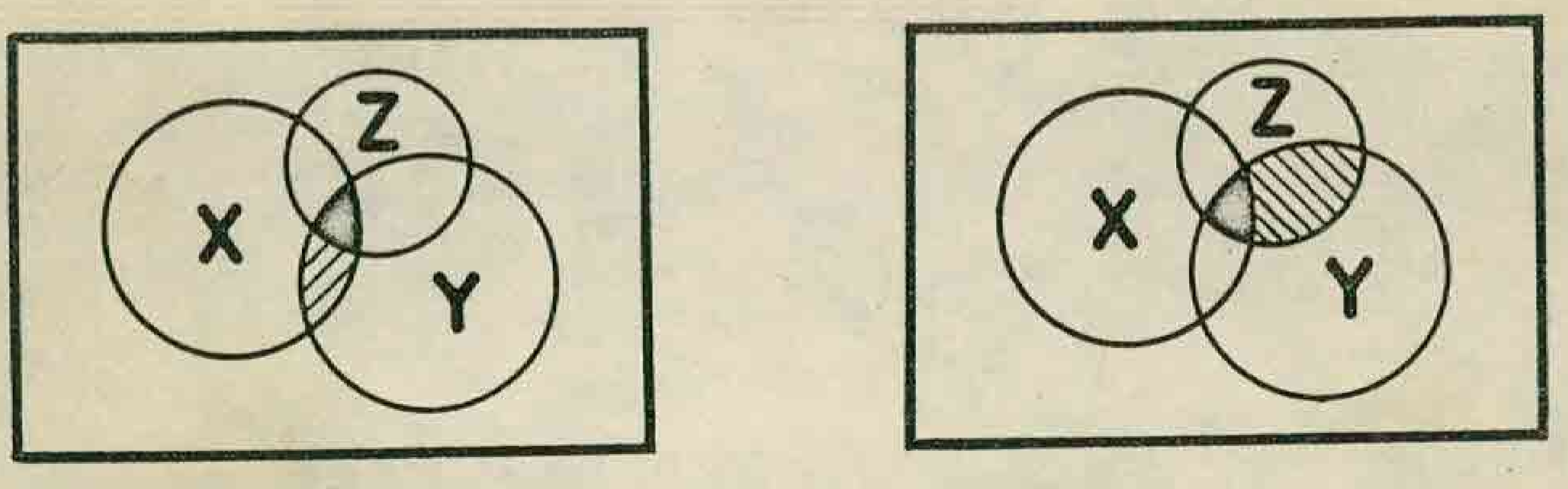
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



$$(X\cap Y)\cap Z = X\cap(Y\cap Z)$$

כרך 1 — חיפה, אייר תש"ך — מאי 1960 — מס' 1

יוצא לאור בחסות
ה"אגוד למתמטיקה בישראל"

עם הופעת העתון

פרופ׳ אברהם הלוי פרנקל

בפתחי בהרצאותי באוניברסיטה העברית לפני למעלה משלשים שנה הבחנתי מיד שרמתם הממוצעת של הסטודנטים, וכן עומק התענינותם, עולה במידה ניכרת על זו של חבריהם בארצות שונות באירופה התיכונה והמערבית. תופעה מעודדת זו מקורה היה לא רק בכשרון טבעי אלא גם בהכנה טובה בבתי-הספר התיכוניים (שמספרם היה מועט בזמן ההוא); ביקורי בבתי-הספר במקצועות שונים הראו כי למתמטיקה נועדה הערכה מרכזית בעיני מורים ותלמידים גם יחד.

אמנם בזמן ההוא היו רוב תלמידי המתמטיקה באוניברסיטה ילידי ארצות מזרח ומרכז אירופה; אך במידה בה גדל אחוז ילידי הארץ גבר עוד יותר מספר המוכשרים במידה לא-רגילה. היום לא רק כל הפרופסורים למתימטיקה באוניברסיטה העברית ורוב מרציה ומורי הטכניון הם מוסמכי האוניברסיטה העברית, אלא יותר מתריסר בין מוסמכיה נתמנו כפרופסורים בארה"ב ובקנדה; חלקם חזרו ועומדים לחזור ארצה וחלקם נשארו שם במשרות מכובדות מאד. (תופעה של השנים האחרונות היא שגם בנות מצטיינות בין תלמידי המתמטיקה באוניברסיטה).
למתמטיקה הישראלית יש שם מכובד בעולם והכנס הבינלאומי המתקיים ביולי 1960 בירושלים הוא אחד הסימנים לכך.

