ר ב ע ו ן ל מ ת מ ט י ק ה

ללמוד ולמחקר

בעריכת

דב ירדן

כרך 1

תש"ו—תש"ז

ירושלם

R I V E O N   L E M A T E M A T I K A

A Quarterly Journal

Intended to Promote Mathematical Research

Among Students of Mathematics

Dov Jarden

Editor

Volume 1

1946—1947

Jerusalem

רבעון למתמטיקה

ללמוד ולמחקר

בעריכת דב ירדן

כרך 1 | ירושלים, תמוז תש"ו, יוני 1946 | חוברת 1

תכן

כתבת המערכת: דב ירדן, מלאכי 20, ירושלים

המחיר 200 מיל

צרוף דירכלה ותורת המספרים

דב ירדן ותאודור מוצקין

מושג צרוף דירכלה, הידוע בעקר מן האנליזה, נותן אפשרות להכניס אלגבציה גם בפרקים מסוימים של תורת המספרים האלמנטרית.

נתן בזה הרצאה קצרה של המושג הזה.

להלן יסמנו k,l,m,n תמיד מספרים טבעיים כלשהם.

בפונקציה ארתמטית נתכון לפונקציה $f(n)$, המקבלת ערך סופי מסוים לכל n טבעי.

<u>הגדרה.</u> צ ר ו ף ד י ר כ ל ה $q=f\wedge g$ של שתי פונקציות ארתמטיות f ו g היא הפונקציה הארתמטית q, שאצלה $q(n)$ היא סכום כל המכפלות $f(k)g(l)$, עם $kl=n$:

$$f(n)\wedge g(n)=\sum_{kl=n} f(k)g(l)=\sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

ברור כי

$$f(n)\wedge g(n)=g(n)\wedge f(n),$$

זאת אומרת, צ ר ו ף ד י ר כ ל ה ה ו א ח ל ו פ י (ק ו מ ו ט ט י ב י).

כמו כן קל לראות כי

$$(f(n)\wedge g(n))\wedge h(n)=\Big(\sum_{kl=n} f(k)g(l)\Big)\wedge h(n)=\sum_{jm=n}\Big(\sum_{kl=j} f(k)g(l)\Big)h(m)$$

$$=\sum_{klm=n} f(k)g(l)h(m)=\sum_{jk=n} f(k)\sum_{lm=j} g(l)h(m)=f(n)\wedge(g(n)\wedge h(n)),$$

זאת אומרת, צרוף דירכלה הוא קבוצי (אסוציאטיבי).

<u>הגדרה.</u> י ח י ד ת ד י ר כ ל ה $\delta(n)$ היא פונקציה ארתמטית, שצרוף דירכלה שלה בפונקציה ארתמטית איזו שהיא משאירה את האחרונה בלי שנוי, זאת אומרת,

$$\delta(n)\wedge f(n)=f(n).$$

<u>הגדרה.</u> ה פ ו ך ד י ר כ ל ה $f'(n)$ של פונקציה ארתמטית $f(n)$ היא פונקציה ארתמטית, שצרוף דירכלה שלה בפונקציה הנתונה שוה ליחידת דירכלה, זאת אומרת,

$$f'(n)\wedge f(n)=\delta(n).$$

<u>משפט 1.</u> יחידת דירכלה היא פונקציה $\delta(n)$, השוה ל 1 כאשר $n=1$, ושוה ל 0 כאשר $n\neq 1$.

<u>הוכחה.</u> תהי $f(n)$ פונקציה ארתמטית איזו שהיא, הממלאה את התנאי $f(1)\neq 0$. בהתאם להגדרות יהיה $\delta(1)f(1)=f(1)$, זאת אומרת, $\delta(1)=1$. נניח כי הוכחנו כבר את הטענה לכל מספר טבעי הקטן מ n. נוכיחה גם ל n. באמת, יהיו $1,d,\dots,n$ מחלקי n. נקבל:

$$\delta(1)f(n)+\delta(d)f(n/d)+\dots+\delta(n)f(1)=f(n).$$

מכאן, בשים לב לכך כי $\delta(1)=1$ וכי $\delta(x)=0$, לכל x המחלק ל n וקטן מ n, נקבל $\delta(n)f(1)=0$, ומכאן $\delta(n)=0$. הטענה מוכחת אפוא גם ל n והמשפט קים בכללו לכל פונקציה $f(n)$, הממלאת את התנאי $f(1)\neq 0$. אך הפונקציה $\delta(n)$ המתוארת במשפט 1 מתאימה בעליל גם למקרה $f(1)=0$. והואיל ו $\delta(n)$ צריכה, לפי הגדרתה, להיות פונקציה אוניברסלית, זאת אומרת, מתאימה לכל הפונקציות $f(n)$, לפיכך היא הפונקציה $\delta(n)$ המתוארת במשפט 1.

<u>משפט 2.</u> לכל פונקציה ארתמטית $f(n)$, הממלאה את התנאי $f(1)\neq 0$, קים הפוך דירכלה י ח י ד $f'(n)$, וקים:

$$f'(1)=1/f(1),\qquad f'(p)=-f(p)/f^2(1),$$

לכל מספר ראשוני p.

הוכחה. הפונקציה $f'(n)$ נקבעת, לפי משפט 1, בשביל $n=1$ על ידי התנאי $f'(1)f(1)=1$; מכאן $f'(1)=1/f(1)$. בשביל כל מספר ראשוני p על ידי התנאי $f'(1)f(p)+f'(p)f(1)=0$; מכאן, בשים לב לכך כי $f'(1)=1/f(1)$, נקבל: $f'(p)=-f(p)/f^2(1)$. נניח כי הוכחנו כבר את הטענה לכל מספר טבעי הקטן מ n. נוכיחה גם ל n. באמת, יהיו $1,d,\dots,n$ מחלקי n. נקבל:

$$f'(1)f(n)+f'(d)f(n/d)+\dots+f'(n)f(1)=0,$$

או

$$f'(n)=-(f'(1)f(n)+f'(d)f(n/d)+\dots)/f(1).$$

הפונקציה $f'(x)$ קבועה כבר לכל ערך x הקטן מ n, ובכן מובעת $f'(n)$ על ידי השויון האחרון כפונקציה רציונלית של ערכים שנקבעו, ולפיכך אף היא נקבעת. הטענה מוכחת אפוא גם ל n והמשפט קים בכללו.

בפרט, אם $f(1)=\pm1$, נקבל:

משפט 3. לכל פונקציה ארתמטית $f(n)$, הממלאה את התנאי $f(1)=\pm1$, קים הפוך דירכלה אחד ויחיד $f'(n)$, וקים:

$$f'(1)=\pm1, \quad f'(p)=-f(p),$$

לכל מספר ראשוני p.

מן ההוכחה למשפט 2 יוצא גם:

משפט 4. אם $f(n)$ היא פונקציה ארתמטית שלמה (לאמר, המקבלת ערכים שלמים לכל ארגומנט טבעי n), הממלאה את התנאי $f(1)=\pm1$, גם הפוך דירכלה שלה $f'(n)$ הוא פונקציה ארתמטית שלמה, הממלאה את התנאי $f'(1)=\pm1$, בהתאמה.

אם $f(n)$ שלמה אי-שלילית ו $f(1)=\pm1$, גם $f'(n)$ שלמה אי-שלילית ו $f'(1)=\pm1$, בהתאמה.

מסקנות המשפטים הקודמים נותנות:

משפט 5. קבוצת כל הפונקציות הארתמטיות $f(n)$, הממלאות את התנאי $f(1)\neq0$, מהוה חבורה חלופית לגבי צרוף דירכלה.

אם מתנים $f(1)=\pm1$ או $f(1)=1$, או אם דורשים מ f להיות פונקציה שלמה או שלמה אי-שלילית, מקבלים חבורות חלקיות.

בפרט ממלאות את התנאי $f(1)=1$ הפונקציות הכפליות (המולטיפליקטיביות), החשובות כל כך בתורת המספרים. בשם פונקציה כפלית קוראים לפונקציה ארתמטית $f(n)$, הממלאה את התנאים: $f(1)=1$ ו $f(mn)=f(m)f(n)$, אם $(m,n)=1$.

ממשפט 1 יוצא מיד:

משפט 6. יחידת דירכלה $\delta(n)$ היא פונקציה כפלית שלמה אי-שלילית.

משפט 7. צרוף דירכלה של שתי פונקציות כפליות הוא פונקציה כפלית, זאת אומרת, אם $f(x)$ ו $g(x)$ הן פונקציות כפליות ו $(m,n)=1$, יהיה:

$$f(mn)\wedge g(mn)=(f(m)\wedge g(m))(f(n)\wedge g(n)).$$

הוכחה. אם μ עובר על כל המחלקים של m ו ν עובר על כל המחלקים של n, יעבור $\mu\nu$ על כל המחלקים של mn, ולפי ש $(m,n)=1$, יתקבל כל מחלק של mn בדיוק פעם אחת, ומאותה סבה יהיה תמיד גם $(\mu,\nu)=1$. מכאן:

$$\begin{aligned} h(mn)=f(mn)\wedge g(mn) &= \sum_{\mu\nu\mid mn} f(\mu\nu)g(mn/\mu\nu) \\ &= \sum_{\mu\mid m,\,\nu\mid n} f(\mu)f(\nu)g(m/\mu)g(n/\nu) \\ &= \sum_{\mu\mid m} f(\mu)g(m/\mu)\sum_{\nu\mid n} f(\nu)g(n/\nu) \\ &= (f(m)\wedge g(m))(f(n)\wedge g(n))=h(m)h(n), \end{aligned}$$

הגדרה. בשם ערכים ראשיים של פונקציה ארתמטית $f(n)$ נקרא לערכי $f(n)$ בשביל כל ערך n שהוא חזקה טבעית של מספר ראשוני.

מהגדרה זו והגדרת הפונקציה הכפלית יוצא מיד:

<u>משפט 8</u>. לכל מערכת שלמה של ערכים ראשיים קימת פונקציה כפלית *אחת ויחידה* $f(n)$ שהיא בעלת ערכים ראשיים אלה. הפונקציה $f(n)$ בנויה כך, שאם $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ הוא הפרוק הקנוני של n, יהיה $f(n)=f(p_1^{\alpha_1})\dots f(p_k^{\alpha_k})$.

<u>משפט 9</u>. הפוך דירכלה של פונקציה כפלית הוא פונקציה כפלית.

<u>הוכחה</u>. תהי $f(n)$ פונקציה כפלית ויהי $f'(n)$ הפוך דירכלה של $f(n)$. נבנה עכשיו פונקציה כפלית מסוימת $g(n)$ ונוכיח כי $g(n)$ היא הפוך דירכלה של $f(n)$. מכאן יצא כי $g(n)$ מזדהה עם $f'(n)$, כי לפי משפט 2 יש לפונקציה כפלית רק הפוך אחד. את הפונקציה $g(n)$ נקבע לפי משפט 8 על ידי הערכים הראשיים של $f'(n)$. הפונקציה $f(n)\wedge g(n)$ תהיה אפוא, לפי משפט 7, פונקציה כפלית ותלכד, לפי הגדרתה, עם יחידת דירכלה לכל ערך n שהוא חזקת מספר ראשוני, ולכן לפי משפט 8, בכלל. מכאן, $g(n)$ היא הפוך של $f(n)$ ו $g(n)$ היא פונקציה כפלית. לכן $g(n)=f'(n)$ ו $f'(n)$ היא פונקציה כפלית.

ממשפט 3 ו 9 נובע מיד:

<u>משפט 10</u>. בשביל הפוך דירכלה $f'(n)$ של פונקציה כפלית $f(n)$ קים:

$$f'(1)=1,\quad f'(m)=(-1)^{\nu}f(m),\ .$$

לכל מספר m, המרכב מ-ν *גורמים ראשוניים שונים* בלבד.

<u>משפט 11</u>. קבוצת כל הפונקציות הכפליות מהוה חבורה חלופית לגבי צרוף דירכלה. חבורה זו היא חבורה חלקית של חבורת כל הפונקציות הארתמטיות $f(n)$, הממלאות את התנאי $f(1)=1$.

אם דורשים מן הפונקציות הכפליות להיות שלמות או שלמות אי-שליליות, מקבלים חבורות חלקיות.

<u>משפט 12</u>. הכפול הרגיל הוא פלוגי (דסטריבוטיבי) לגבי צרוף דירכלה של פונקציות כפליות, זאת אומרת, אם $f(n)$, $g(n)$ ו $h(n)$ הן פונקציות כפליות, יהיה:

$$f(n)(g(n)\wedge h(n))=(f(n)g(n))\wedge(f(n)h(n)).$$

<u>הוכחה</u>.

$$f(n)(g(n)\wedge h(n))=f(n)\sum_{d|n}g(d)h(n/d)=f(d)f(n/d)\sum_{d|n}g(d)h(n/d)$$
$$=\sum_{d|n}f(d)g(d)f(n/d)h(n/d)=(f(n)g(n))\wedge(f(n)h(n)).$$

צרוף המשפטים הקודמים נותן את *המשפט היסודי* הבא:

<u>משפט 13</u>. קבוצת כל הפונקציות הכפליות מהוה *חוג חלופי* לגבי צרוף דירכלה *כחבור* והכפול הרגיל ככפול החוג.

אם דורשים מן הפונקציות להיות שלמות או שלמות אי-שליליות, מקבלים חוגים חלקיים.

נעשה עכשו את התורה הכללית שמוש לפונקציות כפליות מיוחדות.

<u>הגדרה</u>. לפונקציה השוה ל 1 בשביל כל n, נקרא *היחידה הרגילה* ונציין אותה בקצור ב 1. היא כמובן פונקציה כפלית.

נעין עתה *בהפוך דירכלה* $\mu(n)$ של *היחידה הרגילה*. לפי משפט 9 נקבל:

<u>משפט 14</u>. $\mu(n)$ היא פונקציה כפלית.

<u>משפט 15</u>.
$$\sum_{d|n}\mu(d)=0,\quad (n>1).$$

<u>הוכחה</u>. נעתיק את הנוסחה לכתיב דירכלה:

$$1^\wedge\mu(n)=0 \qquad (n>1),$$

וזה ברור על סמך הגדרות הפונקציה μ ומשפט 1.

משפט 16. $\mu(n)$ היא פ ו נ ק צ י ת מ ב י ו ס , השוה ל 1 בשביל $n=1$; ל 0, בשביל כל n המתחלק ברבוע של מספר ראשוני; ל $(-1)^\nu$, בשביל כל n המתפרק לגורמים ראשוניים שונים בלבד, באשר ν הוא מספר הגורמים הראשוניים.

הוכחה. לפי משפט 10 ו 14 יהיה: $\mu(1)=1$, $\mu(pq\ldots r)=(-1)^\nu$, באשר $p,q,\ldots,r$ הם מספרים ראשוניים שונים ו ν הוא מספרם. בכדי להוכיח ש $\mu(n)=0$, אם n מתחלק ברבוע של מספר ראשוני, נשים לב כי, בגלל הכפליות של $\mu(n)$, די לחשב את $\mu(n)$ כש n היא חזקת מספר ראשוני: $n=p^\alpha$. אם $\alpha=2$, נקבל: $\mu(1)+\mu(p)+\mu(p^2)=0$, מכאן $\mu(p^2)=0$, ובאנדוקציה לכל חזקה גבוהה יותר.

