא היה מגיע למקום הראשון). זה אומר ש־x לא יכול להיות שווה ל־4 - כלומר, $x = 9$.

על מנת להראות ש־$x = 9$ הוא אכן ערך אפשרי של x, נבנה תחרות עם 9 שחקנים המקיימת את התנאים של השאלה.

נקרא לתשעת השחקנים בתחרות $A, B, C, D, E, F, G, H, I$. תוצאות המשחקים בתחרות המבוקשת הן הבאות:

כל אחד משלושת השחקנים A, B, C השיג תיקו בכל אחד מהמשחקים שלו מול שניים האחרים ומול D ו־E והפסיד ל־F, G, H, I.

D הפסיד ל־G ו־I והשיג תיקו בכל שאר משחקיו.

E הפסיד ל־F ו־H והשיג תיקו בכל שאר משחקיו.

F, G, H, I ניצחו בכל המשחקים שלהם מול A, B, C ובכל המשחקים בינם ובין העצמם התוצאות היו תיקו.

נוסף לכך, F ו־H ניצחו את E והשיגו תיקו מול D, ו־G ו־I ניצחו את D והשיגו תיקו מול E.

בסופו של דבר:

A, B, C הגיעו לשלושת המקומות האחרונים בתחרות, כל אחד עם 2 נקודות, מתוכם נקודה אחת במשחקים מול שניים האחרים מתוך השלישייה.

F, G, H, I קיבלו כל אחד 6 נקודות, מתוכם 3 במשחקים מול A, B, C.

D, E קיבלו כל אחד 3 נקודות, מתוכם 1.5 נקודות במשחקים מול A, B, C.

סיכום: 9 הוא הערך האפשרי היחידי של x.

שאלה 4:

n תלמידים יושבים במעגל ($n \geq 3$). כל אחד מהתלמידים בוחר לעצמו מספר ממשי השונה מ־0 ו־1. אנו נאמר שהתלמידים בחרו את המספרים בצורה טובה אם מתקיים לכל אחד מהתלמידים שהמספר שהוא בחר שווה ל־$(1-a)(1-b)$ כאשר a ו־b הם המספרים שבחרו שני התלמידים שיושבים לידו מצד ימין ומצד שמאל.

עבור אילו מן הערכים הבאים של n קיימות אינסוף אפשרויות שונות עבור התלמידים לבחור את המספרים בצורה טובה? (שתי אפשרויות הן שונות אם לפחות אחת מהתלמידים בוחר בהן מספרים שונים).

תשובה:

1) 13

2) 21

3) 8

4) 12

5) 31

6) 39

7) 9

8) 48

9) 46

10) 55

רעיון של פתרון:

התשובה היא 55.

נוכיח שיש אינסוף אפשרויות שונות עבור התלמידים לבחור את המספרים בצורה טובה אם ורק אם n הוא כפולה של 5 (ולכן התשובה היא 55).

קודם כל ננסח את השאלה בצורה שקולה שהיא יותר נוחה לדיון.

נמספר את התלמידים על ידי $1, 2, \ldots, n$. נסמן את המספרים שם בחרו על ידי $b_1, \ldots, b_n$. נתבונן בסדרה האינסופית המחזורית

$$\underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_n}, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_n}, \ldots$$

ונסמן את איבריה על ידי $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ - כלומר:

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n, a_{n+1} = b_1, a_{n+2} = b_2, \ldots$$

זוהי סדרה מחזורית עם מחזור באורך n - כלומר, $a_i = a_{i+n}$ עבור כל i שלם חיובי.

המספרים $b_1, \ldots, b_n$ נבחרו על ידי התלמידים בצורה טובה אם ורק אם הסדרה $a_1, a_2, \ldots$ מקיימת את התנאי שעבור כל $i = 2, 3, \ldots$

$$a_i = (1 - a_{i-1})(1 - a_{i+1})$$

(הסבירו למה!). נקרא לסדרה אינסופית של מספרים ממשיים השונים מ־0 ו־1 <u>טובה</u> אם היא מקיימת את התנאי הזה.

לכן אפשר לנסח את השאלה המקורית בצורה השקולה הבאה: עבור אילו n יש אינסוף סדרות מחזוריות טובות עם מחזור באורך n?