בתנאים אלה טבעי הדבר שבבתי ספר תיכוניים בארץ הוקדשה ומוקדשת תשומת לב מיוחדת להתעמקות מתימטית גם מחוץ למסגרת תכנית הלימודים. אם אין זכרוני מטעה אותי, היו החברים משה כהן, מהרשק ונתניהו הראשונים מבין מוסמכי האוניברסיטה שפעלו בכוון זה, ומאז הלכו רבים בעקבותיהם. כן היתה ניכרת התענינות מעמיקה למתימטיקה מחוץ לחינוך התיכון, הן בהתישבות העובדת הן בערים. מלבד "חוגים" מיוחדים ללימוד מקצועות מתימטיים שאינם נכללים בתכנית הלימודים, התבטאה ההתענינות בעתונים הפונים אל גילים למטה מלימודים אקדמיים וגם למורי בתי הספר; בעיקר "דפים למתמטיקה" שיצאו מ-1942 ואילך ביזמתו של י. בר-הלל, י. נוימן וד. ירדן במשך חמש שנים, ו"גליונות מתמטיקה ופיסיקה" בעריכתו של צבי שור (1954-1958). גם את ה"רבעון למתמטיקה", שעליו מסר את נפשו דב ירדן, יש להזכיר במסגרת זו.

ועכשיו עלינו להודות לחברי המערכת אשר עמדו בפרץ להחזיר עטרה ליושנה ולהוציא "גליונות מתמטיקה", שחוברתם הראשונה עומדת לפני הקוראים.

בין המאמרים שבה ארשה לי לציין במיוחד את זה הדן באלגברה של בול, באשר נושא זה מבליט כי היום קשורה המתמטיקה הטהורה קשר אמיץ לא רק במתמטיקה שימושית ובפיסיקה כי אם גם בתורת ההגיון.

תודה מיוחדת יש להביע למיכאל משלר שללא עזרתו ספק אם היתה מתגשמת התכנית - כשם שהקדיש במשך שנים רבות תשומה לב להוראת המתימטיקה בביה"ס התיכון בכלל.

ולבסוף אציין רעיון שהתגשמותו טמונה בעתיד. זה שנים מספר התפתחה ברוסיה ובפולין "האולימפיאדה המתימטית", כלומר התחרות שנתית בין תלמידי בתי הספר התיכוניים בנושאים קשים, שבעיקרם רחוקים הם מתכניות הלימודים והדורשים פחות ידיעות, זכרון ובקיאות מאשר חריפות ומחשבה מקורית. אחד מגדולי החוקרים בארה"ב הציע ללכת בעקבות הדוגמה הזאת, ובכנס האחרון של האיגוד למתימטיקה בישראל הרשיתי לי להציע נסיון מקביל גם בארצנו. אם יתגשם הרעיון, הרי טבעי הדבר לנחש כי הגליונות האלה יתרמו את חלקם גם בשטח זה.

ברכותי הלבביות מלוות את העתון החדש, את עורכיו ואת קוראיו.

ערב פסח התש"ך אברהם הלוי פרנקל.

מהמערכת

עם הופעת העתון, נסקור את המטרות של הוצאה זו ואת הדרכים בהן המערכת רוצה להתקדם להגשמתן.

העתון רואה כמטרתו העיקרית קירוב המתימטיקה לשכבות הרחבות של תלמידי בתי-הספר התיכוניים ולחובבים.

מטרתו השניה של העתון היא לשמש חומר קריאה ובמה למורים למתימטיקה ולתלמידים המתעניינים במיוחד במקצוע זה.

והמטרה השלישית היא עידוד פעילות מתימטית בבתי-ספר ובחוגים שונים של אוהדי מתימטיקה.