הפונקציה μ מופיעה לאור המושג צרוף דירכלה באפן טבעי לגמרי, כהפוך היחידה הרגילה, לא באפן מלאכותי, כמו שהיא לפי הגדרתה הרגילה בתורת המספרים.

משפט 17. (הפוך פונקציות ארתמטיות).

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d) \quad \text{אם ורק אם} \quad g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(n/d).$$

הוכחה. נעתיק את הנוסחות לכתיב דירכלה מקוצר:

$$f=1^\wedge g \quad \text{אם ורק אם} \quad g=1^\wedge f.$$

משפט אחרון זה מתקבל, אם מצרפים לפי דירכלה את שני האגפים של השויון השמאלי ב μ, ואת שני האגפים של השויון הימני ב 1.

הגדרה. נסמן ב $\varphi(n)$ את צרוף דירכלה

$$\varphi(n)=\mu(n)^\wedge n,$$

באשר ב n נבין פונקציה השוה תמיד לארגומנט שלה.

הואיל וברור כי n היא פונקציה כפלית, לפיכך נקבל לפי משפט 7 ו 14:

משפט 18. $\varphi(n)$ היא פונקציה כפלית.

מהגדרת φ נקבל מיד על סמך משפט 17:

משפט 19.

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n.$$

משפט 20. $\varphi(n)$ היא פ ו נ ק צ י ת א ו י ל ר , המסמנת את מספר המספרים הטבעיים שאינם עולים על n וזרים ל n.

הוכחה. בגלל הכפליות של $\varphi(n)$ ושל פונקצית אוילר (הנובעת בנקל על סמך הגדרתה מתוך משפטי-התחלקות פשוטים) די, לפי משפט 8, לחשב את $\varphi(n)$ כש n הוא חזקת מספר ראשוני. ברצוננו להוכיח כי

$$\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$$

ובאמת, מתוך הגדרת הפונקציה φ ומשפט 16 יוצא:

$$\varphi(p^\alpha)=\mu(p^\alpha)^\wedge n=\sum_{d|p}\mu(d)(p^\alpha/d)=p^\alpha-p^{\alpha-1}.$$

הגדרה.

$$\sigma_x(n)=1^\wedge n .$$

על סמך משפט 7 נקבל:

משפט 21. σ_x היא פונקציה כפלית.

על סמך משפט 17 נקבל:

<u>משפט 22.</u>

$$\sum_{d|n}\mu(d)\sigma_\alpha(n/d)=n^\alpha.$$

מתוך הגדרת σ_α יוצא מיד:

<u>משפט 23.</u> $\sigma_\alpha(n)$ שוה לסכום חזקות α של מחלקי n. ובפרט $\tau(n)=\sigma_0(n)=1\wedge 1$ שוה למספר המחלקים ו $\sigma(n)=\sigma_1(n)=1\wedge n$ שוה לסכום המחלקים של n.

את הנצול המכסימלי של משפט 7 נקבל, אם נתאר את הארגומנט בצורתו הקנונית כמכפלת חזקות של מספרים ראשוניים שונים. אז נקבל:

<u>משפט 24.</u> אם $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ הוא הפרוק הקנוני של n ו $f(n)$ ו $g(n)$ הן פונקציות כפליות, יהיה:

$$f(n)\wedge g(n)=(f(p_1^{\alpha_1})\wedge g(p_1^{\alpha_1}))(f(p_2^{\alpha_2})\wedge g(p_2^{\alpha_2}))\dots(f(p_k^{\alpha_k})\wedge g(p_k^{\alpha_k})).$$

או, בכתיב רגיל:

$$\sum_{d|n}f(d)g(n/d)=(g(p_1^{\alpha_1})+f(p_1)g(p_1^{\alpha_1-1})+\dots+f(p_1^{\alpha_1}))\dots$$

$$(g(p_k^{\alpha_k})+f(p_k)g(p_k^{\alpha_k-1})+\dots+f(p_k^{\alpha_k})).$$

בפרט, אם $g(n)=1$, נקבל:

<u>משפט 25.</u>

$$\sum_{d|n}f(d)=(1+f(p_1)+f(p_1^2)+\dots+f(p_1^{\alpha_1}))\dots(1+f(p_k)+f(p_k^2)+\dots+f(p_k^{\alpha_k})).$$

בפרט, אם $f(d)=d^\alpha$, נקבל:

<u>משפט 26.</u>

$$\sum_{d|n}d^\alpha=(1+p_1^\alpha+p_1^{2\alpha}+\dots+p_1^{\alpha_1\alpha})\dots(1+p_k^\alpha+p_k^{2\alpha}+\dots+p_k^{\alpha_k\alpha})$$

$$=((p_1^{\alpha_1\alpha+1}-1)/(p_1-1))\dots((p_k^{\alpha_k\alpha+1}-1)/(p_k-1)).$$

וכש $\alpha=0$, זאת אומרת, בשביל מספר המחלקים של n:

<u>משפט 27.</u>

$$\sum_{d|n}1=(\alpha_1+1)\dots(\alpha_k+1).$$

וכש $\alpha=1$, זאת אומרת, בשביל סכום המחלקים של n:

<u>משפט 28.</u>

$$\sum_{d|n}d=(1+p\ +p_1^2+\dots+p_1^{\alpha_1})\dots(1+p_k+p_k^2+\dots+p_k^{\alpha_k})$$

$$=((p_1^{\alpha_1+1}-1)/(p_1-1)\dots((p_k^{\alpha_k+1}-1)/(p_k-1)).$$

אם נפתח את הסוגרים בהצגה הראשונה, נקבל את כל מחלקי n.

<u>הגדרה.</u> פונקצית ליוביל $\lambda(n)$ היא פונקציה ארתמטית, המגדרת כדלקמן:

1) $\lambda(1)=1$.

2) אם n הוא מספר טבעי גדול מ 1 המתפתח לגורמים ראשוניים

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

נשים:

$$\lambda(n)=(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k}.$$

ברור המשפט:

משפט 29. $\lambda(n)$ היא פונקציה כפלית.

נסתכל בפונקציה

$$k(n)=1\,\hat{}\,\lambda(n).$$

לפי משפט 17 נקבל:

משפט 30.

$$\lambda(n)=\mu(n)\,\hat{}\,k(n).$$

מהגדרת k נקבל לפי משפט 7 ו 29:

משפט 31. $k(n)$ היא פונקציה כפלית.

משפט 32. $k(n)$ שוה ל 1 בשביל n רבועי ושוה ל 0 בשביל n שאינו רבוע.

הוכחה. בגלל הכפליות של k ובשים לב לעובדה כי מכפלת יחידות היא יחידה ומכפלת אפסים היא אפס, די לחשב את $k(n)$ בשביל $n=p^\alpha$, באשר p ראשוני ו α טבעי. אז יהיה:

$$k(p^\alpha)=\sum_{d|p^\alpha}\lambda(d)=\lambda(1)+\lambda(p)+\lambda(p^2)+\dots+\lambda(p^{\alpha-1})+\lambda(p^\alpha).$$

אם p^α רבוע, יהיה α זוגי, ונקבל:

$$k(p^\alpha)= +(-1+1)+\dots+(-1+1)=1.$$

אם p אינו רבוע, יהיה α אי-זוגי, ונקבל בסכום 0.

נטפל עכשו בפונקציה לא-כפלית אחת $\Lambda(n)$, שיש לה חשיבות בתורת המספרים האנליטית.

הגדרה.

$$\Lambda(n)=\mu(n)\,\hat{}\,\log n.$$

לפי משפט 17 נקבל:

משפט 33.

$$\log n=\sum_{d|n}\Lambda(d).$$

משפט 34.

$$\Lambda(n)=-\sum_{d|n}\mu(d)\log d.$$

הוכחה. לפי ההגדרה

$$\Lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\log(n/d)=\sum_{d|n}\mu(d)(\log n-\log d)$$
$$=\log n\sum_{d|n}\mu(d)-\sum_{d|n}\mu(d)\log d.$$

ואולם, $\log n\sum_{d|n}\mu(d)=0$, כי, כאשר $n=1$, $\log n=0$, וכאשר $n>1$, לפי משפט 15, $\sum_{d|n}\mu(d)=0$, והוכחנו את המשפט.

משפט 35.

$$-\mu(n)\log n=\mu(n)\,{}^\wedge\Lambda(n).$$

הוכחה. נציין $-\mu(n)\log n=f(n)$, אז יהיה, לפי משפט 17:

$$\Lambda(n)=1\,{}^\wedge f(n).$$

מכאן

$$\mu\,{}^\wedge\Lambda=f=-\mu\log,$$

מה שהיה להוכיח.

משפט 36.

$$\Lambda(n)=\log p \qquad (n=p^m),$$
$$\Lambda(n)=0 \qquad (n\neq p^m),$$

באשר p הוא מספר ראשוני ו m מספר טבעי.

הוכחה. לפי משפט 16 ו 34 והנמוקים למשפט 34 די להסתכל במחלקים $d\neq 1$, המכילים רק גורמים ראשוניים שונים. החלק הראשון יוצא כרגע. לשם הוכחת החלק השני נשים אל לב כי לפי משפט 34 יתפתח $\Lambda(n)$, כאשר n מרכב מגורמים ראשוניים בלבד, לסכום אלגברי של לוגריתמים של הגורמים הראשוניים של n, ויש להוכיח כי לוגריתמים של אותם הגורמים הראשוניים מופיעים בסמני + ו — במספר שוה. יהיו אפוא p ו q שני גורמים ראשוניים של n. מחלקי n המכילים את p מתחלקים לשתי קבוצות: א) כאלה המכילים את q וב) כאלה שאינם מכילים את q. שתי הקבוצות שקולות, כי על ידי כפול ב q עוברים מן הקבוצה השניה לראשונה, ועל ידי חלוק ב q — מן הראשונה לשניה. ואולם, בהתאם לתכונות הפונקציה μ, יתאימו לזוג מחלקים המכילים את p, שאחד מהם מכיל את q והשני לא, זוג מחוברים בפתוח של $\Lambda(n)$ לפי מחלקים של n בסימנים מנוגדים, וביחס לגורם p נקבל מזוג מחלקים זה $\log p - \log p = 0$.

הערה. ממשפט 36 יוצא בפרט $\Lambda(1)=0$, ומכאן יוצא כי $\Lambda(n)$ א י נ ה פונקציה כפלית.

מערכות שטחי המשולשים הכדוריים המתאימים לפנות הארבעון

דב ירדן

נשאל כאן בשאלה: מהן, בהשואה לשטחית כדור, המערכות השונות של שטחי משולשים כדוריים, הנגזרים על ידי פנות הארבעון, אם דרך כל אחד מקדקדיהן רושמים כדור בעל רדיוס קבוע. לשטח המשולש הכדורי המתאים לפנת ארבעון נקרא גם ת כ ו ל ת הפנה, ובהתאם לכך אם השטח המדובר קטן משטחית כדור, שוה לה, או גדול ממנה, נדבר על פנה חדה-לתכולה, ישרה-לתכולה, או קהה-לתכולה. נציין, כי שתי פנות שות-לתכולה אינן מחויבות להיות חופפות.

השאלה המוצגת תלויה בשאלה הבאה: כמה בכלל פנות בארבעון יכולות להיות אי-חדות-לתכולה? מצד אחד ידוע כי בכל ארבעון מרחבי יש לפחות פנה אחת שכל שלש זויותיה המישוריות חדות. פנה כזו היא בהכרח חדה-לתכולה. לפי זה יוצא כי בארבעון מרחבי יש ל כ ל ה י ו ת ר שלש פנות אי-חדות-לתכולה. אנו נצא מן ההשערה הבאה:

השערה. בכל ארבעון יש לכל היותר ש ת י פנות אי-חדות-לתכולה.

אם השערה זו נכונה, יש בארבעון 6 מערכות של פנות חדות, ישרות או קהות לתכולה, והן: 1) כל הפנות חדות. 2) פנה אחת ישרה. 3) פנה אחת קהה. 4) 2 פנות ישרות. 5) פנה אחת ישרה ואחת קהה. 6) 2 פנות קהות. קל למצוא דוגמות ל 3 המערכות הראשונות. נראה אפוא רק שקימות 3 המערכות האחרונות.

דוגמה לארבעון בעל שתי פנות ישרות-לתכולה או שתי פנות קהות-לתכולה.

על בסיס משותף נבנה שני משולשים שוי-שוקים קהי-זוית חופפים. נקרב את המשולשים זה לזה על ידי סבוב סביב הבסיס המשותף. הזויות המישוריות, המתקבלות על יד המקצוע, המחבר את קדקדי הזויות הקהות במשולשים הנתונים שואפות לישרות. הואיל והזוית המישורית השלישית קהה, נגיע בהדרגה למצב שבו תכולות הפנות שוות לשטחית כדור (פנות ישרות-לתכולה), ועל ידי המשך הסבוב כדי ε גם לפנות קהות-לתכולה.

דוגמה לארבעון בעל פנה אחת ישרה-לתכולה ואחת קהה-לתכולה או שתי פנות קהות-לתכולה (זבולון שרכמן).

דרך הקדקד של משולש שוה-שוקים קהה-זוית נעביר אנך למישור המשולש ונתן לנקודה לנוע לאורך האנך כלפי הקדקד. נקבל את הדרוש כנ"ל.

על חזקות עם מעריכים טרנספיניטיים

יעקב לויצקי

חזקות טרנספיניטיות של חוגים הוגדרו תחילה ע"י R. Baer *). במאמר הנוכחי ידובר על תכונות אחדות של חזקות כאלו. ליתר נוחיות לא נטפל כאן בחוגים, אלא באגודות ובאידאלים של אגודות (ראה הגדרות ב §1), משום שדוקא אצל אגודות מתגלמת בפשטות יתרה מהותו של מושג החזקה הטרנס-פיניטית. אך מסקנות המאמר הזה כוחן יפה גם בשביל חוגים. על שמושים אלגבריים אחדים במושג החזקה הטרנספיניטית ידובר במקום אחר.

§1. אגודות. הגדרות ומושגי-יסוד.

בסעיף הנוכחי יובאו מושגי-יסוד אחדים הקשורים במושג האגודה. נשתמש במונח הקצר אגודה במקום קבוצה כפלית (= חבורה למחצה).

הגדרה א. אגודה הנה קבוצת אברים S בה מוגדרת פעולה הנקראת כפל המצטינת בשלוש התכונות הבאות: 1) לזוג מסודר של אברים a ו b מ S מותאם על ידי פעולה זו אבר יחיד c של הקבוצה S, הנקרא מכפלת a ב b. סמון: $c=ab$. 2) קים החוק האסוציאטיבי, דהיינו: $(ab)c=a(bc)$. 3) קים ב S אבר 0 (אפס) המקים את התנאי $0a=a0=0$ בשביל כל a מ S.

