

תחרות גרוסמן
שאלון לתלמידי תיכון

יום ו', כ"ב באלול תש"פ / 11 ספטמבר 2020, 10:00-13:00

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 9 שאלות. יש להגיש תשובות לכל התשובות דרך הטופס המקוון באתר התחרות.

2. אין אפשרות להגיש פתרונות או לשלוח תשובות או פתרונות בדוא"ל.

בהצלחה!

שאלה 1:

במשולש $\triangle ABC$ התיכון, חוצה הזווית והגובה היוצאים מהקודקוד B מחלקים את הזווית $\angle ABC$ לארבעה חלקים שווים. הזווית $\angle BAC$ היא הקטנה ביותר במשולש. מהי הזווית $\angle BCA$ (במעלות)?

תשובה:

60 (1)

61.5 (2)

63 (3)

63.5 (4)

65 (5)

65.5 (6)

67 (7)

67.5 (8)

68 (9)

68.5 (10)

שאלה 2:

נתונה טבלת משבצות בגודל 100×100 . בכל משבצת רשום מספר שלם אי-שלילי. אם במשבצת מסויימת רשום 0 אז בהכרח סכום כל המספרים בשורה והעמודה (יחד) של אותה משבצת הוא לפחות 100. מהו הסכום הקטן ביותר האפשרי של כל המספרים הרשומים בטבלה כזאת?

תשובה:

200 (1)

10000 (2)

20000 (3)

1000 (4)

2000 (5)

2500 (6)

5000 (7)

7500 (8)

500 (9)

100 (10)

שאלה 3:

ליאור אוהב תחרויות שחמט. הוא מנסה לברר האם יכולה להיות תחרות שחמט עם $x \geq 3$ שחקנים שבה כל אחד מהשחקנים שיחק נגד כל שחקן אחר בדיוק פעם אחת וכל אחד מהשחקנים קיבל חצי מהנקודות שלו במשחקים נגד שלושת השחקנים שזכו בשלושת המקומות האחרונים בתחרות. מהם הערכים האפשריים של x שעבורם יכולה להיות תחרות כזאת?

(דברי הסבר: משחק שחמט הוא משחק בין שני שחקנים; המנצח במשחק מקבל נקודה אחת והמפסיד 0 נקודות; אם יש תיקו, שניהם מקבלים חצי־נקודה. בסוף התחרות מדרגים את השחקנים לפי הנקודות שהם קיבלו וכך רואים מי זכה באיזה מקום. יכול להיות שכמה שחקנים קיבלו אותו מספר נקודות ואז בדירוג הסופי שמים אותם אחד אחרי שני בסדר סתמי כלשהו).

תשובה:

- (1) כל כפולה של 3 הגדולה מ-3
- (2) כל מספר שלם הגדול מ-5
- (3) אין ערכים אפשריים ל- x (כלומר, לא יכולה להיות תחרות כזאת)
- (4) כל הכפולות חיוביות של 6
- (5) 6
- (6) 6, 12 ו-18
- (7) 8
- (8) 12
- (9) 4 ו-9
- (10) 9

שאלה 4:

n תלמידים יושבים במעגל ($n \geq 3$). כל אחד מהתלמידים בוחר לעצמו מספר ממשי השונה מ-0 ו-1. אנו נאמר שהתלמידים בחרו את המספרים בצורה טובה אם מתקיים לכל אחד מהתלמידים שהמספר שהוא בחר שווה ל- $(1-a)(1-b)$ כאשר a ו- b הם המספרים שבחרו שני התלמידים שיושבים לידו מצד ימין ומצד שמאל. עבור אילו מן הערכים הבאים של n קיימות אינסוף אפשרויות שונות עבור התלמידים לבחור את המספרים בצורה טובה? (שתי אפשרויות הן שונות אם לפחות אחת מהתלמידים בוחר בהן מספרים שונים).