לאור הנ"ל ינתן בעתון מקום למדורים הבאים:

א. מאמרים על מקצועות ונושאים שונים של המתימטיקה הגבוהה והאלמנטרית, כולל שמושים שונים של המתימטיקה למקצועות מדויקים וטכניים.
ב. מאמרים היסטוריים על התפתחות המתמטיקה ואנשיה.
ג. פתרונות מעניינים של בעיות מיוחדות במתמטיקה אלמנטרית.
ד. מדור בעיות - העתון יארגן תחרות מתמדת לפתרון בעיות במתמטיקה.
ה. מדור אינפורמטיבי על פעולות חוגים מתימטיים ועל גילויים אחרים של פעילות מתימטית בארץ ומחוצה לה.
ו. מדור לשעשועים מתימטיים שונים - משחקים, חידות, פרדוכסים, חשבצים וכו'.
ז. מדור מכתבים למערכת.

המערכת מקוה לשיתוף פעולה הדוק מצד כל אלה שהמתמטיקה והפצתה בקרב הנוער קרובה ללבם.

טופולוגיה - מהי

מיכאל אדלשטיין

1. הטופולוגיה היא אחד הענפים העשירים והמעניינים ביותר של המתימטיקה החדישה. ראשיתה במחצית השניה של המאה הקודמת, שעה שגיאורג קנטור יסד את תורת הקבוצות ופתח בעזרתה אופקים חדשים למחשבה המתימטית. התפתחותה הסוערת החלה עם פרסום עבודותיו של החוקר הצרפתי הנודע פואנקרה לפני למעלה מ-60 שנה, עת הטופולוגיה נקראה בשם analysis situs היינו "חקר המקום". מאז גדל היקף הפרסומים ללא הפסק, עד הגיעו לממדיו הגדולים הנוכחיים.

בעיותיה ומושגיה של הטופולוגיה שאובים ממדורות אחרים של המתימטיקה; תוצאותיה משתקפות רק בעקיפין במדעים השימושיים. לא ייפלא, איפוא, שהסבר מהותה ותחום גבולותיה בפני קהל קוראים שאינו מכיר מקרוב את הלך המחשבות ואת שפתה המיוחדת של המתימטיקה החדישה אינו מהדברים הפשוטים.

במאמר זה נשתדל להסביר מושגים יסודיים אחדים מהטופולוגיה ונעמוד על מספר בעיות הנמצאות בתחום התעניינותה.

2. נתבונן בפונקציה הידועה יפה: $y = \sin x$ ונגביל את ערכי המשתנה הבלתי תלוי לרווח $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$. לכל נקודה x_0 של רווח זה מותאמת ע"י פונקציה זו נקודה מסוימת $y_0 = \sin x_0$ על ציר ה- y -ים ברווח $0 \leqslant y \leqslant 1$. אנו אומרים כי הפונקציה סינוס מעתיקה את הרווח $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ על הרווח $0 \leqslant y \leqslant 1$; $y_0 = \sin x_0$ הוא התמונה של x_0; x_0 הוא המקור של $y_0 = \sin x_0$. אנו אומרים כי $y = \sin x$ הוא העתק של הרווח $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ על הרווח $0 \leqslant y \leqslant 1$ ("על" בא לציין כי כל נקודה שבין 0 ל-1 היא תמונה).