הערה א. קל להוכח כי אין אבר שני בקבוצה S השונה מ 0 והמקים אף הוא את התנאי 3.

הערה ב. התנאי לקיום האפס אינו הכרחי, אך יש בו משום נוחיות. אין זה גם תנאי חריף ביותר, כי כל קבוצה המקימת את שתי הדרישות הראשונות שבהגדרת האגודה אך לא את הדרישה השלישית אפשר להפוך לאגודה על ידי ספוח סמל יחיד לקבוצה אשר ישמש כאפס.

הערה ג. אין אנו מתנים את קיומו של החוק הקומוטטיבי.

הגדרה ב. קבוצה חלקית T של אגודה S תקרא בשם אגודה חלקית של S, אם T הנה אגודה לגבי הפעולה המוגדרת ב S.

הגדרה ג. קבוצה חלקית A של אגודה S תקרא בשם אידאל ב S, אם מתקימים התנאים הבאים: יהי a אבר רצוני מ A ו s אבר רצוני מ S (בקצור: $a\in A$, $s\in S$), אז $as\in A$, $sa\in A$.

הערה א. כל אידאל ב S הנהו אגודה חלקית של S, אך אגודה חלקית של S אינה בהכרח אידאל ב S.

הערה ב. האגודה S עצמה הנה אידאל המכיל את כל האידאלים של האגודה (האידאל המקסימלי של האגודה). האפס לבדו מהוה אף הוא אידאל המוכל כקבוצה חלקית בכל אידאל של האגודה (האידאל המינימלי של האגודה).

הגדרה ד. לאגודה S אפשר להתאים בעזרת אידאל A אגודה חדשה S' בעזרת הקביעות הבאות: 1) הקבוצה S' מכילה את כל אברי S אשר אינם נמצאים ב A ונוסף לאלה סמל O'. 2) אם $b\in S'$, אז $bO'=O'b=O'$. 3) אם $b\in S-A$, $c\in S-A$ (הקבוצה $S-A$ הנה קבוצת אברי S שאינם נמצאים ב A) ואם $bc\in A$, אז נגדיר את כפולת b ב c בקבוצה S' ע"י השויון $bc=O'$. ואם $ab=d$, ו $d\notin A$, אז נגדיר גם ב S' את מכפלת b ב c על ידי השויון $bc=d$, קל להוכח כי S' מהוה על סמך קביעות אלו אגודה, הנקראת אגודת המנה של S לגבי A. סמון: $S'=S/A$.**)

הגדרה ה. נסמן ב T וב U שתי אגודות חלקיות של אגודה S. לקבוצה V של כל האברים ut באשר $u\in U$, $t\in T$ קוראים בשם מכפלת האגודה U באגודה T. סמון: $V=UT$.

הערה. באפן דומה מוגדרת מכפלת שלש אגודות ויותר. מכפלתן של אגודות חלקיות, בדרך כלל אינה מהוה אגודה חלקית, אך קל להוכח באמתות המשפט הבא:

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

*) R. Baer, Radical ideals, American Journal of Mathematics, vol. 65 (1943) pp. 537-568.

**) Rees, D. On semi-groups. Proc. Cambridge philos. Society, vol. 36, pp. 387-400 (1940).

מ ש פ ט א. מכפלתם של מספר סופי של אידאלים $A_1, A_2, \dots, A_s$, כלומר $A_1A_2\dots A_s$ אף היא אידאל באגודה S. בין המכפלה לבין הגורמים קימים היחסים הבאים:

$$A_1A_2\dots A_s \subseteq A_i \quad (i=1,2,\dots,s) \tag{1}$$

ה ע ר ה. במיוחד קים לגבי <u>החזקות הסופיות</u> של אידאל A היחס $A^r \subseteq A^s$ אם $r>s$ (r ו s מספרים טבעיים). <u>לגבי חזקות</u> סופיות של אידאלים קימים "כללי החזקות":

$$A^mA^n=A^{m+n}; \quad (A^m)^n=A^{mn} \tag{2}$$

כמו כן קל להוכח באמתות המשפטים הבאים:

מ ש פ ט ב. המשותף של קבוצה סופית או אין-סופית של אידאלים (כלומר: קבוצת כל אברי S הנמצאים בכל אחד מן האידאלים של הקבוצה) אף הוא אידאל.

סמון: לסמון המשותף נשתמש בסמל $|\dots,A,\dots|$ באשר A הוא אחד האידאלים של הקבוצה.

מ ש פ ט ג. קבוצת האחוד של קבוצה סופית או אין-סופית של אידאלים (ז"א: קבוצת כל אברי S הנמצאים לפחות באחד מן האידאלים של הקבוצה) אף הוא אידאל.

סמון: לסמון קבוצת האחוד נשתמש בסמל $(\dots,A,\dots)$ באשר A הוא אחד האידאלים של הקבוצה.

§2. החזקה הטרנספיניטית ותכונותיה היסודיות.

יהי A אידאל באגודה S, ו ρ מספר סודר רצוני. את החזקה A^ρ נגדיר בעזרת האינדוקציה הטרנספיניטית כדלקמן:

ה ג ד ר ה א. 1) בשביל $\rho=1$ נגדיר $A^1=A$. 2) יהי ρ מספר סודר <u>לא גבולי</u>, $1<\rho$, אז נגדיר $A^\rho=A^{\rho-1}A$. 3) יהי ρ מספר גבולי, אז נגדיר $A^\rho=|\dots,A^\sigma,\dots|$ באשר $\sigma<\rho$.

קל להוכח כי כל חזקה A^ρ היא אידאל ב S. כן נבסח בלי הוכחה את המשפט הבא *):

מ ש פ ט א. אם ρ ו σ הם מספרים סודרים ו $\rho<\sigma$, אז בשביל כל אידאל A באגודה S קים

$$A^\sigma \subseteq A^\rho \tag{3}$$

כללי החזקות (3) אינם נכונים בדרך כלל לגבי מעריכים טרנספיניטיים (ראה דוגמה ג ב §3.) אלא רק בחלקם, דהיינו:

מ ש פ ט ב. אם ρ ו σ הם מספרים סודרים רצוניים, אז קימים היחסים הבאים:

$$1)\ A^{\rho+\sigma} \supseteq A^\rho A^\sigma; \quad 2)\ A^{\rho\sigma} \supseteq (A^\rho)^\sigma \tag{4}$$

ה ו כ ח ה. את החלק הראשון של (4) נוכיח בעזרת האינדוקציה הטרנספיניטית לגבי σ. אם $\sigma=1$, אז הרי $A^{\rho+1}=A^\rho A$ (ראה §2, הגדרה א). אם $\rho+\sigma$ אינו מספר גבולי, כלומר: $\rho+\sigma=\rho+\gamma+1$, אז נקבל על סמך ההגדרה דלעיל ועל סמך הנחת האינדוקציה:

$$A^{\rho+\sigma}=A^{\rho+\gamma+1}=A^{\rho+\gamma}A \supseteq A^\rho A^\gamma A=A^\rho A^{\gamma+1}=A^\rho A^\sigma$$

אם $\rho+\sigma$ הוא מספר גבולי, יהיה (לפי ההגדרה הנ"ל) $A^{\rho+\sigma}=|\dots,A^\gamma,\dots|$ באשר $\gamma<\rho+\sigma$. קל להוכח כי $|\dots,A^\gamma,\dots|$ באשר $\gamma<\rho+\sigma$ שוה ל $|\dots,A^{\rho+\delta},\dots|$ באשר $\delta<\sigma$, כי הרי מצד אחד, כל אידאל $A^{\rho+\delta}$ המופיע ב $|\dots,A^{\rho+\delta},\dots|$ מופיע גם ב $|\dots,A^\gamma,\dots|$, ולכן $|\dots,A^{\rho+\delta},\dots| \supseteq |\dots,A^\gamma,\dots|$, אך מצד שני הרי כל אידאל המופיע ב $|\dots,A^\gamma,\dots|$ מכיל לפחות את אחד האידאלים המופיעים ב $|\dots,A^{\rho+\delta},\dots|$ (ראה משפט א של סעיף זה), ולכן $\supseteq|\dots,A^{\rho+\delta},\dots|$

---

*) להוכחת המשפט הזה עיין במאמרו של R. Baer שהוזכר לעיל.

$|\ldots,A^\gamma,\ldots|$. לפיכך יהיה באמת $|\ldots,A^\gamma,\ldots| = |\ldots,A^{\rho+\delta},\ldots|$, כלומר $|\ldots,A^{\rho+\delta},\ldots| = A^{\rho+\sigma}$. על סמך הנחת האינדוקציה הרי $A^{\rho+\delta} \supseteq A^\rho A^\delta$, ולפיכך $A^{\rho+\sigma} \supseteq |\ldots,A^\rho A^\delta,\ldots|$. האידאל A^ρ הנהו גורם שמאלי משותף לכל האידאלים המשתתפים ב $|\ldots,A^\rho A^\delta,\ldots|$, לפיכך נקבל $|\ldots,A^\rho A^\delta,\ldots| \supseteq A^\rho|\ldots,A^\delta,\ldots|$. יחס זה הוא תוצאה מן העובדה כי $|\ldots,A^\delta,\ldots|$ מוכל בכל האידאלים A^δ, ולפיכך $A^\rho|\ldots,A^\delta,\ldots|$ מוכל בכל אחד מן האידאלים $A^\rho A^\delta$, ולכן גם במשותף שלהם, כלומר ב $|\ldots,A^\rho A^\delta,\ldots|$. כך קבלנו $A^{\rho+\sigma} \supseteq A^\rho|\ldots,A^\delta,\ldots|$. מכיון שיחד עם $\rho+\sigma$ גם σ הנהו מספר גבולי, הרי $A^\sigma = |\ldots,A^\delta,\ldots|$, ולכן $A^{\rho+\sigma} \supseteq A^\rho A^\sigma$, מש"ל.

גם להוכחת החלק השני של (4) נשתמש באינדוקציה לפי σ. אם $\sigma = 1$ הרי יחס זה נכון (אפילו עם סמן השויון). אם σ איננו מספר גבולי ו $\sigma > 0$, כלומר $\sigma=\gamma+1$, הרי יהיה $A^{\rho\sigma}=A^{\rho(\gamma+1)}=A^{\rho\gamma+\rho}$. על סמך החלק הראשון של (4) שכבר הוכח, יהיה $A^{\rho\sigma} \supseteq A^{\rho\gamma}A^\rho$. מכיון שם $\gamma<\sigma$ נובע כי $\rho\gamma<\rho\sigma$, יהיה על סמך הנחת האינדוקציה $A^{\rho\gamma} \supseteq (A^\rho)^\gamma$ ולכן $A^{\rho\sigma} \supseteq (A^\rho)^\gamma A^\rho$. על סמך הגדרה א שבראשית הסעיף הזה הרי $(A^\rho)^\gamma A^\rho=(A^\rho)^{\gamma+1}$, ולכן $A^{\rho\sigma} \supseteq (A^\rho)^{\gamma+1}=(A^\rho)^\sigma$. בזה הוכח החלק השני של (4) במקרה ש σ איננו מספר גבולי. אם σ מספר גבולי, אז גם $\rho\sigma$ הנהו מספר גבולי, ולפיכך $A^{\rho\sigma} = |\ldots,A^\gamma,\ldots|$ באשר $\gamma<\rho\sigma$. עתה נשתמש בנוסחת החלוק עם שארית *) ונכתב $\gamma=\rho\xi+\eta$, באשר $\eta<\rho$ **). בהיות $\gamma<\rho\sigma$ נובע מכאן כי $\xi<\sigma$. מכיון ש σ הוא מספר גבולי, הרי גם $\xi+1<\sigma$, ולפיכך: $\gamma=\rho\xi+\eta<\rho\xi+\rho=\rho(\xi+1)<\rho\sigma$. בהשתמשנו ב (3), נקבל $A^\gamma \supseteq A^{\rho(\xi+1)}$, ולכן גם $|\ldots,A^\gamma,\ldots| \supseteq |\ldots,A^{\rho(\xi+1)},\ldots|$. על סמך הנחת האינדוקציה (בהתחשבנו עם $\xi+1<\sigma$) הרי $A^{\rho(\xi+1)} \supseteq (A^\rho)^{\xi+1}$, ולכן $|\ldots,A^{\rho(\xi+1)},\ldots| \supseteq |\ldots,(A^\rho)^{\xi+1},\ldots|$. מכיון שכל האידאלים $(A^\rho)^{\xi+1}$ מופיעים גם בין האידאלים המשתתפים ב $|\ldots,(A^\rho)^\delta,\ldots|$ באשר $\delta<\sigma$, הרי $|\ldots,(A^\rho)^{\xi+1},\ldots| \supseteq |\ldots,(A^\rho)^\delta,\ldots| = (A^\rho)^\sigma$, ולפיכך $A^{\rho\sigma} \supseteq (A^\rho)^\sigma$, מש"ל.

מ ש פ ט ג. לכל אידאל A באגודה S קים מספר סודר סופי או אין-סופי ρ המקים את התנאים: א) $A^\rho=A^{\rho+\sigma}$ בשביל כל σ. ב) $A^\tau \supset A^\rho$ אם $\tau<\rho$.