נוכיח שזה מתקיים אם ורק אם n היא כפולה של 5.

נניח שיש לנו סדרה טובה ... $a_1, a_2,$ עם מחזור באורך n. נסמן

$$x = a_1, \ y = a_3.$$

לפי ההנחה שלנו, גם x וגם y שונים מ־0 ו־1.

לפי התנאי מההגדרה של סדרה טובה, נקבל שעבור כל $i = 2, 3, \ldots$ מתקיים

$$a_{i+1} = \frac{1 - a_i - a_{i-1}}{1 - a_{i-1}}.$$

(הסבירו למה!)

נשתמש במשוואה הנ"ל על מנת לבטא את $a_1, a_2 \ldots,$ באמצעות x, y. קודם כל נבטא את a_2, a_4 באמצעות x ו־y. נקבל:

$$a_2 = (1 - a_1)(1 - a_3) = (1 - x)(1 - y),$$

$$a_4 = \frac{1 - a_3 - a_2}{1 - a_2} = \frac{x - xy}{x + y - xy}$$

(הסבירו למה ההנחות שלנו גוררות ש־$x + y - xy \neq 0$!)

באופן דומה נקבל:

$$a_5 = \frac{1 - a_4 - a_3}{1 - a_3}$$

נציב בשיוויון האחרון את הביטויים עבור a_3 ו־a_4 באמצעות x ו־y ואחרי פישוט הנוסחה נקבל:

$$a_5 = \frac{y - xy}{x + y - xy}.$$

נכתוב:

$$a_6 = \frac{1 - a_5 - a_4}{1 - a_4}.$$

נציב בשיוויון האחרון את הביטויים של a_4 ו־a_5 באמצעות x ו־y ואחרי פישוט הנוסחה נקבל:

$$a_6 = x$$

אם נמשיך באותה הדרך נקבל ש־

$$a_7 = (1-x)(1-y),\ a_8 = y, \ldots$$

זה אומר שכל סדרה טובה $a_1, a_2, \ldots,$ עם $a_1 = x$ ו־$a_3 = y$ השונים מ־0 ו־1, היא מחזורית עם אורך המחזור 5 - כלומר, $a_{i+5} = a_i$ עבור כל i שלם וחיובי.

אם n הוא כפולה של 5 זה נותן לנו דרך לבנות אינסוף סדרות מחזוריות טובות שונות עם מחזור באורך n: כי יש אינסוף אפשרויות לבחור ערכים (השונים מ־0 ו־1) עבור x ו־y והערכים האלה קובעים לגמרי את הסדרה. (בדקו שבסדרה המתקבלת כל המספרים שונים מ־0 ו־1!)

אם n אינו כפולה של 5, אזי עבור כל i שלם וחיובי אפשר למצא k, l שלמים חיוביים כך ש־$5k + i = nl + 1$ (הוכיחו את זה! רמז: הוכיחו קודם שכיוון ש־n אינו כפולה של 5, עבור כל k שלם וחיובי שאריות החילוק ב־5 של המספרים

$$5k+i,\ 5k+i+n,\ 5k+i+2n,\ 5k+i+3n,\ 5k+i+4n$$

כולן שונות). לכן, כיוון שהסדרה היא מחזורית גם עם מחזור באורך 5 וגם עם מחזור באורך n, נקבל שעבור כל i שלם וחיובי

$$a_i = a_{5k+i} = a_{nl+1} = a_1 = x,$$

זה אומר שהסדרה היא קבועה: $a_i = a_1 = x$ עבור כל i שלם חיובי. אם סדרה קבועה שכל איבריה שווים ל־x היא טובה, אזי המספר x חייב לקיים את המשוואה

$$x = (1-x)^2$$

(הסבירו למה!). למשוואה הזאת יש רק שני פתרונות: $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. זה אומר שאם n אינו כפולה של 5, אזי יש רק שתי סדרות טובות עם אורך המחזור n שאינן מורכבות מאפסים ויחידות בלבד.

זה אומר שיש אינסוף סדרות טובות שונות עם אורך המחזור n אם ורק אם n הוא כפולה של 5. לכן יש אינסוף אפשרויות שונות עבור התלמידים לבחור את המספרים בצורה טובה אם ורק אם n הוא כפולה של 5.