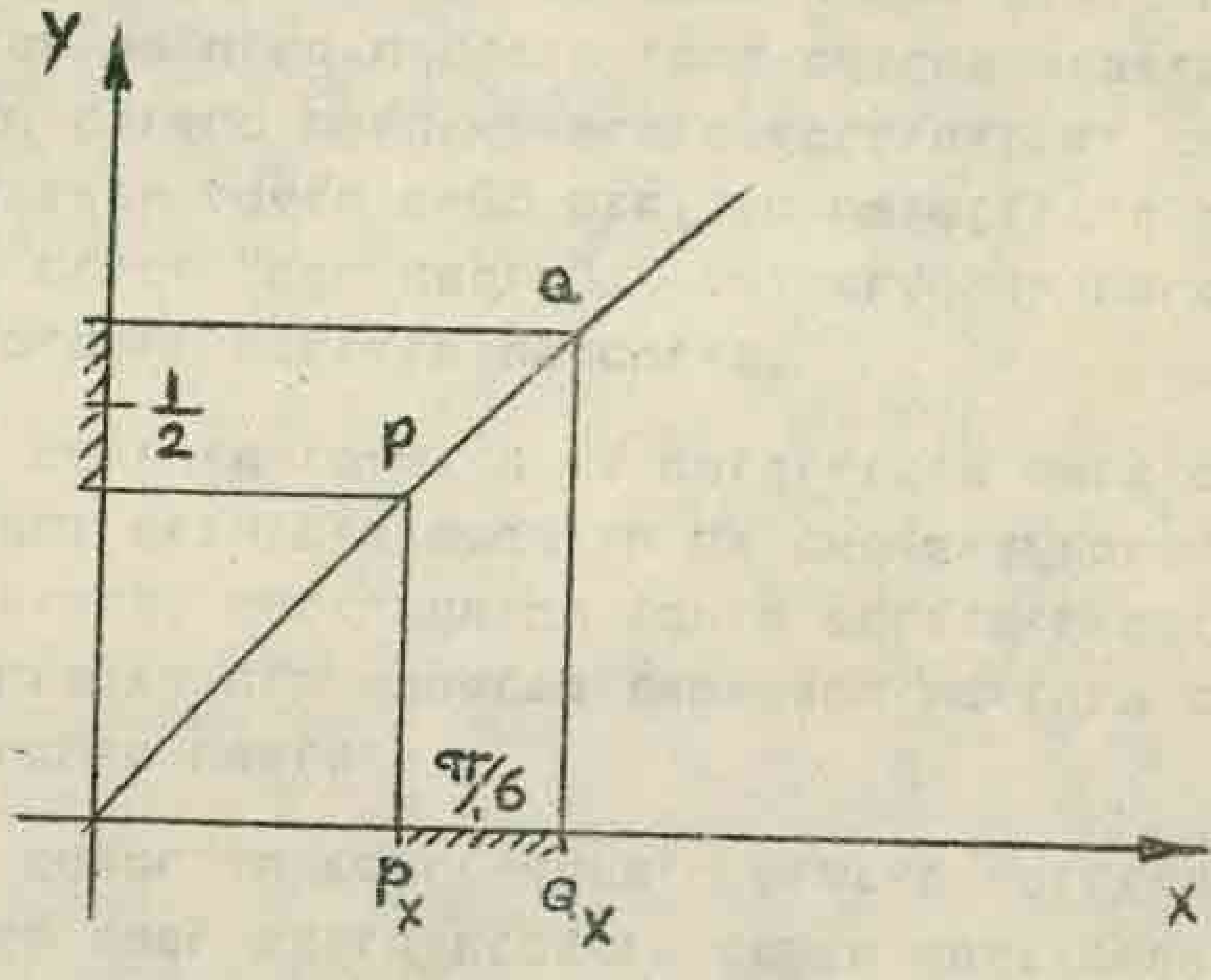
בהעתק שלפנינו, לכל מקור תמונה אחת ולכל תמונה מקור אחד. עובדה זו נציין באומרנו כי ההעתק הוא חד-חד-ערכי.

ובכן, ההעתק של אוסף הנקודות $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ על אוסף הנקודות $0 \leqslant y \leqslant 1$ המבוצע באמצעות הפונקציה $y = \sin x$ הוא העתק חד-חד-ערכי.

נבחור עתה ערך מסוים של x; למשל $x_0 = \pi/6$. תמונתה של נקודה זו תהיה $y_0 = \sin \pi/6 = \frac{1}{2}$. נתבונן באוסף כל הנקודות על ציר ה- y -ים אשר רוחקן מ- $y_0 = \frac{1}{2}$ קטן מ- ε, כאשר ε הוא מספר חיובי נתון כלשהו; אם, למשל, $\varepsilon = 0.1$, הרי לפנינו הרווח שעל ציר ה- y -ים הנקבע ע"י אי השויון: $0,4 < y < 0,6$.
נשאל עתה אם אפשר למצוא רווח על ציר ה-x-ים, המכיל את $x_0 = \pi/6$

(המקור של $y_0 = \frac{1}{2}$) כזה, שאוסף התמונות של כל נקודותיו יהיה
כלול ברווח הנ"ל סביב y_0 .