ה ו כ ח ה. נוכיח תחילה כי קים α כך ש $A^\alpha=A^{\alpha+1}$. ואמנם, נניח כי לגבי כל α מתקים $A^\alpha \neq A^{\alpha+1}$, כלומר (ראה משפט א בראשית סעיף זה) $A^\alpha \supset A^{\alpha+1}$; הקבוצה $K_\alpha = A^\alpha-A^{\alpha+1}$ מכילה איפוא לפחות אבר אחד של A. נסתכל עתה ב $K_\beta = A^\beta-A^{\beta+1}$ באשר $\alpha<\beta$. מכיון ש $\alpha+1\leq\beta$, יהיה $A^{\alpha+1} \supseteq A^\beta$, ולפיכך תהיינה הקבוצות K_α ו K_β זרות. מכיון ש $K_\alpha \subset A$ בשביל כל מספר סודר α, יהיה גם לגבי קבוצת האחוד $A \supseteq (\ldots,K_\gamma,\ldots)$ באשר $\gamma<\alpha$, ויחס זה נכון יהיה לגבי כל מספר סודר α. אך דבר זה לא יתכן, כי הרי בצד השמאלי של אי השויון $A \supseteq (\ldots,K_\gamma,\ldots)$ מופיעה קבוצת האחיד של קבוצות זרות, והרי אם נבחר ב α גדול די צרכו, תהיה עצמת קבוצה זו גדולה מעצמת הקבוצה A. סתירה זו נותנת כי קים מספר α המקים את השויון $A^\alpha=A^{\alpha+1}$. נסתכל עתה בקבוצת כל המספרים הסודרים המקימים אי שויון זה. אם אברי קבוצה לא ריקה זו יסודרו לפי גדלם העולה, תתקבל קבוצה סדורה היטב. איברה הראשון של קבוצה זו יסומן ב ρ. על סמך הגדרתו של מספר זה, יהיה $A^\rho=A^{\rho+1}$ אבל $A^\gamma \neq A^{\gamma+1}$ בשביל כל γ הקטן מ ρ. נוכיח עתה כי ל ρ התכונות א וב שבטענת המשפט. את הטענה א נוכיח לפי האינדוקציה לגבי σ. על סמך קביעתו של ρ נכונה התכונה א בשביל $\sigma=1$. אם σ איננו מספר גבולי ו $1<\sigma$, כלומר $\sigma=\gamma+1$,

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

*) עיין בעמוד 64 של F. Hausdorf, Mengenlehre, dritte Auflage (1935)

**) לנוסחה זו יש תוקף כי הרי $0<\rho$. חזקות עם המעריך 0 אינן מופיעות כאן.

אז יהיה $A^{\rho+\sigma}=A^{\rho+\gamma+1}=A^{\rho+\gamma}A$. אבל על סמך הנחת האינדוקציה (בהיות $\gamma<\sigma$) הרי $A^{\rho+\gamma}=A^{\rho}$, ולכן $A^{\rho+\gamma}A=A^{\rho+1}=A$, ולפיכך $A^{\rho+1}=A^{\rho}$. אם σ מספר גבולי אז גם $\rho+\sigma$ הנהו מספר גבולי, ולפיכך $A^{\rho+\sigma}=|\ldots,A^{\tau},\ldots|$, כאשר $\tau<\rho+\sigma$. כמו בהוכחת המשפט הקודם יהיה גם $A^{\rho+\sigma}=|\ldots,A^{\rho+\xi},\ldots|$, באשר $\xi<\sigma$. אבל על סמך הנחת האינדוקציה הרי בשביל כל ξ כזה $A^{\rho+\xi}=A^{\rho}$, ולכן $A^{\rho+\sigma}=A^{\rho}$. בזה הוכח החלק הראשון של המשפט. יהי עתה $\tau<\rho$, אז על סמך הגדרת ρ יהיה $A^{\tau}\supset A^{\tau+1}$ (ראה גם משפט א של סעיף זה). היות ו $\rho\geq\tau+1$ יהיה גם (שוב על סמך אותו משפט) $A^{\tau+1}\supseteq A^{\rho}$, ולפיכך $A^{\tau}\supset A^{\rho}$, מש"ל.

הגדרה ב. למספר הסודר ρ עם התכונות המתוארות במשפט הקודם קוראים בשם "ציון האידאל A". לאידאל $A_1=A^{\rho}$ קוראים בשם הגרעין הראשון של האידאל A.

הערה א. אם הציון ρ של האידאל A הוא מספר סופי, אז קל להוכח כי $A^{\xi}A^{\rho}=A^{\rho}$ בשביל כל ξ. במיוחד יהיה $A^{\rho}A^{\rho}=A^{\rho}$, כלומר הגרעין הראשון A_1 של האידאל A מקים את השויון $A_1^2=A_1$.

הגדרה ג. לאידאל B המקים את השויון $B=B^2$ קוראים בשם אידאל עצמי.

הערה ב. לפי הנ"ל, אם ציונו של אידאל הוא סופי, אז גרעינו הראשון הוא אידאל עצמי. אך אם ציונו של אידאל הוא אין סופי, יכול לקרות (ראה דוגמה ג בסעיף הבא) כי גרעינו הראשון של אידאל אינו אידאל עצמי. מכאן הדחיפה להגדרת הגרעין הכללי כדלקמן:

הגדרה ד. לכל מספר סודר ולכל אידאל A באגודה S נגדיר את הגרעין A_α בעזרת האינדוקציה הטרנספיניטית כדלקמן: 1) בשביל $\alpha=1$ יהי A_1 הגרעין הראשון של A. 2) אם $\alpha=\beta+1$ (כלומר α אינו מספר גבולי), נגדיר את A_α כגרעינו הראשון של A_β. 3) אם α הוא מספר גבולי, יוגדר A_α כמשותף של כל ה A_γ-ים, באשר $\gamma<\alpha$.

משפט ד. לכל אידאל A באגודה S קים מספר סודר τ כך שלגרעין A_τ ישנן התכונות הבאות: א) $A_\tau=A_{\tau+\lambda}$ בשביל כל λ. ב) אם $\alpha<\tau$ אז $A_\alpha\supset A_\tau$. ג) $A_\tau=A_\tau^2$.

הוכחה. ראשית, באופן דומה להוכחת המשפט א של סעיף זה, נובעת על נקלה בעזרת האינדוקציה הטרנספיניטית אמתות אי השויון $A_\gamma\supseteq A_\delta$ בשביל $\delta>\gamma$. במיוחד בשביל כל γ יהיה $A_\gamma=A_{\gamma+1}$. מזה נובע בעזרת היקש בו השתמשנו בהוכחת משפט ג של סעיף זה כי קים מספר סודר קטן ביותר τ כך ש $A_\tau=A_{\tau+1}$. אם נסמן ב ρ_τ את הציון של A_τ, אז על סמך הגדרה ד דלעיל יהיה $A_{\tau+1}=A_\tau^{\rho_\tau}$. לו היה $\rho_\tau>2$, כי אז היינו מקבלים את היחס הסותר את עצמו: $A_\tau\supset A_\tau^2\supseteq A_\tau^{\rho_\tau}=A_\tau$. לכן $\rho_\tau=2$, כלומר $A_\tau^2=A_\tau$. עתה קל להוכח כי למספר τ גם שאר התכונות שבטענת משפטנו.

הגדרה ה. לגרעין A_τ של אידאל A עם התכונות המתוארות במשפט הקודם, קוראים בשם <u>הגרעין המוחלט</u> של האידאל A. הגרעין המוחלט הוא איפוא אידאל עצמו.

משפט ה. קבוצת האחוד G של כל האידאלים העצמיים של אגודה S אף היא אידאל עצמי השוה לגרעין המוחלט של האגודה. גרעינה המוחלט של אגודת המנה S/G שוה לאפס.

הוכחה. יהי A אידאל עצמי רצוני של S, אז $A\subseteq G$, ולכן $A^2\subseteq G^2$. אבל $A^2=A$, לכן $A\subseteq G^2$. לפיכך גם G שהוא קבוצת האחוד של כל ה A-ים יקים את אי השויון $G\subseteq G^2$. אבל בהתחשב עם $G^2\subseteq G$ (ראה §1, הערה למשפט א) נקבל $G^2=G$, כלומר G הוא אידאל עצמי. על סמך הגדרתו של G ותכונות הגרעין נובע, כי G מכיל את גרעינה המוחלט של האגודה S. מצד שני הרי נובע מ $G\subseteq S$ כי גרעינה המוחלט של S מכיל את גרעינו המחלט של G,

כלומר את G עצמו, ולפיכך מוכרח G להתלכד עם הגרעין המוחלט של S. יהי עתה A' אידאל עצמי של אגודת המנה S/G ונניח כי $O' \neq A'$. קבוצת האחוד (A', G) תהוה אידאל באגודה S, המכיל את האידאל G כקבוצה חלקית אמתית. מצד שני נובע, על סמך ההנחה כי A' הנהו אידאל עצמי ב S/G, ש$(A', G) = (A'^2, G)$. לפיכך

$$(A',G)^2=(A'^2,G^2,A'G,GA') \supseteq (A'^2,G)=(A',G)$$

וזה נותן בהתחשב עם אי השויון $(A',G)^2 \subseteq (A',G)$ (ראה §1 משפט א) את אי השויון $(A',G)^2 = (A',G)$, כלומר: האידאל (A',G) המכיל את G באפן אמתי, אף הוא אידאל עצמי. אך עובדה זו הרי מתנגדת להגדרתו של G כסכום כל האידאלים העצמיים של האגודה S. לפיכך אין באגודת המנה S/G אידאלים עצמיים פרט ל O, ולכן גם גרעינו המוחלט של כל אידאל ב S/G, ובמיוחד גרעינה המוחלט של S/G עצמה הנהו אפס.

§3. דוגמות.

בסעיף זה נביא 3 דוגמות להבהרת המושגים והמשפטים של הסעיף הקודם.

ד ו ג מ ה א. תהי S אגודת המספרים הטבעיים הזוגיים והאפס (לפי הכפל הרגיל). אז S^n בשביל n טבעי הוא אידאל ב S המתלכד עם קבוצת כל המספרים מ S המתחלקים ב 2^n. לפיכך $S^{n+1} \subset S^n$ בשביל כל n טבעי. אבל S^ω שהוא המשותף של קבוצת ה S^n-ים שוה ל O. כאן הגרעין המוחלט של S (שהוא אפס) שוה לגרעין הראשון של S, ו $S^\omega=O$. המספר הגבולי ω הנהו הציון הראשון של S.

ד ו ג מ ה ב. תהי T קבוצת כל הסמלים $r_{ik}\varepsilon_{ik}$, באשר i ו k הם מספרים טבעיים המקימים את התנאי $i<k$, ו r_{ik} הוא מספר רציונלי רצוני. קבוצת סמלים זו תהוה אגודה על סמך הקביעות הבאות: הסמל $O\varepsilon_{ik}$ הוא האפס של האגודה (אשר אף הוא יסומן לשם הפשטות ב O). כן נקבע: $1\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ik}$ ו $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}=O$ אם $k \neq j$, $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}=\varepsilon_{il}$ אם $k=j$. ולבסוף נגדיר $r_{ik}\varepsilon_{ik} \cdot r'_{jl}\varepsilon_{jl}=(r_{ik}r'_{jl})\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}$. קל להוכח כי האידאל T^n של האגודה T בשביל n טבעי מתלכד עם קבוצת כל הסמלים $r_{ik}\varepsilon_{ik}$, באשר r_{ik} מספר רציונלי רצוני, ו $n<k$. לכן יהיה $T^{n+1} \subset T^n$ בשביל כל n טבעי. נובע על נקלה כי המשותף של כל ה T^n הנהו O, כלומר $T^\omega=O$. כמו בדוגמה הקודמת הגרעין הראשון של T מתלכד עם הגרעין המוחלט של T.

ד ו ג מ ה ג. נסתכל עתה בקבוצת האחוד U של האגודות S ו T שבשתי הדוגמות הקודמות, כלומר $U=(S,T)$. נהפוך קבוצה זו לאגודה ע"י הקביעות הבאות: נזהה את אבר האפס של S עם אבר האפס של T. את הגדרת הכפל בין שני אברים השיכים יחדיו ל S או יחדיו ל T נשאיר כמו בדוגמות הקודמות. יהי עתה s מספר זוגי רצוני (כלומר אבר מ S) ויהי $r_{ik}\varepsilon_{ik}$ אבר מ T, אז את המכפלה $sr_{ik}\varepsilon_{ik}$ נגדיר על ידי השויון $sr_{ik}\varepsilon_{ik}=(sr_{ik})\varepsilon_{ik}$ וכן נקבע כי $r_{ik}\varepsilon_{ik}s=sr_{ik}\varepsilon_{ik}$. קל להוכח כי על סמך קביעות אלו תהוה הקבוצה U אגודה. כמו כן מוכיחים על נקלה כי באגודה זו תהוה הקבוצה החלקית T אידאל וכי $ST=TS=T$. לפיכך יהיה

$$U^2=(S,T)^2=(S^2,TS,ST,T^2)=(S^2,T,T^2)=(S^2,T)$$

וכן נקבל בשביל כל מספר טבעי n את השויון

$$U^n=(S^n,T)$$

בהתחשב עם האמור בדוגמה א יהיה איפוא בשביל כל n טבעי

$$U^{n} \supset U^{n+1} \qquad (5)$$

והמשותף של כל ה U^{n}, כלומר U^{ω} ישוה ל T:

$$U^{\omega}=T$$

נחשב עתה את החזקה $U^{\omega+1}$. על סמך הנ"ל נקבל

$$U^{\omega+1}=U^{\omega}U=TU=T(S,T)=(TS,T^{2})=(T,T^{2})=T=U^{\omega}$$

כלומר $U^{\omega+1}=U^{\omega}$. בהתחשב עם (5) יהיה איפוא ω הציון של U, ו T יהיה הגרעין הראשון של U. מכיון ש $T^{\omega}=0$ (ראה דוגמה ב) ישוה הגרעין השני של U ל 0 ולכן יהיה זה גם הגרעין המוחלט של U.

נרשום עוד במיוחד את אי השויונות הבאים, המשלימים את טענות משפט ב של הסעיף הקודם: $U^{\omega+\omega} \supset U^{\omega}U^{\omega}$; $U^{\omega 2} \supset (U^{\omega})^{2}$.

אכסיומות של המספרים הטבעיים

ברוך גרמנסקי

אפשר להשתמש להגדרת סדרת המספרים הטבעיים במקום בחמש האכסיומות של Peano גם בחמש האכסיומות הבאות. אני משתמש בהן במושג היסודי "מספר טבעי" וביחס היסודי "קרוב ביותר".(או "שכן", כהצעת מר בינג).

א. "1" הוא מספר טבעי (כלומר, קבוצת המספרים הטבעיים אינה ריקה).

ב. יש למספר הטבעי "1" בדיוק מספר טבעי אחד הקרוב לו ביותר ומספר אחרון זה הוא שונה מ "1". אנו מסמנים מספר זה ב "2".

ג. לכל מספר טבעי שונה מ "1" יש בדיוק שני מספרים טבעיים קרובים לו ביותר, ומספרים אלה הם שונים ממנו וזה מזה.

ד. היחס "קרוב ביותר" הוא סמטרי, זאת אומרת, אם y הוא מספר טבעי קרוב ביותר למספר הטבעי x, גם x הוא מספר טבעי קרוב ביותר ל y.

ה. בכל חלוקה של קבוצת כל המספרים הטבעיים לשתי קבוצות חלקיות לא ריקות ישנו בקבוצה החלקית האחת מספר טבעי הקרוב ביותר למספר טבעי של הקבוצה החלקית השניה (נסוח של ד"ר פוצקין במקום נסוח אחר שלי).

נבנה עכשיו לפי האכסיומות שלנו את סדרת המספרים הטבעיים. לשם כך נצא קודם כל מהמספר הטבעי "1" ונעבור ממנו למספר היחידי הקרוב לו ביותר, הוא "2". עד עכשיו השתמשנו באכסיומות א וב. ל"2" יש לפי האכסיומה ג שני מספרים קרובים לו ביותר. אחד מהם הוא לפי האכסיומה ד המספר הטבעי "1". נניח את "1" הצדה ונעבור מ "2" למספר השני הקרוב לו ביותר. נסמן מספר אחרון זה ב "3". למספר "3" יש שוב לפי האכסיומה ג שני מספרים קרובים לו ביותר. אחד מהם הוא לפי האכסיומה ד המספר הטבעי "2". נניח אותו הצדה ונעבור למספר השני הקרוב ביותר ל "3". נסמן אותו ב "4". נמשיך כך עד אין סוף. קל להוכיח באופן גנטי שבסדרה ...,1,2,3,4 שאנו מקבלים אותה כך אין שני מספרים שוים. מהאכסיומה ה נובע עכשיו, שסדרה זו מכילה את כ ל המספרים הטבעיים (לפי מערכת האכסיומות שלנו). כי לולי היתה הקבוצה המשלימה את הסדרה שלנו ריקה, היה קים בה מספר טבעי קרוב ביותר לאחד המספרים של הסדרה הזאת, וזה אי אפשר, היות והקונסטרוקציה שלפיה קבלנו סדרה זאת היא חד-ערכית. זה מראה, שקבוצת המספרים הטבעיים הנתונה על ידי האכסיומות שלנו מזדהית עם קבוצת המספרים הטבעיים במובן המקובל.