תשובה:

13 (1)

21 (2)

8 (3)

12 (4)

31 (5)

39 (6)

9 (7)

48 (8)

46 (9)

55 (10)

שאלה 5:

נתבונן בכל הקבוצות a_1, \dots, a_{10} של מספרים ממשיים שונים כך שלמשוואה

$$|x - a_1| + \dots + |x - a_5| = |x - a_6| + \dots + |x - a_{10}|$$

יש מספר סופי של פתרונות. מהו המספר המרבי האפשרי של פתרונות למשוואה כזו?

תשובה:

20 (1)

2 (2)

4 (3)

6 (4)

5 (5)

7 (6)

8 (7)

12 (8)

3 (9)

10 (10)

שאלה 6:

גלית ודליה משחקות במשחק הבא. הן קובעות בהסכמה זווית של X מעלות כאשר $0 < X < 180$. גלית מסמנת 100 נקודות במישור ואז דליה צריכה לחבר חלק מזוגות הנקודות ע"י קטעים ישרים לפי התנאים הבאים:

• צריך שיהיה ניתן להגיע מכל נקודה לכל נקודה אחרת דרך מסלול יחיד המורכב מקטעים שלמים שדליה ציירה (כשהולכים במסלול, עוברים כל אחד מקטעי המסלול רק פעם אחת).

• הזוויות בין כל שני קטעים סמוכים (כלומר, קטעים שיש להם נקודת קצה משותפת) צריכות להיות לפחות X מעלות.

אם דליה מצליחה במשימה היא מנצחת, ואם לא - גלית מנצחת. מהו הגודל המקסימלי של X שעבורו יש לדליה דרך המבטיחה ניצחון?

תשובה:

15 (1)

$\frac{360}{1000}$ (2)

90 (3)

60 (4)

30 (5)

20 (6)

10 (7)

36 (8)

15 (9)

45 (10)

שאלה 7:

יש מספר אי-זוגי של תפוחים ו-100 קערות המסודרות במעגל על השולחן. יוסי וכפיר משחקים במשחק הבא. יוסי מחלק את התפוחים בין הקערות (יכול להיות שבקערות מסוימות הוא לא שם שום תפוחים). אחרי זה כפיר מחפש רצף של 12 קערות שמכילות ביחד מספר אי-זוגי של תפוחים. ליאור צפה במשחק וטוען בצדק שכפיר תמיד יוכל למצא לפחות X , אך לא בהכרח יותר מ- X , רצפים כאלה. מהו X ?

תשובה:

1 (1)

2 (2)

3 (3)

4 (4)

5 (5)

10 (6)

9 (7)

12 (8)

8 (9)

6 (10)

שאלה 8:

אבי מצייר ציורים שונים של 100 ישרים במישור. עבור כל ציור כזה הוא מחפש מצולע משוכלל במישור (בעל לפחות שלוש צלעות) שעל גבי צלעותיו נמצאות כמה שיותר נקודות חיתוך של הישרים ואז הוא רושם את מספר הנקודות הללו בפינקס שלו. מהו המספר המרבי שיכול להתקבל בצורה כזאת?

תשובה:

100 (1)

197 (2)

200 (3)

186 (4)

300 (5)

294 (6)

2500 (7)

324 (8)

236 (9)

172 (10)

שאלה 9:

מביטים על קודקודי מצולע משוכלל עם 114 קודקודים. בוחרים k כיוונים של צלעות שלו וצובעים בכחול את כל האלכסונים והצלעות שלו המקבילים למי מ- k הכיוונים האלה. מהו ה- k הקטן ביותר שעבורו, לא משנה אילו k כיווני הצלעות בחרנו, תמיד נוכל למצא מסלול מכל קודקוד לכל קודקוד אשר משתמש רק באלכסונים והצלעות שצבענו אותם בכחול לפי אותה הבחירה?

תשובה:

2 (1)

3 (2)

38 (3)

6 (4)

10 (5)

57 (6)

21 (7)

18 (8)

19 (9)

20 (10)