<u>שאלה 5:</u>

נתבונן בכל הקבוצות $a_1, \ldots, a_{10}$ של מספרים ממשיים שונים כך שלמשוואה

$$|x - a_1| + \ldots + |x - a_5| = |x - a_6| + \ldots + |x - a_{10}|$$

יש מספר סופי של פתרונות. מהו המספר המרבי האפשרי של פתרונות למשוואה כזו?

תשובה:

1) 20

2) 2

3) 4

4) 6

5) 5

6) 7

7) 8

8) 12

9) 3

10) 10

רעיון של פתרון:

נוכיח שהתשובה היא 5.
נגדיר פונקציה

$$f(x) = |x - a_1| + \ldots + |x - a_5| - |x - a_6| - \ldots - |x - a_{10}|$$

ונכתוב את המשוואה בשאלה כ־$f(x) = 0$.
נסדר את המספרים $a_1, \ldots, a_{10}$ בסדר עולה ונסמן את הסדרה העולה שקיבלנו על ידי $c_1, \ldots, c_{10}$. על כל אחד מהקטים $(-\infty, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_9, c_{10}], [c_{10}, +\infty)$ הפונקציה f ליניארית עם שיפוע שלם - כלומר, היא פונקציה מהצורה $f(x) = kx + l$ כאשר k שלם (הסבירו למה!). יותר מזה, על $[c_{10}, +\infty)$ הפונקציה f קבועה ושווה ל־

$$m := a_6 + \ldots + a_{10} - a_1 - \ldots - a_5$$

ועל $[-\infty, c_1]$ היא קבועה ושווה ל־$(-m)$ (הסבירו למה!). נשים לב ש־$m \neq 0$ כי, לפי ההנחה, מספר הפתרונות של $f(x) = 0$ הוא סופי.

נעבור בציר המספרים משמאל לימין ונעקוב אחרי השיפוע של f על כל קטע וקטע מהקטעים הנ"ל. בהתחלה, על $[-\infty, c_1]$, השיפוע הוא 0 וכל פעם שאנחנו עוברים את אחת הנקודות c_i הוא משתנה ב־± 2 (הסבירו למה!). לכן הוא תמיד מספר זוגי ואינו יכול לשנות סימן בלי להתאפס על קטע שלם מתוך הקטעים הנ"ל. זה אומר שעבור כל שני קטעים סמוכים מהקטעים הנ"ל השיפוע או אינו חיובי על שניהם או אינו שלילי על שניהם - כלומר, או ש־f אינה יורדת או ש־f אינה עולה על האיחוד של שניהם. כיוון שמספר הפתרונות של $f(x) = 0$ הוא סופי, זה אומר על כל אחד מ־5 הקטעים $[c_1, c_3], [c_3, c_5], [c_5, c_7], [c_7, c_9], [c_9, c_{10}]$ יש לא יותר מפתרון אחד למשוואה $f(x) = 0$. זה אומר שמספר הפתרונות של $f(x) = 0$ קטן או שווה ל־5.

מצד שני, אם $a_1, \ldots, a_5$ הם $1, 4, 5, 8, 9$ ו־$a_6, \ldots, a_{10}$ הם $2, 3, 6, 7, 10$ אזי $m = 1$ ומספר הפתרונות של $f(x) = 0$ הוא בדיוק 5 (הסבירו למה!).

שאלה 6:

גלית ודליה משחקות במשחק הבא. הן קובעות בהסכמה זווית של X מעלות כאשר $0 < X < 180$. גלית מסמנת 100 נקודות במישור ואז דליה צריכה לחבר חלק מזוגות הנקודות ע"י קטעים ישרים לפי התנאים הבאים:

- צריך שיהיה ניתן להגיע מכל נקודה לכל נקודה אחרת דרך מסלול יחיד המורכב מקטעים שלמים שדליה ציירה (כשהולכים במסלול, עוברים כל אחד מקטעי המסלול רק פעם אחת).
- הזוויות בין כל שני קטעים סמוכים (כלומר, קטעים שיש להם נקודת קצה משותפת) צריכות להיות לפחות X מעלות.

אם דליה מצליחה במשימה היא מנצחת, ואם לא - גלית מנצחת. מהו הגודל המקסימלי של X שעבורו יש לדליה דרך המבטיחה ניצחון?