אני משלים את דיוני על ידי הוכחת עקרון האינדוקציה השלמה בעזרת האכסיומות שלי.(לפי הצעת ידידי מר קבקר ומר דב ירדן (יוז'וק)).

קודם כל אנחנו מגדירים את ה ע ו ק ב למספר טבעי $n \neq 1$. לשם כך אנחנו בונים בדרך האמורה למעלה את סדרת המספרים הטבעיים מ 1 עד n. סדרה זו מכילה מספר אחד קרוב ביותר ל n. המספר השני הקרוב לו ביותר נקרא העוקב שלו. העוקב של 1 הוא המספר היחידי הקרוב לו ביותר. נסמן את העוקב של n ב n'.

עכשיו נניח שבשביל איזו קבוצה חלקית M של מספרים טבעיים קימות שתי התכונות:

א) 1 שיך ל M.
ב) אם n שיך ל M, גם n' שיך ל M.

נוכיח של M שיכים כ ל המספרים הטבעיים.

לשם כך נוכיח של M שיך המספר הטבעי הרצוני m. נבנה את סדרת המספרים הטבעיים מ 1 עד m. היות ו 1 שיך ל M, גם 2 שיך ל M. היות ו 2 שיך ל M, גם 3 שיך ל M. על ידי מספר סופי של צעדים, דהינו $m-1$ צעדים, נגיע בדרך זו ל m. לכן m שיך ל M. לכן שיכים ל M כל המספרים הטבעיים. בזה הוכח עקרון האינדוקציה השלמה.

בחיצרת המחוגה בבניות גאומטריות אלמנטריות

הנס רדמכר ואוטו טפליץ

1. בניות הגאומטריה האלמנטרית, כפי שהן מופיעות לפנינו כבר אצל אוקלידס, מבוצעות בסרגל ובמחוגה; נהוג היה אפילו להגביל את הגאומטריה האלמנטרית במסגרת הגאומטריה הכללית דוקא על ידי יכולת הבניה של היצורים הגאומטריים במחוגה ובסרגל. ואולם שני המכשירים האלה מצדם אינם ממלאים שום תפקיד מגדר כל צרכו: ביכלתנו ליחס הרבה בעיות למכשיר האחד או למשנהו כאות נפשנו. לפי חקירותיו של מסקרוני והחקירות הקדומות מהן הרבה של המתמטיקאי הדני מור שנתגלו מחדש רק בימינו ביכלתנו לותר אפילו כליל על הסרגל ולבצע את כל הבניות, הנתנות לבצוע במחוגה ובסרגל ביחד, במחוגה בלבד[1]. במגמה הפוכה הרחיק לכת יעקב שטינר, בהוכיחו, כי אפשר לבצע את כל הבניות של הגאומטריה האלמנטרית בסרגל בלבד, אם רק רשום לפנינו מעגל קבוע יחד עם מרכזו. כי אין לוותר עוד גם על מעגל קבוע זה, דבר זה קל לראות והוכחה הבאה אף תקיף אותו. ודהיינו נראה, כי מעגל קבוע, שמרכזו אינו ידוע, אינו מספיק לעשות את כל יתר הבניות בנות-בצוע בסרגל בלבד. ולא עוד אלא שגם שני מעגלים בלתי נחתכים שמרכזיהם אינם ידועים אינם מספיקים אף הם. לעומת זה ידוע, כי שני מעגלים נחתכים בלי מרכז יכולים לשמש במקום מעגל שיהיה בעל המרכז; והוא הדין לשלושה מעגלים בלתי נחתכים בלי מרכז.

2. הואיל ולפי שטינר אפשר לבצע את כל הבניות הגאומטריות האלמנטריות בסרגל בלבד, אם נתון מעגל עם מרכזו, עלינו להוכיח, כי אי אפשר למצוא בסרגל בלבד את המרכז לא במעגל יחיד בלי מרכז ולא בשני מעגלים בלתי נחתכים. יש לנו אפוא להעביר שתי הוכחות אי-אפשרות. זאת נעשה על ידי כך, שנביא לידי סתירה את ההנחה כי המרכז או המרכזים נתנים לבניה בסרגל בלבד. מצד תכנה תסתמך הוכחה בלתי ישירה זו על עקרון ההעתקה.

נעיר לראשונה, כי ההנחה, שאין למצוא בסרגל בלבד את המרכזים של שני מעגלים, היא המרחיקה לכת וכוללת כבר את העובדה כי מעגל יחיד בלי מרכז אינו מספיק. ואף על פי כן נקדים לטפל בבעיה פשוטה זו על מעגל יחיד, הואיל והיא הפשוטה מבחינה גאומטרית ונותנת כבר להכיר את העקר בדיוננו.

3. נניח כי בנינו בתהליך מסוים את המרכז למעגל מצויר לפנינו על ידי שמוש בסרגל בלבד. רסמנו אפוא קוים ישרים, החותכים את המעגל או זה את זה וחברנו נקודות-חתוך מסוימות בקוים ישרים. הואיל ונקודה יכולה להקבע כאן רק על ידי קוים ישרים, שעליהם היא נמצאת, יתקבל המרכז בתהליך הזה כנקודת-החתוך של שני ישרים. הצורה המתקבלת על ידי כך תצטרף אפוא מן המעגל הנתון וכמה קוים ישרים, ששנים מהם נחתכים במרכז המבוקש של המעגל.

נטפל עכשו בהעתקה מיוחדת של הצורה הזאת, העתקה המעבירה את המעגל שוב למעגל, כל קו ישר לקו ישר וכל נקודת-חתוך שוב לנקודת-החתוך של הקוים המתאימים. העתקות כאלה קימות כמובן למכביר; כזאת תהיה למשל כל הגדלה או הקטנה דומה של הצורה. אך דוקא העתקות דומות תהיינה ללא הועיל למטרתנו. אין טוב לנו אלא לתת העתקה כזאת, המשאירה אמנם את מעגלנו כמעגל וכל ישר כישר, אלא שהיא מטרפת כליל את הצורה, ובראש וראשונה היא מעבירה את מרכז המעגל לנקודה-תמונה, שאל נכון איננה מרכז המעגל-התמונה.

אם נוכל לתת העתקה כזאת, תהיה הוכחתנו בידנו. כי באמת, תהי הצורה-התמונה שונה מן המקור כאשר תהי, שוות-זכות הן שתי הצורות ביחס לבניה האפשרית. כל צעד של הבניה בצורה המקורית, כמו העברת ישר, מציאת נקודת-חתוך או חבור שתי נקודות-חתוך על ידי ישר, נוכל גם, מאחר שהמעגל וכל ישר וכל נקודת-חתוך נמצאים גם בתמונה, לבצע באותו סדר בתמונה. ואולם הואיל ולפי ההנחה אין מרכז המעגל המקורי מעתק על מרכז המעגל-התמונה, נמצא שהבניה בתמונה לא יכלה להוביל למטרה: לישרים, הנחתכים במרכז המעגל המקורי, מתאימים ישרים בתמונה, שנקודת-חתוכם שונה ממרכז המעגל-התמונה. ובכן למרות מה שגם בתמונה בוצע כלל-הבניה המונח צעד-צעד, לא הביא אותנו בכל זאת למציאת המרכז. אבל זוהי סתירה למובן שיטת-בניה.

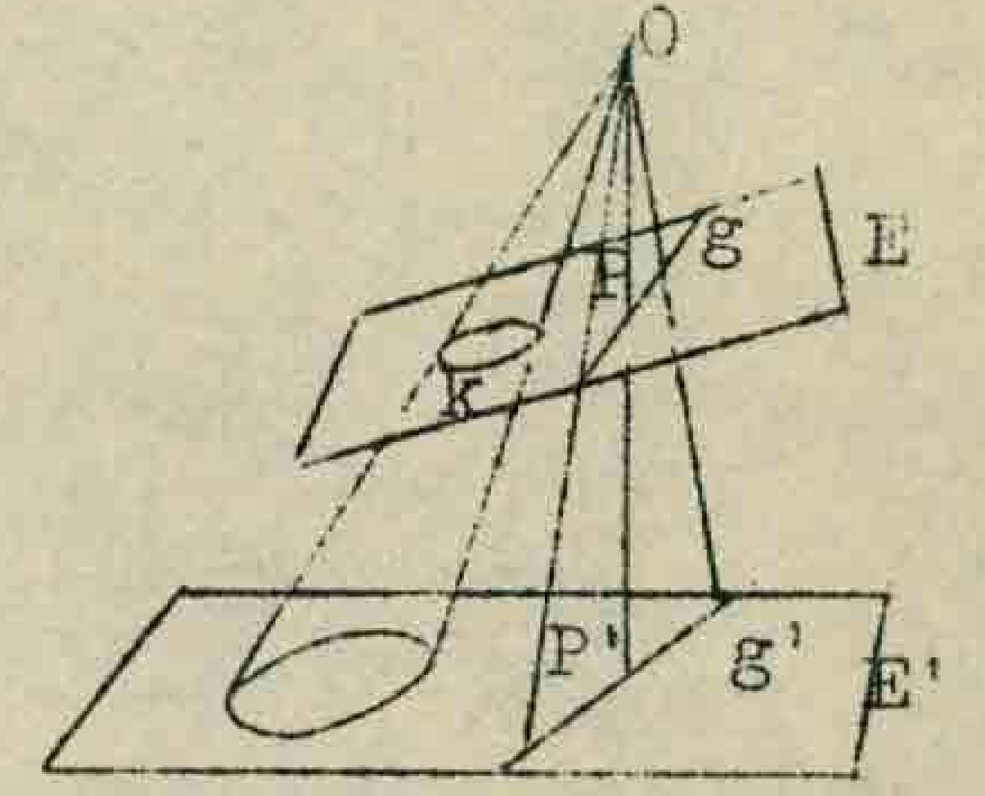
---

[1] קו ישר (הואיל ואי אפשר לסרטט אותו) מיוצג בדיונים אלה על ידי שתים מנקודותיו.

ובכן אין בניה כזאת יכולה להיות קימת: בנית המרכז של מעגל נתון בלי מרכז בסרגל בלבד אינה נתנת לבצוע.

במקרה ש נ י מעגלים תועבר ההוכחה בדרך דומה לגמרי.

4. עתה לא נותר לנו אלא לתת העתקה מן הסוג המתואר למעלה. נקבל העתקה כזאת פשוט על ידי הטלה מרחבית, וביחוד על ידי הטלה מרכזית. נדמה לנו נקודה O מחוץ למישור-הציור E (ציור 1) ודרכה קרן העוברת דרך כל נקודה P של המישור E. קרן זו חותכת את מישור התמונה או מישור-ההטלה E' בנקודה P', התמונה או ההטלה של P. כמו P כך מעתקת כל הצורה ב E נקודה-נקודה ל E'. אפשר לראות תמונה זו כצל, המוטל על ידי מקור האור דמוי-הנקודה ב O מן הצורה ב E על המישור E'. על ידי כך מעתק בעליל כל ישר g שוב לישר g'. באמת, קבוצת כל קוני-ההטלה דרך O והנקודות הבודדות של הישר g נמצאת במישור, הנקבע על ידי O ו g, והחותך אפוא את המישור E' בישר g'.



ציור 1.

ואולם הטלת מעגל לא תהיה בדרך כלל שוב מעגל. קבוצת הקרנים העוברות מ O להקף המעגל k מהוה חרוט, וביחוד בדרך כלל חרוט מעגלי משופע. "ישר" נקרא חרוט מעגלי, שבו קטע המחבר את הקדקוד O עם מרכז המעגל M מאונך למישור המעגל; כל החרוטים המעגליים האחרים נקראים משופעים. מישור-ההטלה E' חותך אפוא את החרוט בחתוך-חרוט, שכידוע אינו מעגל בדרך כלל. ואולם למטרתנו תנאי ולא יעבור הוא להעתיק את המעגל שוב למעגל. דבר זה נתן באמת להשגה בשני מקרים מיוחדים.

ראשון המקרים האלה הוא ללא חרוט. הוא קורה אם מישור-הציור E ומישור-התמונה E' מקבילים זה לזה. ההעתקה הנגרמת על ידי ההטלה היא אז בעליל העתקת-דמיון, וביחוד הגדלה או הקטנה, לפי זה אם E' רחוק מ O או קרוב ל O מ E. מקרה זה לא יסכון כלל לצרכנו, הואיל ואינו גורם שום סרוס של הצורה, ולפיכך הוא מעביר ביחוד גם מרכז של מעגל שוב למרכז המעגל המתאים, מה שברצוננו דוקא למנוע.

המקרה השני קשור למשפט, שנביאו כאן לכתחלה בלי הוכחה, למען לא להפסיק את מהלך הדיונים, בדחותנו את הוכחתו לסוף פרק זה (ציור 2). המישור, המאונך למישור המעגל של החרוט המשופע והעובר דרך מרכז המעגל הזה וקדקוד החרוט O, הוא מישור-סמטריה של החרוט המשופע. בו נמצאים קצר הקוים היוצרים OK_1 וארוך הקוים היוצרים OK_2 של החרוט. במישור-סמטריה יש לראות את מישור-השרטוט של הציור; מעגל הבסיס מיוצג בציור רק על ידי קטרו K_1K_2; מישור המעגל מאונך למישור-השרטוט. כל מישור מקביל למישור המעגל חותך את החרוט כמובן שוב במעגל. על מישור, החותך את שני הקוים היוצרים הקיצוניים OK_1 ו OK_2 בנקודות K_1' ו K_2' כך ש $\angle OK_1'K_2' = \angle OK_2K_1$ ועל ידי כך גם (הואיל וסכום כ ל הזויות במשולש שוה לשתי זויות ישרות) $\angle OK_2'K_1' = \angle OK_1K_2$, נאמר, שהוא חותך את החרוט ב ח ת ו ך צ מ ו ד.