במקרה שלנו התשובה היא חיובית. בכדי להוכח בכך, די
להעביר דרך קצוות הרווח, שנבחר על ציר ה- y -ים, מקבילים לציר



ה - x - ים עד לנקודות החיתוך P ו- Q עם הגרף של הפונקציה
ומנקודות אלה להוריד אנכים עד לחיתוך עם ציר ה - x - ים בנקודות
P_x ו- Q_x . ברור כי כל רווח חלקי סביב x_0 של הרווח הנקבע
ע"י P_x, Q_x הוא בעל התכונה המבוקשת.

העובדה כי יכולנו לתת תשובה חיובית לשאלה הקודמת מזכה את
ההעתק $y = \sin x$ בתואר העתק רציף; ביתר דיוק, נוכחנו כי
$y = \sin x$ הוא העתק רציף בנקודה $x = \pi/6$. אין קושי
לחזור על בניית המקבילים הקודמת כאשר נקודת המוצא על ציר ה-x-ים
היא נקודה כלשהי, ולכן נוכל לומר באופן כולל כי $y = \sin x$
הוא העתק רציף (בכל אחת ואחת מנקודות המקור).

3. המושגים שהוסברו עד כה בדוגמה המיוחדת ניתנים להרחבה מרחיקה
לכת. במקום הרווחים שעל צירי הקואורדינטות ששימשו לנו כאוספים
של מקורות ותמונות נוכל לצאת מאוספים כלליים ביותר של נקודות
(למשל מעגלים, קוביות, גלילים, אוספים המורכבים מצירופים של
הצורות הקודמות וכו'). לאוסף כלשהו של נקודות נקרא בשם מרחב.
נסמן, איפוא, ב- X וב- Y שני מרחבים (לאו דוקא שונים)

ונקרא בשם העתק של X ל- Y לכלל שלפיו מותאמת באופן חד - משמעי לכל נקודה של X (המקור) נקודה מסוימת של Y (התמונה).
ההעתק הוא חד-חד-ערכי אם למקורות שונים מתאימות תמונות שונות.
ההעתק הוא רציף בנקודה x של מרחב המקורות X, אם עבור סביבה כלשהי של תמונתו אפשר למצוא סביבה כזאת של המקור שאוסף התמונות של כל נקודותיה יהיה כלול בסביבת התמונה הנתונה. את מושג הסביבה של נקודה נתונה אפשר להבין כאוסף כל הנקודות אשר רוחקיהן מהנקודה הנתונה קטן ממספר חיובי נתון;

אם לפנינו העתק חד-חד-ערכי של מרחב X על מרחב Y, הרי שע"י התאמה בה מחליפים את התפקידים של X ו- Y באופן זה שלתמונה מתאימים את מקורה אנו מגיעים להעתק (אף הוא חד-חד-ערכי) של Y על X; העתק זה מכונה בשם העתק הפוך לנתון; כך למשל $x = \arcsin y$ הוא ההעתק ההפוך של $y = \sin x$ שבדוגמה הקודמת.