תשובה:

1) 15

2) $\frac{360}{1000}$

3) 90

4) 60

5) 30

6) 20

7) 10

8) 36

9) 15

10) 45

רעיון של פתרון:

התשובה היא $X=60^\circ$.

אם גלית מסמנת את הקוקדודים של משולש שווה צלעות ΔABC ועוד 97 נקודות על האנך האמצעי של A רחוק מאוד מ־A,B,C אזי אפשר לחבר את הנקודות כך שהזווית 60° תספיק ואי־אפשר לחבר אותן כך שכל הזוויות בין הקטעים הסמוכים במסלולים יהיו גדולות מ־60° (הסבירו למה!). זה אומר ש־$X\leq 60^\circ$.

נוכיח עכשיו ש־$X\geq 60^\circ$ - כלומר, שלא משנה אילו 100 נקודות גלית תסמן, דליה תמיד תוכל לחבר אותן על ידי קטעים ישרים כך שאפשר להגיע באמצעות הקטעים הללו מכל אחת מהנקודות לכל נקודה אחרת דרך מסלול יחיד והזווית בין כל שני קטעים סמוכים תהיה לפחות 60°.

ניקח את הנקודות שגלית סימנה. נמספר את הנקודות ואז נחבר את הנקודה הראשונה לשנייה, שנייה לשלישית, ..., הנקודה מספר 99 ל־נקודה מספר 100. נצבע את הקטעים הללו בכחול. ברור שבין כל שתי נקודות מסומנות יש מסלול יחיד המורכב מקטעים כחולים.

אם אחת מזוויות בין קטעים סמוכים קטנה מ־60°, נגיד הזווית $\angle ABC$ בין הקטעים הסמוכים AB ו־BC, אזי הזווית $\angle ABC$ אינה הזווית הגדולה ביותר במשולש ΔABC (הסבירו למה!) ולכן הצלע AC אינה הצלע הארוכה ביותר באותו משולש. במקרה כזה נצבע את הקטע AC בכחול (הוא לא היה כחול קודם) ונוריד את הצבע הכחול מהקטע היותר ארוך בין AB, BC. כך קיבלנו עוד פעם 99 קטעים ישרים כחולים שאפשר להגיע דרכם מכל נקודה מסומנת לכל נקודה אחרת דרך מסלול יחיד (הסבירו למה!), אך האורך הכולל של הקטעים הכחולים החדשים קטן מהאורך הכולל של הקטעים הכחולים הישנים.

נמשיך לצבוע ולהוריד צבע מהקטעים כנ"ל, כל עוד יש זוויות קטנות מ־60° בין קטעים כחולים סמוכים. התהליך יסתיים אחרי מספר סופי של צעדים, כי אחרי כל צעד האורך הכולל של 99 הקטעים הכחולים יורד ויש רק מספר סופי של קבוצות של 99 קטעים בין הנקודות המסומנות (השלימו את הפרטים!). לכן בסוף נקבל 99 קטעים ישרים כחולים בין הנקודות המסומנות שאפשר להגיע דרכם מכל נקודה מסומנת לכל נקודה אחרת דרך מסלול יחיד ובכל מסלול כזה הזווית בין כל שני קטעים סמוכים גדולה או שווה ל־60°. זה מראה ש־$X\geq 60^\circ$.

הוכחנו ש־$X\leq 60^\circ$ וגם $X\geq 60^\circ$. לכן $X=60^\circ$.

שאלה 7:

יש מספר אי־זוגי של תפוחים ו־100 קערות המסודרות במעגל על השולחן. יוסי וכפיר משחקים במשחק הבא. יוסי מחלק את התפוחים בין הקערות (יכול להיות שבקערות מסוימות הוא לא שם שום תפוחים). אחרי זה כפיר מחפש רצף של 12 קערות שמכילות ביחד מספר אי־זוגי של תפוחים. ליאור צפה במשחק וטוען בצדק שכפיר תמיד יוכל למצא לפחות X, אך לא בהכרח יותר מ־X, רצפים כאלה. מהו X?

תשובה:

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

5) 5

6) 10

7) 9

8) 12

9) 8

10) 6

רעיון של פתרון:

נראה שהתשובה היא $X = 4$.