אז אומר משפט-העזר שלנו שאת הוכחתו נדחה לאחר כך:

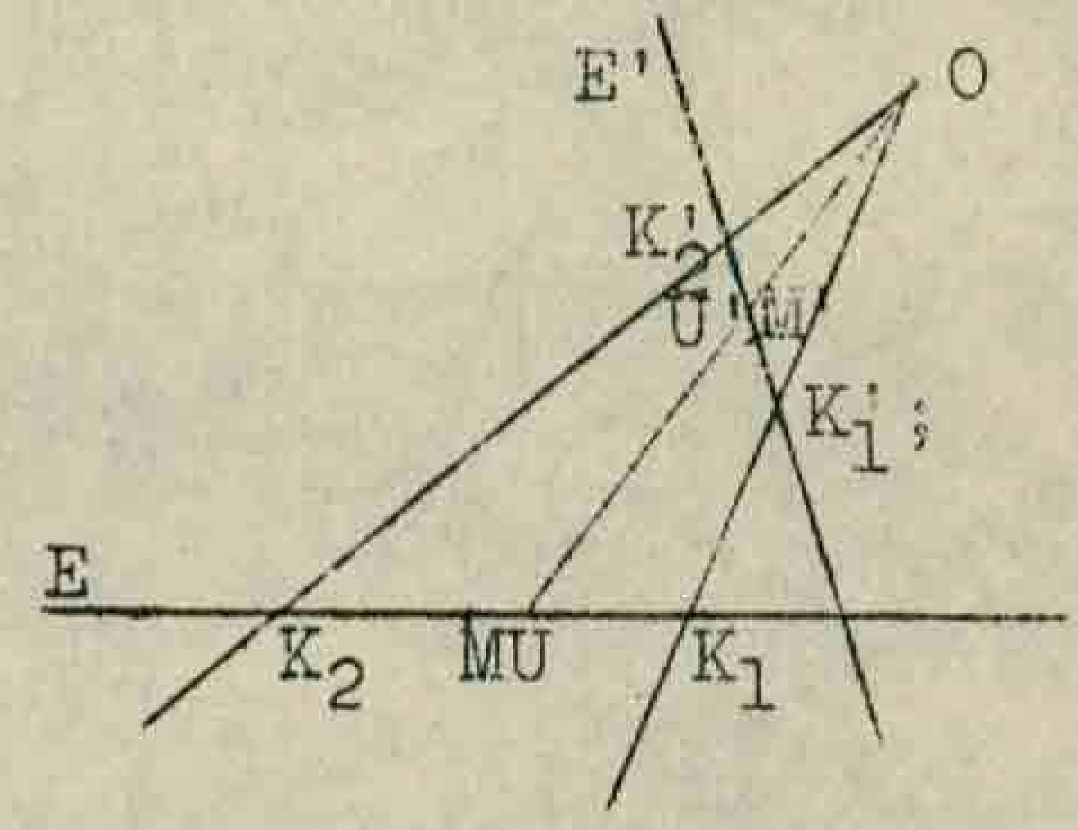
ה ח ת ו ך ה צ מ ו ד ש ל ח ר ו ט מ ע ג ל י מ ש ו פ ע ה ו א ש ו ב מ ע ג ל.

הואיל וכל החתוכים המקבילים לחתוך מעגלי יוצרים שוב מעגלים, יש לנו לפי משפט-עזר זה על חרוט מעגלי משופע ש ת י משפחות של חתוכים מעגליים מקבילים, שאין אחת מהן נשלית במאומה מחברתה.

הטלת המעגל K_1K_2 ב E על המעגל $K_1'K_2'$ ב E' מ O היא עכשו כזאת, כשם שהיא נחוצה לנו להוכחתנו; דהינו היא א י נ ה מעבירה, כמו שנראה מיד, את המרכז M של K_1K_2 ל M' של $K_1'K_2'$. ראשית נקבע כי ל 2 המשולשים K_1OK_2 ו $K_1'OK_2'$ יש חוצה-זוית משותף לזוית שעל יד O. הואיל וחוצה-זוית זה מחלק בכל אחד משני המשולשים את הצלע הנגדית K_1K_2 ו $K_1'K_2'$ בהתאמה ביחס שתי הצלעות הצדדיות, והללו הן לפי ההנחה (דהינו בחרוט המשופע) בלתי שוות, אין הוא עובר לא דרך האמצע M של K_1K_2 ולא דרך האמצע M' של $K_1'K_2'$. לפיכך נמצאים שני המרכזים M ו M' מעברים שונים של חוצה-הזוית. כדי להוכח בזאת, נסובב את המשולש $OK_1'K_2'$ סביב חוצה-הזוית OU'. הואיל והמשולש הזה

דומה לחברו OK_1K_2 בשקוף במראה, הוא מגיע אחר הסיבוב למצב כזה שבו $K_2'K_1'$ מקביל ל K_1K_2. ואולם עכשו מוכרחים אמצעי הצלעות M ו M' להמצא מאותו עבר של חוצה-הזוית (הואיל וחוצה-הזוית מחלק את הקטעים K_1K_2 ו $K_2'K_1'$ ביחס שוה); ובכן מוכרחים היו להמצא לפני הסיבוב מעברים שונים של חוצה-הזוית; במצב ראשון זה אין הם יכולים אפוא להתקבל זה מזה על ידי הטלה.

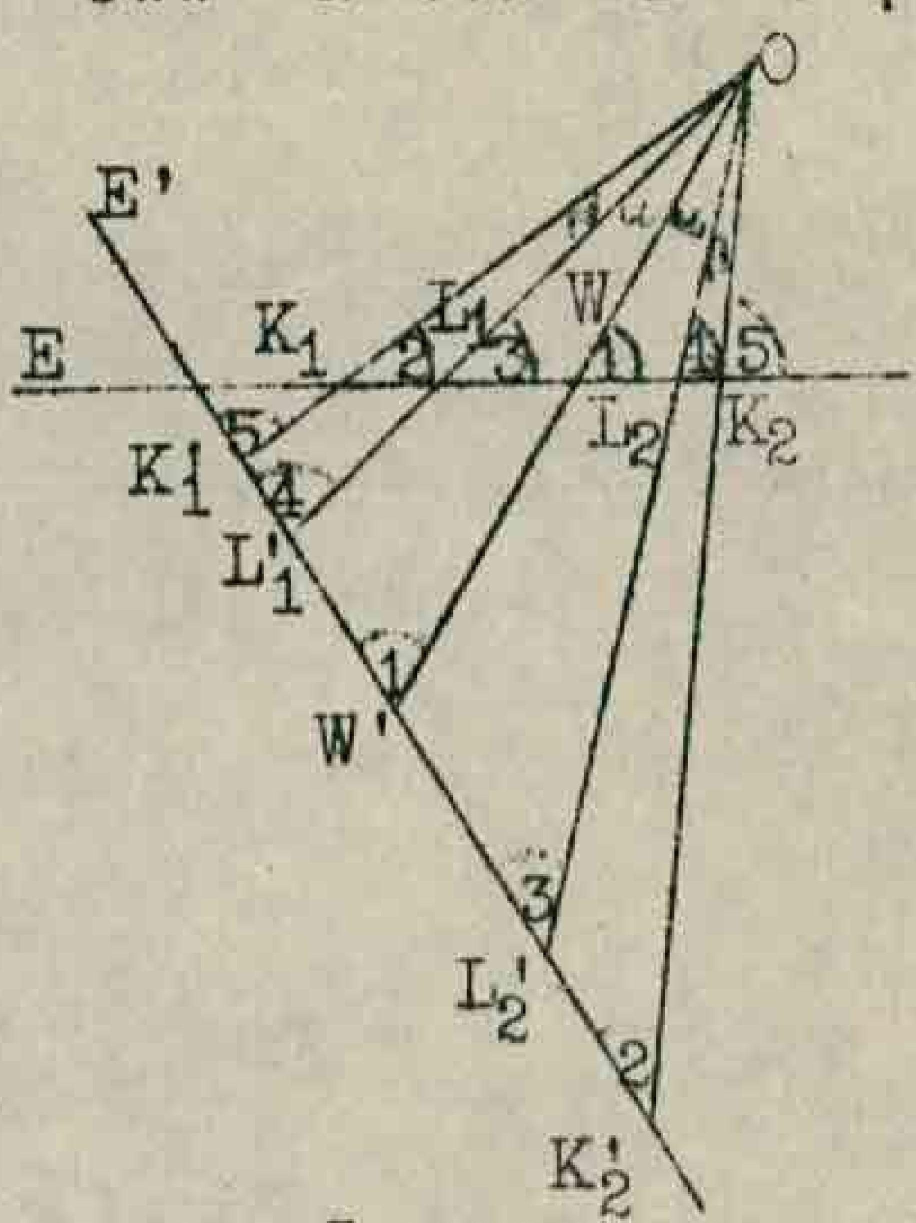
5. בזה כבר השלמה הוכחתנו, כי אין למצוא למעגל את מרכזו הנעלם בסרגל בלבד, פרט להוכחת משפט--העזר על החתוכים הצמודים בחרוט מעגלי משופע, שעלינו עוד להביאה. נבהיר לנו את ההוכחה במרוכז עוד הפעם בציור 2: צורה המורכבת מן המעגל K_1K_2 וישרים מסוימים במישור E מוטלת מ O על המישור E', ובהטלה זו עובר ישר לישר והמעגל K_1K_2 למעגל $K_1'K_2'$. בו בזמן <u>אין</u> המרכז M של K_1K_2 מוטל על המרכז M' של $K_1'K_2'$. בנית-ישרים שהיתה מובילה ב E למטרה, אינה עושה זאת ב E'. לפיכך אין הבניה המבוקשת אפשרית כל עקר.



ציור 2.

6. קשה מזו היא גאומטרית ההעתקה ב ש נ י מעגלים נתונים. אנו מקבלים תמיד ממרכז-ההטלה O שני חרוטים משופעים, ועלינו לערוך את הדברים כך, שמישור-ההטלה E' יחתוך את ש נ י ה ם בחתוך הצמוד.

נבחין בין שני מקרים. ראשית יהיו ש נ י ה מ ע ג ל י ם ב E נ מ צ א י ם ז ה ב ת ו ך ז ה. את מישור-השרטוט נשים במאונך ל E דרך שני המרכזים M ו N של שני המעגלים, שקטריהם בציור 3 הם K_1K_2 ו L_1L_2. אילו עלה בידנו לשים את מרכז-ההטלה כך, שחוצי-הזוית היוצאים מ O במשולשים OK_1K_2 ו OL_1L_2 יתלכדו, יכולנו לומר: החתוכים הצמודים מקבילים זה לזה ולפיכך אפשר לקבלם באותו המישור E'. לשם זה נחוץ שחוצה-הזוית OWW' יפגוש את המישור E' באותה זוית כמו E, אך בכוון מנוגד. אז שוות בעליל הזויות בציור 3 המסומנות בו בסמון מתאים (הואיל ולפי ההנחה $\angle L_1OW=\angle L_2OW$ ו $\angle K_1OW=\angle K_2OW$), כך שבאמת יוצרים E ו E' חתוכים צמודים ביניהם. את המעגלים K_1K_2 ו L_1L_2 הנמצאים זה לפנים מזה נטיל על המעגלים $K_1'K_2'$ ו $L_1'L_2'$, הנמצאים כמו כן זה לפנים מזה.



ציור 3.

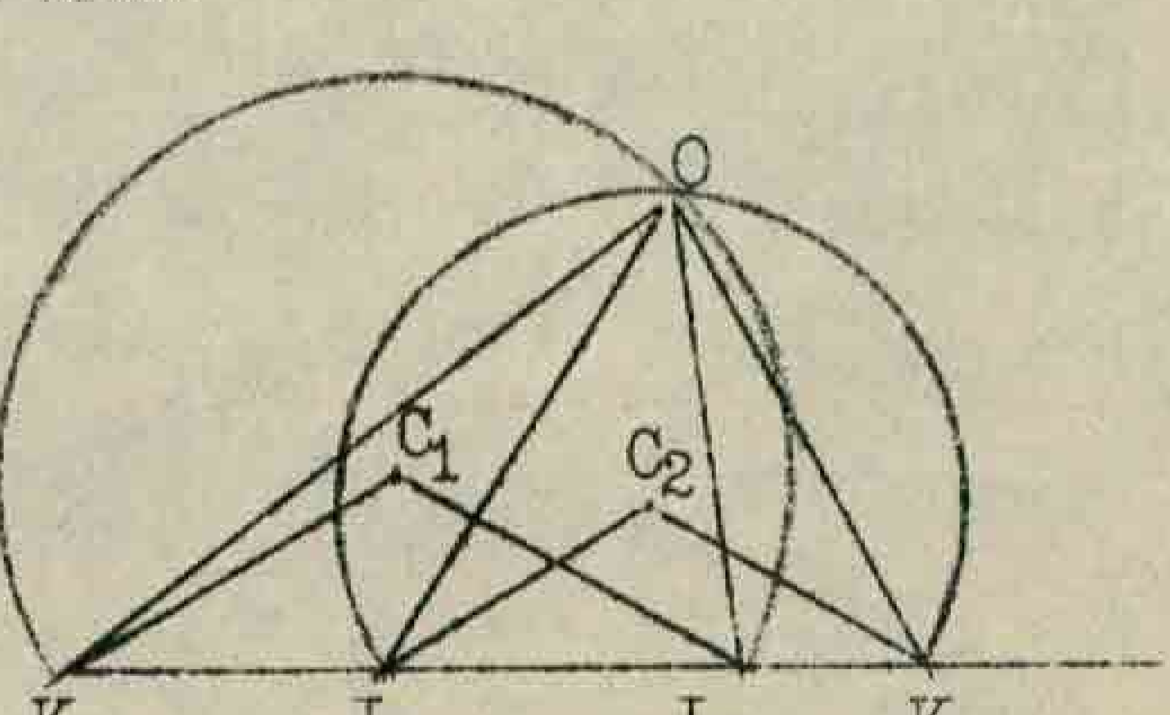
בדמיון גמור לקודם מביאים לידי סתירה כל הצעת בניה למציאת מרכז המעגל בסרגל. בניה ב E המורכבת מישרים מעתקת לבניה דומה לה ב E'. אך הואיל ואף אחד מן המרכזים M ו N אינו עובר שוב למרכז המעגל, אין הבניה ב E' יכולה להביא למטרה ב E. אך הואיל ו E ו E' שוי-זכויות בהכרח לגמרי ביחס לבניה המדוברת, לא תתכן בניה כזאת בכלל.