נניח יוסי חילק את התפוחים בין הקערות באופן כלשהו. נמספר את הקערות בכיוון השעון.

נסמן את הרצף של 12 קערות (בכיוון השעון) המתחיל בקערה 1 והמסתיים בקערה 12. אחרי זה נסמן רצף של 12 קערות (בכיוון השעון) המתחיל בקערה 13. אחרי שנמשיך כך 25 פעמים נקבל רצף של 12 קערות המסתיים בקערה 100 - כי 25 הוא המספר השלם הקטן ביותר שהמכפלה שלו ב־12 מתחלקת ב־100 (השלימו את הפרטים!). זה אומר ש־25 רצפים של 12 קערות שסימנו מכילות כל תפוח $3 = \dfrac{25 \cdot 12}{100}$ פעמים. לכן המספר הכולל של התפוחים ב־25 רצפים הוא אי־זוגי (הוא כפולה של 3 במספר האי־זוגי של התפוחים שחולקו בין הקערות). זה אומר שלפחות אחד מהרצפים מכיל מספר אי־זוגי של תפוחים.

נעשה את מה שעשינו קודם שלוש פעמים נוספות כשבמקום קערה 1 אנו מתחילים בקערות מספר $2,3,4$. לפי הטיעון הנ"ל, נקבל עוד 3 רצפים של 12 קערות כך שבכל אחד מהרצפים הללו המספר הכולל של התפוחים הוא אי־זוגי. סה"כ קיבלנו 4 רצפים כאלה והם כולם שונים (הוכיחו את זה! ־ רמז: המחלק המשותף המרבי של 12 ו־100 הוא 4).

זה מראה שתמיד אפשר לבחור 4 רצפים כנדרש. לכן $X \leq 4$.

על מנת לראות ש־$X \geq 4$ נחלק את התפוחים בין הקערות באופן הבא. בקערות $1,\ldots,12$ נשים, בהתאמה, $1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0$ תפוחים. אחר כך נשים אותם מספרי התפוחים בקערות $13,\ldots,24$, וכן הלאה, ובסוף כנ"ל בקערות $85,\ldots,96$. בקערות $97,98,99,100$ נשים, בהתאמה, $1,0,0,0$ תפוחים. המספר הכולל של התפוחים בכל הקערות הוא $2\times 8+1=17$ - בפרט, אי־זוגי. מצד שני, יש רק 4 רצפים של 12 קערות שמכילות מספר אי־זוגי של תפוחים (הוכיחו את זה!).

לכן $X = 4$.

שאלה 8:

אבי מצייר ציורים שונים של 100 ישרים במישור. עבור כל ציור כזה הוא מחפש מצולע משוכלל במישור (בעל לפחות שלוש צלעות) שעל גבי צלעותיו נמצאות כמה שיותר נקודות חיתוך של הישרים ואז הוא רושם את מספר הנקודות הללו בפינקס שלו. מהו המספר המרבי שיכול להתקבל בצורה כזאת?

תשובה:

1) 100

2) 197

3) 200

4) 186

5) 300

6) 294

7) 2500

8) 324

9) 236

10) 172

רעיון של פתרון:

התשובה היא 197.
נניח שאבי צייר איזשהם 100 ישרים - בהמשך נקרא להם סתם "הישרים".
יהי P מצולע משוכלל שעל הצלעות שלו נמצאות נקודות החיתוך של הישרים.
תהי A קבוצת נקודות החיתוך של הישרים הנמצאות על הצלעות של P. נסמן את מספר הנקודות ב־A על ידי a.
חלק מהצלעות של P מוכלות בישרים וחלק לא. יהי x מספר הישרים שמכילות איזושהי צלע של P - את ישרים הללו נצבע באדום. בהתאם לכך, יש $100-x$ ישרים שלא מכילים אף צלע של P - נצבע אותם בכחול.
יש שלושה סוגי נקודות בקבוצה A:

סוג I:

המקודות הנמצאות על לפחות שני ישרים כחולים. נסמן את מספר הנקודות הללו על ידי T_1.

סוג II:

המקודות הנמצאות על לפחות שני ישרים אדומים. נסמן את מספר הנקודות הללו על ידי T_2.

סוג III:

המקודות הנמצאות על ישר איזשהו ישר אדום ואיזשהו ישר כחול. נסמן את מספר הנקודות הללו על ידי T_3.

שימו לב שיכול להיות שנקודה ב־A שייכת ליותר מסוג אחד - זה אומר ש־

$$a \leq T_1 + T_2 + T_3$$

נוסף לכך, נשים לב שכל ישר כחול מכיל לא יותר משתי נקודות של A (הסבירו למה!). נתבונן במקרים הבאים:

מקרה א' - $x = 0$:

במקרה כזה כל הנקודות ב־A הן מסוג I. כל 100 ישרים הם כחולים וכל ישר כחול מכיל לא יותר משתי נקודות ב־A, וכל נקודה ב־A מוכלת בלפחות שני ישרים כחולים. זה אומר

$$a \leq \frac{2 \times 100}{2} = 100$$

(הסבירו למה!).

מקרה ב' - $x = 1$:

כאן כל נקודה ב־A היא או מסוג I או מסוג III והיא נמצאת על איזשהו ישר כחול. מצד שני, על כל ישר כחול יש לא יותר מנקודה אחת מסוג III. לכן, במקרה כזה, $T_3 + 2T_1 \leq 2 \times 99$ (הסבירו למה!).

נוסף לכך, $T_3 \leq 99$ (כי יש 99 ישרים כחולים). לכן

$$2T_3 + 2T_1 \leq 3 \times 99$$

ומכאן

$$T_1 + T_3 \leq 3 \times 99/2 < 148.5$$

כיוון ש־$T_1 + T_3$ הוא מספר שלם, נקבל

$$a \leq T_1 + T_3 \leq 148$$

מקרה ג' - $2 \leq x \geq 99$:

במקרה כזה

$$2T_1 + T_3 \leq 2(100 - x)$$

(הסבירו למה!). לכן

$$T_1 + T_3 \leq 2(100 - x)$$

מספר הנקודות מסוג II אינו גדול מ־$(x-1)$ (הסבירו למה!). זה אומר ש־

$$a \leq T_1 + T_2 + T_3 \leq 2(100 - x) + (x - 1) = 199 - x \leq 197$$

מקרה ד' - $x = 100$**:**

במקרה כזה כל 100 ישרים אדומים (כלומר, הם הישרים המכילים את הצלעות של P). זה אומר ש־P בעל 100 קודקודים ו־100 צלעות, A היא קבוצת הקודקודים של P ו־$a = 100$.

סיכום: בכל ארבעת המקרים הנ"ל $a \leq 197$.

מצד שני, אבי יכול לצייר 100 ישרים באופן הבא: יהי $P = \Delta ABC$ מצולע שווה צלעות. אבי מצייר את הישרים AB ו־BC ועוד 98 ישרים המקבילים ל־AC, כך שכל אחד מהישרים הללו חוצה את כל אחת מהצלעות AB, BC בדיוק בנקודה אחת. מספר נקודות החיתוך של 100 הישרים הנמצאות על הצלעות של $P = \Delta ABC$ הוא $1 + 98 \times 2 = 197$.

זה אומר שהתשובה היא 197.

שאלה 9:

מביטים על קודקודי מצולע משוכלל עם 114 קודקודים. בוחרים k כיוונים של צלעות שלו וצובעים בכחול את כל האלכסונים והצלעות שלו המקבילים למי מ־k הכיוונים האלה. מהו ה־k הקטן ביותר שעבורו, לא משנה אילו k כיווני הצלעות בחרנו, תמיד נוכל למצא מסלול מכל קודקוד לכל קודקוד אשר משתמש רק באלכסונים והצלעות שצבענו אותם בכחול לפי אותה הבחירה?

תשובה:

1) 2

2) 3

3) 38

4) 6

5) 10

6) 57

7) 21

8) 18

9) 19

10) 20

רעיון של פתרון:

נוכיח שהתשובה היא 20.

נקרא למצולע שלנו P. נמספר את הקודקודים של P (בכיוון השעון) על ידי המספרים $0, 1, \dots, 113$.