לא נשאר לנו מעתה אלא לשים את הנקודה O כך, שתתקים דרישתנו על התלכדות חוצי-הזוית בשני המשולשים OK_1K_2 ו OL_1L_2. אם יושם לב כי $\angle K_1OL_2=\angle K_2OL_1$ (מה שמסיקים על ידי חבור מן השויונות

$$\angle K_1OW = \angle K_2OW$$
$$\angle L_2OW = \angle L_1OW \;),$$

נוכל לנהוג באופן הבא:

נבחר $\angle K_1OL_2 = K_2OL_1 = \delta$ כרצוננו ונרשום מעל ל K_1L_2 ומעל ל K_2L_1 כמיתרים את המעגלים, המכילים את δ כזויות –

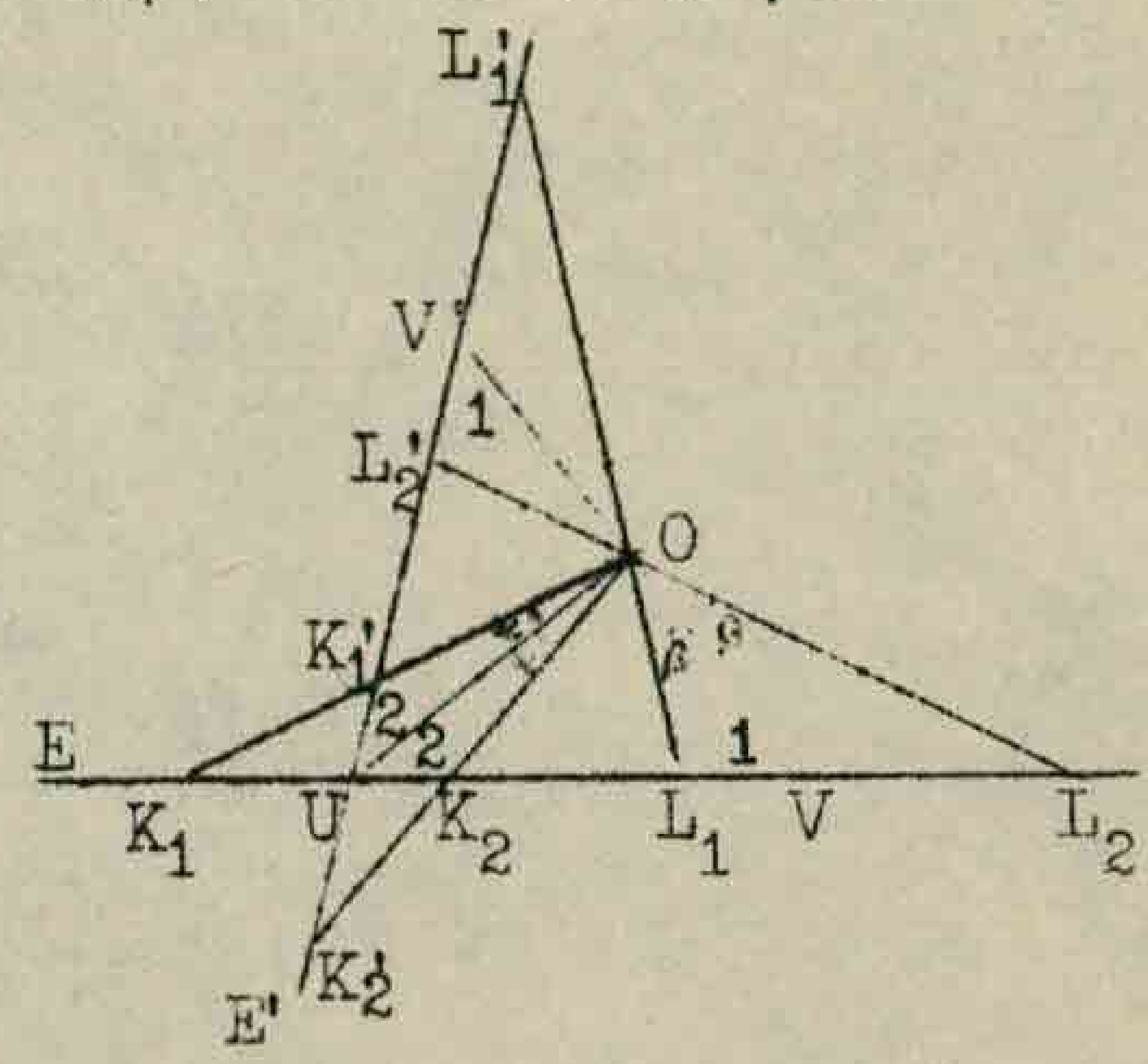


ציור 4.

הקף [1]. שתי קשתות-המעגל הללו, שהכרח להן להחתך, הואיל ושיתוריהן מתלכדים בחלקם, נחתכות ב O (ציור 4). יהיה לנו אפוא קודם כל $\angle K_1OL_2=\angle K_2OL_1$ וכתוצאה מזה גם $\angle K_1OL_1=\angle K_2OL_2$. חוצה-הזוית של $\angle L_1OL_2$ חוצה אפוא גם את $\angle K_1OK_2$, מה שרצינו להשיג.

7. נשאר עוד לטפל במקרה, כאשר שני המעגלים הנתונים בלי מרכז נתון נמצאים זה מחוץ לזה. במקרה זה נקבל כמובן גם כן שני חרוטי-הטלה הנמצאים זה מחוץ לזה, ומן הנמנע למצוא חוצה-זוית משותף באיזה מצב שהוא של O במשולשים OK_1K_2 ו OL_1L_2.

במקרה זה עלינו לקחת לנו לעזר את החרוט הקדקדי לאחד החרוטים (ציור 5). בכדי ש E' יחתוך את החרוט הקדקדי $OL_1'L_2'$ של OL_1L_2 ואת החרוט OK_1K_2 ב $K_1'K_2'$ כחתוך צמוד למישור E, מוכרח ראשית חוצה-הזוית OV של L_1OL_2 לחתוך את המישור E באותה זוית, שבה חותך חוצה-הזוית OV' של $L_1'OL_2'$, המתקבל כהמשך אחורנית של OV, את המישור E'; ושנית מוכרח חוצה-הזוית OU של K_1OK_2 לחתוך את המישורים E ו E' בזויות שוות. מצב המישורים כלפי הישרים נתן להבחנה מתוך הציור. מתוך המצב של VOV' נובע, כי המשולש UVV' הוא שוה-שוקים. מתוך שיווי הזויות, ש OU יוצר עם E ו E', יוצא שוב, כי UO הוא חוצה-הזוית בנקודה U במשולש שוה-השוקים UVV'. הואיל ובמשולש שוה-שוקים חוצה-הזוית דרך הקדקוד הוא כאחת גם הגובה, לאמור מאונך לבסיס (כאן VV'), תהיינה הזויות VOU ו $V'OU$ זויות ישרות.



ציור 5.

בסמונים שבציור 5 יהיה אז:

$$\angle K_1OL_1 = 90^\circ + \alpha - \beta$$

$$\angle K_2OL_2 = 90^\circ - \alpha + \beta$$

ובכן

$$\angle K_1OL_1 + \angle K_2OL_2 = 180^\circ \qquad (1)$$

הנקודה O מוכרחה אפוא להמצא כך, שתתקים לזויות על יד O המשואה (1). ואולם אם דבר זה קורה, מאונכים חוצי הזויות K_1OK_2 ו L_1OL_2 באמת זה לזה, כי

$$\begin{aligned} 2\angle UOV &= 2\angle UOK_2 + 2\angle K_2OL_1 + 2\angle L_1OV \\ &= (\angle K_1OU + \angle UOK_2 + \angle K_2OL_1) \\ &\quad + (\angle K_2OL_1 + \angle L_1OV + \angle VOL_2) \\ &= \angle K_1OL_1 + \angle K_2OL_2 = 180^\circ, \end{aligned}$$

ובכן

$$\angle UOV = 90^\circ .$$

אך אם דבר זה קורה, אפשר לשים את המישור E', כנתון בציור, כך שיחתוך את שני החרוטים בחתוך צמוד למישור E. הטלת המישור E על E' מן הנקודה O נותנת אז שוב את ההעתקה הנדרשת בהוכחתנו, שמתוכה אנו מסיקים כמו עד כה, כי אין במציאות בניה מרכבת מישרים בלבד של מרכזי המעגלים K_1K_2 ו L_1L_2.

ועתה בכדי למצוא נקודה O בעלת המצב המתואר, ביכלתנו לבחור לנו כאות נפשנו אחת משתי הזויות $\angle K_1OL_1=\varphi$ ו $\angle K_2OL_2=\psi$; אלא שסכומן צריך להיות 180°. אנו רושמים אז מעל ל K_1L_1 את קשת-המעגל, המכילה את φ כזוית-הקף, ומעל ל K_2L_2 את קשת-המעגל בעלת זוית-ההקף ψ. מאחר ש K_1L_1 ו K_2L_2

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

[1]) אם מרכזי המעגלים האלה הם C_1 ו C_2, תהיינה גם זויות-המרכז $K_1C_1L_2$ ו $L_1C_2K_2$ שוות ביניהן. מכאן נובעת ההוראה הבאה לבנית הצורה 4:

$$\angle C_1K_1L_2 = \angle C_2L_1K_2 = 90^\circ - \delta .$$

מתלכדים בחלקם לפי ההנחה, מוכרחות שתי הקשתות לחתוך זו את זו; נקודת-חתוכן היא אז נקודה O בעלת התכונה המבוקשת.

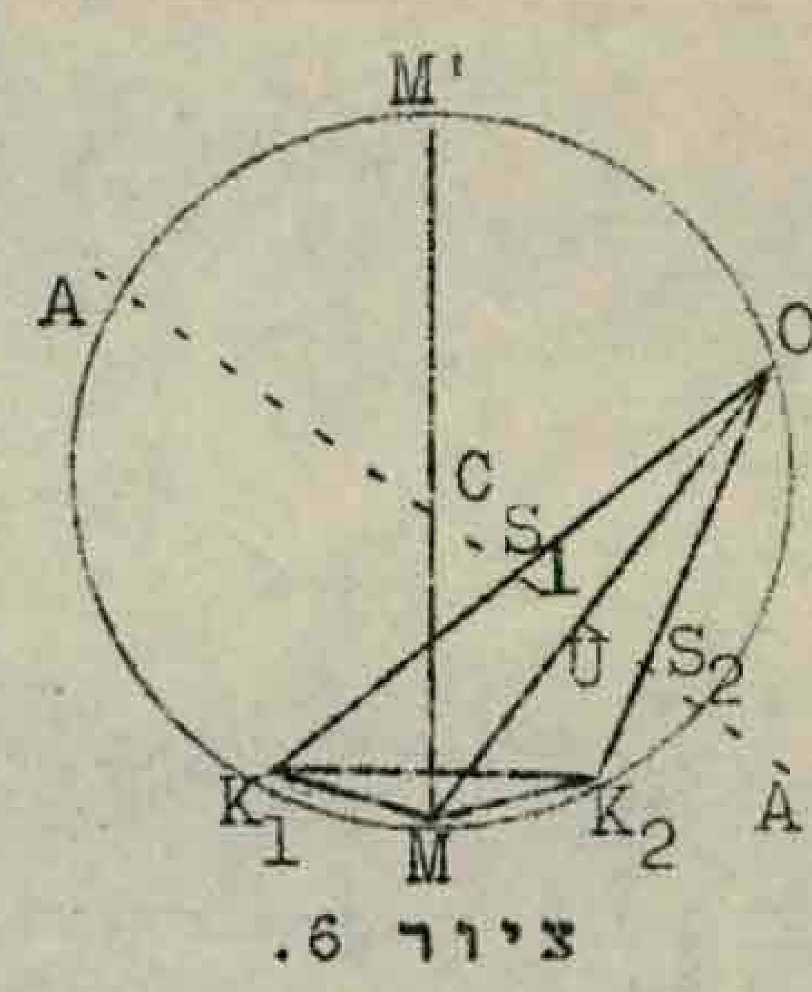
בזה השלמנו את הוכחת המשפט, כי שני מעגלים בלתי נחתכים בלי מרכז אינם מספיקים, בכדי לעשות את כל הבניות האלמנטריות בנות-בצוע בסרגל בלבד.

השלמה:

הוכחת המשפט על החתוכים הצמודים בחרוטים מעגליים משופעים. בסעיף 4 נחחנו משפט על החתוכים הצמודים בחרוטים מעגליים משופעים, שהשתמשנו בו בקביעות, ושאמנם דחינו את הוכחתו לאחר כך. עתה נביא את ההוכחה הזאת.

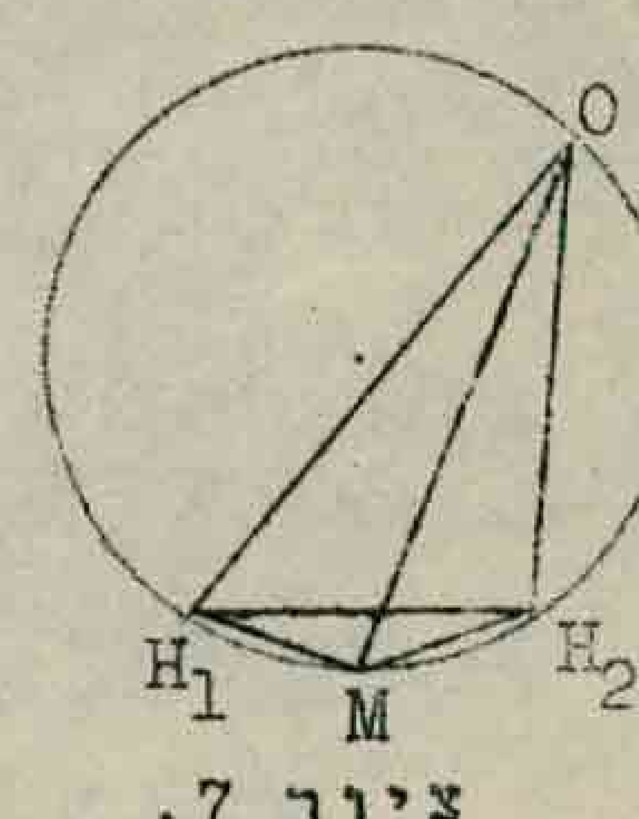
נתאר לנו את החרוט המעגלי המשופע שוב כמו עד כה כשהוא מצויר בחתך (ראה ציור 6). מישור-הציור יעבור דרך הקדקוד O של החרוש ויהיה מאונך למעגל הבסיס, בחתכו אותו בקטרו K_1K_2. מישור-הציור יהיה אז בעליל מישור-סמטריה של החרוט המשופע. מטרתנו היא למצוא מישור-סמטריה נוסף.

נרשום סביב המשולש OK_1K_2 את המעגל המקיף. במשולש זה נעביר את חוצה-הזוית של הזוית K_1OK_2, שהמשכו חותך את המעגל ב M. הואיל ועל שתי הזויות K_1OM ו K_2OM להיות שוות זו לזו, מוכרחות גם קשתות-המעגל K_1M ו K_2M להיות שוות זו לזו, הואיל ולזויות-הקף שוות שיכות קשתות שוות. האנך ממרכז המעגל המקיף C על המיתר K_1K_2, החוצה את המיתר הזה, פוגש אפוא גם הוא את המעגל המקיף בנקודה M. אם נתן למעגל המקיף להסתובב סביב הציר M'CM, ירשום כצורת-סיבוב כדור. על כדור זה נמצאים מעגל-הבסיס K_1K_2 של החרוט ואף הקדקוד O; הכדור מקיף אפוא לחרוט. הנקודה M מרוחקה אפוא בשוה מכל נקודות מעגל-הבסיס K_1K_2.



ציור 6.