שימו לב שאם A, B, C, D הם איזשהם קודקודים של P כך ש־$AB \parallel CD$, אזי לסכום המספרים של A, B ולסכום המספרים של C, D יש אותה שארית החילוק ב־114 (הוכיחו את זה!). זה אומר שלכל כיוון של צלע או של אלכסון של P מתאימה שארית מסויימת של החילוק ב־114.

נשים לב שאם AB הוא צלע של P, אזי מספרי הקודקודים A, B הם מספרים שלמים עוקבים. לכן הסכום שלהם הוא אי־זוגי וכך גם שארית החילוק של הסכום ב־114 (הסבירו למה!).

נניח שבחרנו k כיוונים של צלעות של P ויש קודקוד x של P שממנו אי־אפשר להגיע לכל קודקוד אחר דרך הצלעות והאלכסונים של P המקבילים לכיוונים שבחרנו.

תהי X קבוצת הקודקודים של P אליהם כן אפשר להגיע מ־x באופן הנ"ל. נסמן על ידי $|X|$ מספר הקודקודים ב־X. אזי $|X| < 114$. יהי z הסכום הכולל של מספרי הקודקודים ב־X.

נסמן את שאריות החילוק ב־114 המתאימות ל־k הכיוונים הנ"ל על ידי

$$a_1 < \ldots < a_k$$

כיוון שמדובר בכיווני צלעות, כל a_i הוא מספר אי־זוגי ולפיכך כל ההפרשים $a_i - a_j$ הם מספרים זוגיים.

עבור כל $i = 1, \ldots, k$ ניתן לחלק את הקודקודים ב־X לזוגות כך ששארית החילוק ב־114 של סכום מספרי הקודקודים בכל זוג תהיה a_i. בפרט, זה אומר ש־$|X|$ זוגי. לכן עבור כל $i = 1, \ldots, k$ ל־$\dfrac{|X|}{2}a_i$ יש אותה שארית החילוק ב־114 כמו ל־z. זה גורר שעבור כל $j = 2, \ldots, k$ המספר $\dfrac{|X|}{2}(a_j - a_1)$ הוא כפולה של 114. כיוון שכל הפרש $a_j - a_1$ הוא זוגי, זה אומר שהמספר $\dfrac{|X|}{2}\dfrac{a_j - a_1}{2}$ הוא כפולה של 57.

יהי a המחלק המשותף המרבי של $\dfrac{|X|}{2}$ ו־57.

אם $a = 57$, אזי $|X| = 114$, בניגוד לאי־שיוויון $|X| < 114$ שנובע מההנחה שלנו. לכן $a < 57$. זה אומר ש־$a \leq 19$ - כי 19 הוא המחלק הגדול ביותר של 57 השונה מ־57.

עבור כל $j = 2, \ldots, k$ המספר $(a_j - a_1)/2$ (שהוא שלם, כי $a_j - a_1$ זוגי) הוא כפולה של $57/a$. לכן עבור כל $j = 2, \ldots, k$ המספר $(a_j - a_1)$, הנמצא בין 1 ל־113, הוא כפולה של $114/a$. זה אומר שיש לא יותר מ־$(a-1)$ מספרים שונים $(a_j - a_1)$ כאלה. מכאן נקבל שיש לא יותר מ־a מספרים $k, \ldots, 1$ - או, במילים אחרות, $k \leq a \leq 19$. לכן $k \leq 19$.

זה אומר שאילו היינו לוקחים $k = 20$ היינו מקבלים $|X| = 114$.

נראה עכשיו שעבור $k = 19$ יש דרך לבחור 19 כיוונים של צלעות של P כך שלא נוכל להגיע מכל קודקוד של P לכל קודקוד אחר באמצעות הצלעות והאלכסונים של P המקבילים לכיוונים הללו. אכן, נסמן כל צלע של P על ידי זוג המספרים - מספרי הקודקודים המחוברים על ידי הצלע. נבחר את הכיוונים של 19 צלעות הבאות:

$$(3,4), (6,7), (9,10), \ldots, (57,58)$$

אזי אפשר להגיע מקודקוד 0 רק לקודקודים ששארית החילוק של מספריהם ב־6 היא 0 או 1 (הוכיחו את זה!). בפרט לא נוכל להגיע מקודקוד 0 לקודקוד 2.

זה אומר שהתשובה היא 20.