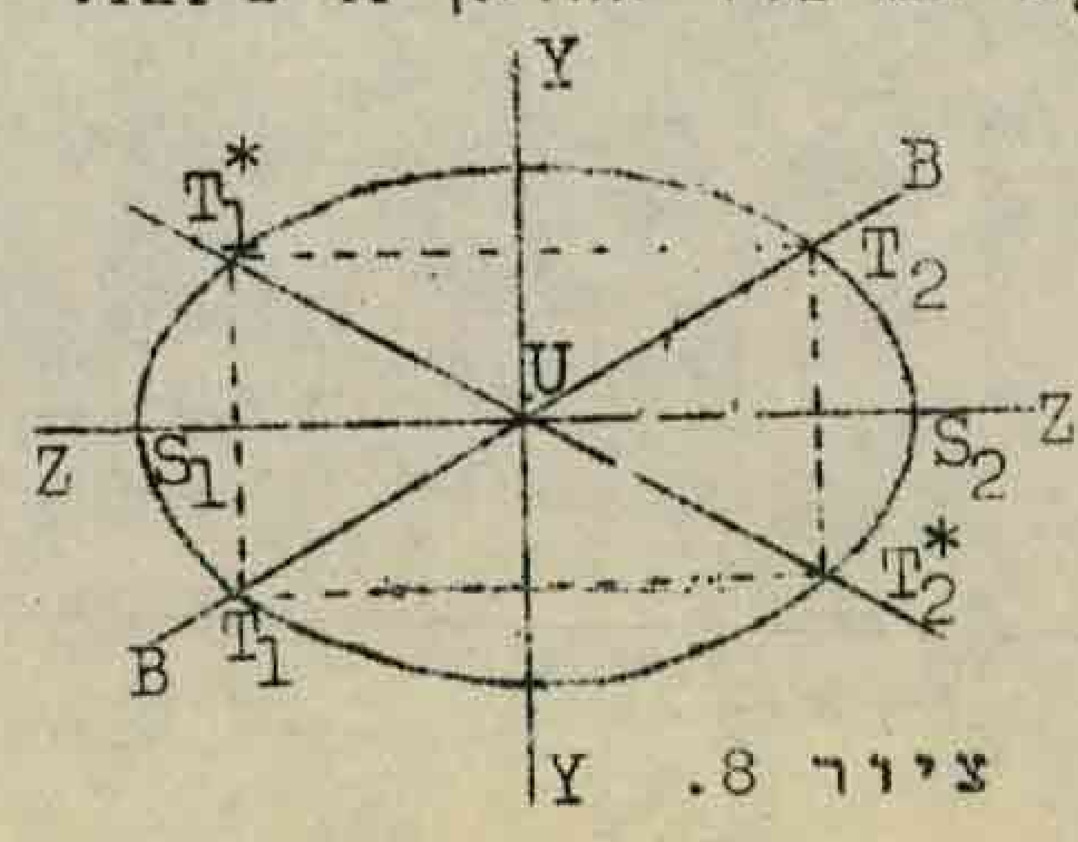
הישר OM ממלא אפוא בחרוט תפקיד מיוחד, שגרם לכך, לצינו כציר החרוט. הואיל ואם מעבירים דרך הציר מישור, הוא חותך את החרוט במשולש בעל הקדקוד O ושני קדקדים הנמצאים על מעגל-הבסיס, שיסומנו ב H_1 ו H_2; את הכדור הוא חותך במעגל, המקיף למשולש-החתך OH_1H_2. על מעגל מקיף זה נמצאת גם הנקודה M ונקבל צורה, הדומה כליל לציור 6 (ציור 7). הציר OM מוכרח להיות חוצה-זוית גם במשולש OH_1H_2, כי בגלל מצב הנקודה M ביחס למעגל-הבסיס של החרוט שוים שני המיתרים H_1M ו H_2M בארכם, וגורמים אפוא לזויות-הקף שוות H_1OM ו H_2OM. נציין אפוא כתוצאה חלקית:



ציור 7.

ציר החרוט המשופע הוא בעל התכונה, שכל מישור העובר דרכו חותך את החרוט במשולש, שציר זה הוא חוצה-זוית לו.

נחתך נא אפוא את החרוט במישור E, המאונך לציר החרוט; מישור זה מאונך כמובן גם למישור-הציור, שבו נמצא ציר החרוט. בציור 6 צוין עקב המישור החותך A ב AA. במישור A נולדת צורת-חתוך כחתוך עם החרוט המשופע. בציור 8 צוירה צורת-חתוך זו, אחרי שהמישור A נלקח כמישור-ציור. ציר החרוט מאונך אפוא למישור-הציור החדש הזה. מישור-הציור הישן חותך את מישור-הציור החדש בעקב ZZ. נניח כי מישור B העובר דרך הציר אך רצוני זולת זה חותך מן המישור A את העקב BB, שבו הנקודות T_1T_2 הן נקודות החרוט. הואיל ובמשולש T_1CT_2 מאונך הציר UO ל T_1T_2 וחוצה כאחת לפי התוצאה החלקית הנזכרת למעלה



ציור 8.

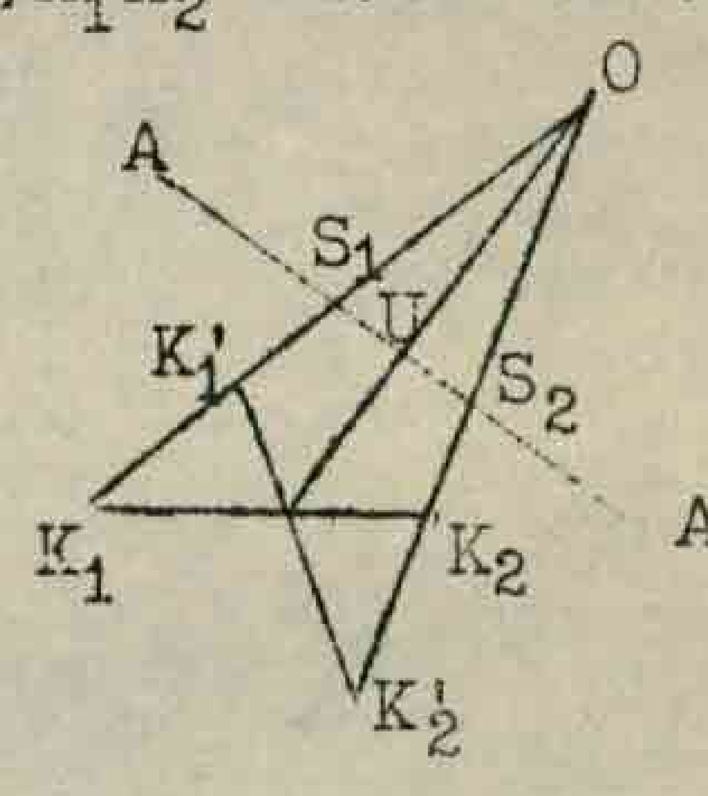
את הזוית T_1OT_2 [1], יהיה בהכרח $T_1U=T_2U$.[2] הנקודה U היא אפוא מרכז סמטריה של צורת חתוך החרוט במישור A.

לפיכך מוכרחות להמצא בצורת החתוך בין אחרות גם הנקודות T_1^* ו T_2^*, שהן ביחס ל ZZ תמונות-מראה של T_1 ו T_2, לפי ש ZZ מוכרח להיות קו-הסמטריה של הציור 8, הואיל ו"מישור הציור הישן", ש ZZ הוא עקבו, היה מישור-סמטריה של החרוט המשופע.

רואים עתה בנקל, כי גם הישר YY המאונך ל ZZ ב U מוכרח להיות קו-סמטריה של הציור. כי 4 הנקודות $T_1T_2^*T_2T_1^*$ יוצרות מלבן שמרכזו U. (בגלל $T_1U=T_2U$ יהיה בתמונות-המראה גם $T_1^*U=T_2^*U$; נוסף לזה שוות שתי הזויות הקדקדיות $\angle T_1UT_1^*$ ו $\angle T_2UT_2^*$ זו לזו, לכן חופפים שני המשולשים $T_1^*T_1U$ ו $T_2^*T_2U$ ו $T_1T_1^*=T_2T_2^*$. הואיל ונוסף לזה מקבילים $T_1T_1^*$ ו $T_2T_2^*$ זה לזה כאנכים על ZZ, יהיה $T_1T_2^*T_2T_1^*$ מקבילית. יש לה שני אלכסונים שוים בארכם T_1T_2 ו $T_1^*T_2^*$, לכן היא מלבן.) דיון כזה יפה כחו כמובן לא רק לגבי ציורנו המיוחד, כי אם אפשר להקים באפן כללי לגמרי את המשפט: צורה, שיש לה קו-סמטריה ועליו מרכז סמטריה, יש לה גם קו-סמטריה שני, המאונך לקו הראשון במרכז הסמטריה.

פרוש הדבר הזה לגבי החרוט המשופע הוא, כי המישור העובר דרך הציר והמאונך למישור-הציור בציורים 6 ו 8, הוא מישור סמטריה שני של החרוט. כי במישור זה נמצא הישר YY, שעלינו לדמותו לנו בציור 6 כמאונך למישור-הציור בנקודה U.

אם משקפים את החרוט במישור-סמטריה שני זה, מתלכדת תמונתו בו בעצמו; הגדה זו אינה אלא תאור של הסמטריה הנדונה. ואולם השקוף זה עובר המעגל K_1K_2, הנמצא על החרוט, לתמונתו $K_1'K_2'$, שהיא כמובן שוב מעגל ונמצאת בהכרח גם היא על החרוט (ציור 9). מעגל זה הוא חתוך צמוד לחתוך המעגל K_1K_2. מצב מישורו ביחס לציר החרוט הוא בדיוק אותו, כפי שנלקח למעלה להגדרת החתוך הצמוד. על כל פנים אין המעגל K_1K_2 מתלכד בתמונתו, הואיל ודבר זה לא יקרה אלא אם כן מישור המעגל מאונך לציר החרוט. ואולם אז היה לנו נגד ההנחה חרוט ישר במקום משופע.



ציור 9.

בזה הוכחנו את המשפט שהשתמשנו בו למעלה על החתוכים הצמודים בחרוטים משופעים.

מתוך "מספרים וצורות", תרגם דב ירדן.

---

1) היא לא צוירה כמובן בציור, לפי ש O אינו נמצא במישור הציור, אלא יש לדמותו כמאונך מעל ל U.

2) בדיון מפורט יותר נתן להוכיח כי צורת חתוך זו היא אלפסה. אך אין זה מענינו כאן.

הוכחה פשוטה למשפט על סכום תכולות הפנות החיצוניות בארבעון

זבולון שוכטן

ב"טכניקה ומדע" חוברת 26, כסלו-טבת תשי"א, עמוד 9 הגדיר דב יוז'וק כפנה חיצונית בארבעון את הפנה המשולשת, הנוצרת על ידי פאת הארבעון והמשך שתי פאות אחרות, הנחתכות עם פאה זו בקדקד אחד. הוא הוכיח שם כי סכום תכולות שלש פנות חיצוניות על יד הבסיס בארבעון, הנמצאות כולן מאותו צד של הבסיס שבו נמצא הארבעון, פלוס תכולת הפנה הפנימית של הארבעון הנגדית לבסיס, שוה לחצי שטח כדור-היחידה, אם המסכי הפאות הצדדיות הם באותה מגמה. מכאן יוצא כרגע כי סכומי התכולות של כל אחת משתי השלישיות של פנות חיצוניות על יד הבסיס בארבעון, הנמצאות כולן מאותו צד של הבסיס שבו נמצא הארבעון והבנויות במגמה זו או אחרת, שוים. ברצוני לתת כאן למשפט אחרון זה הוכחה אחרת בלתי תלויה.

לכל זוית דו-פאית של הארבעון ליד הבסיס מתאים דו-צלע כדורי, הנקבע על ידי הזוית הדו-הפאית באפן חדערכי. אם נבנה את הפנות החיצוניות במגמה זו או אחרת ישארו קבועים שלשה דו-הצלעות הכדוריים ושלש הפנות הפנימיות. לכן שוות שתי השלישיות של הפנות החיצוניות.

בעיות, תצפיות והשערות

1. יהי $p=4k+3$ מספר ראשוני. תהי K קבוצת המספרים $1,2,\ldots,p-1$. הוכח שקבוצה חלקית של K, המכילה כל רבוע טבעי שב K והמכילה יחד עם a את $p-a$ ויחד עם a ו b את ab ו a/b (באם הם שיכים ל K), מתלכדת עם K, או תן דוגמה נגדית.

תאודור מוצקין

2. ידוע כי לכל מספר טבעי מצורת $n>1$, $2n\pm1$, $3n-1$, $4n-1$, $6n-1$ (n טבעי) יש לפחות מחלק ראשוני אחד מאותה צורה. האין אלה כל הצורות הלינאריות בעלות תכונה זו?

דב ירדן

3. ידוע כי לכל מספר טבעי מצורת

$$20a^2-1 \qquad 8a^2-1 \qquad 12a^2-1 \qquad (2a+1)^2+4 \qquad (a\geq 1)$$

יש בהתאמה לפחות מחלק ראשוני אחד מצורת

$$5b-1 \qquad 8b-1 \qquad 12b-1 \qquad 8b+5 \qquad (b\geq 1)$$

(a ו b טבעיים). הקימים עוד מספרים טבעיים בעלי תכונה דומה?

דב ירדן

4. חלק רבוע נתון למצולעים קמורים באפן שמחוגי המעגלים הרשומים בהם לא יעלו על גדל נתון וסכום צלעותיהם יהיה מינימלי.

שמוש מעשי: יש לסרג חלון רבועי בסריג כך שגנב לא יוכל לחדר ושהסריג לא יסתיר אור אלא במדה מינימלית.

דב ירדן

5. נתונים במרחב קטע AB וישר c. נקודה O מתנועעת על c. חקר את השתנות הזוית AOB.

תאודור מוצקין

6. בטא את הזוית דו-הפאית הששית בארבעון על ידי 5 האחרות.

תאודור מוצקין

7. מהי נקודת הארבעון שסכום מרחקיה מארבעת קדקדיו הוא מינימלי?

דב ירדן

8. יהי נתון צרור 4 קרנים כעין אותו המתקבל אם מחברים את המרכז בארבעון משוכלל לכל אחד מארבעת קדקדיו. 6 הזויות בין הקרנים שוות והקוסינוסים שלהם שוים ל $-1/3$. הוכח כי אם לוקחים על כל אחת מן הקרנים נקודה, יהיה סכום המרחקים מקדקד הצרור לארבע הנקודות הנבחרות על הקרנים (שאפשר לראותן כארבעה קדקדי ארבעון) מינימלי.

חיים חנני ותאודור מוצקין

9. השערה. הארבעון קטן-סכום-שטחי-הפאות נתון-הנפח הוא ארבעון משוכלל.

דב ירדן

10. הקימת הגבלה מלעיל לתכולת פנת הארבעון בעלת התכולה המינימלית (למשל, האם היא אינה עולה על תכולת פנת ארבעון משוכלל)?

דב ירדן