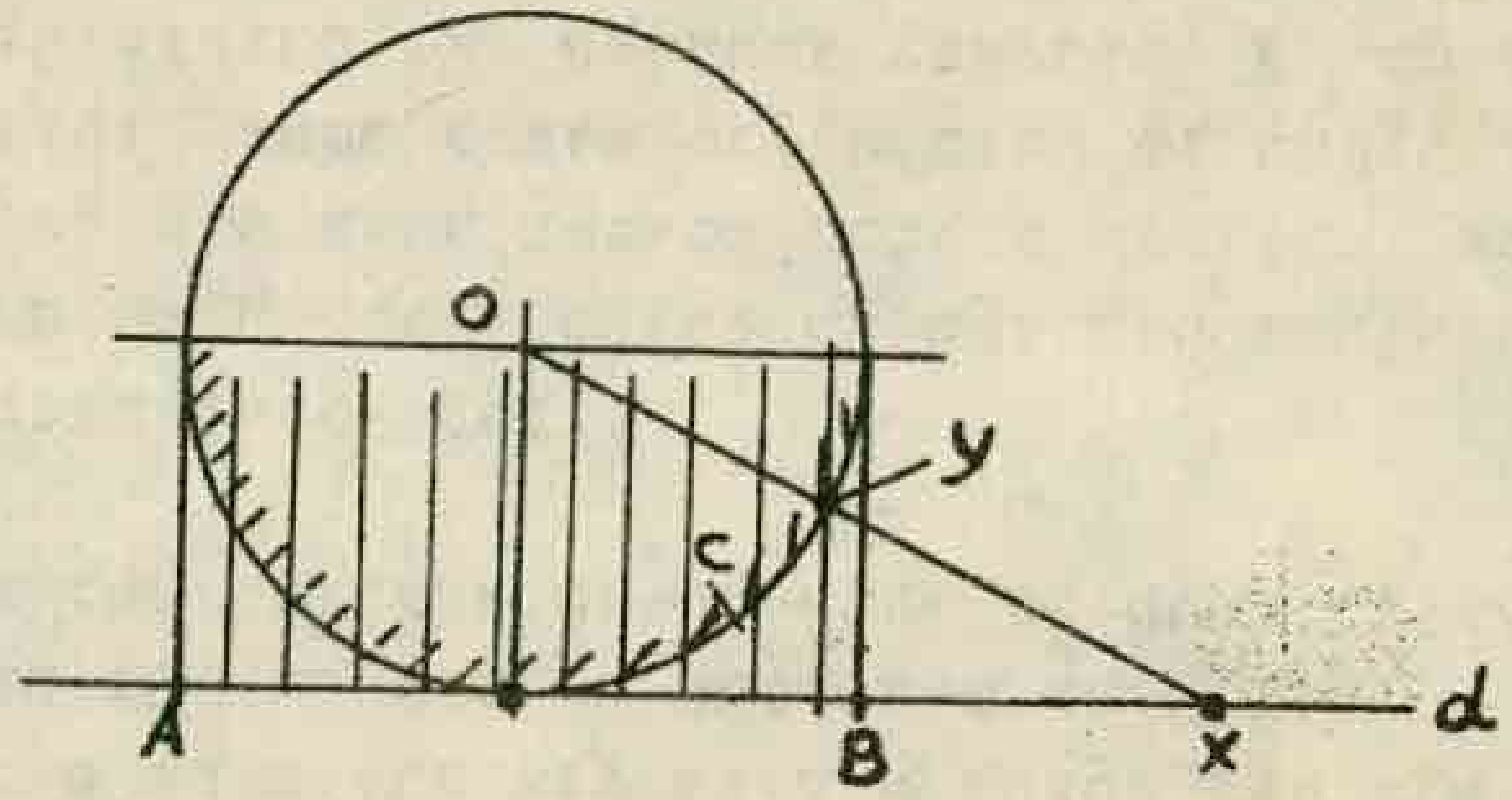
4. שני מרחבים X ו- Y הניתנים להעתקה חד-חד-ערכית ורציפה כזו שגם ההעתק ההפוך רציף נקראים <u>הומיאומורפיים</u>; ההעתק עצמו נקרא בשם <u>הומיאומורפיזם</u> או גם בשם <u>העתק טופולוגי</u> של X על Y.

עתה נוכל להגדיר את הטופולוגיה כענף המתימטיקה העוסק בחקר התכונות המשותפות לצורות גיאומטריות הומיאומורפיות או במלים אחרות בתכונות שאינן משתנות בהשפעת העתק טופולוגי. תכונות מסוג זה נקראות בשם תכונות טופולוגיות. כדוגמה לצורות הומיאומורפיות נוכל להזכיר את המעגל, האליפסה, המשולש וכן כל הצורות המתקבלות מהן ע"י עוות שאינו מלווה קריעה או חיתוך עצמי. הצורות האלה אינן נבדלות האחת מחברתה מנקודת השקפתה של הטופולוגיה.

נוהגים לעתים להתבטא בשפה ציורית כי הטופולוגיה היא הגיאומטריה של הגומי; הכוונה היא כמובן לכך שאפשר לקבל מגוף נתון גופים הומיאומורפיים ע"י דפורמציה אלסטית.

5. לעתים תהיה מציאת העתק טופולוגי בין שתי צורות הומיאו-מורפיות דבר פשוט. נתבונן, למשל, בשתי הצורות הגיאומטריות הבאות: האחת הישר d והשניה קטע פתוח (= מחוסר קצוות) AB.

יהי C מעגל בקוטר שוה לאורכו של הקטע AB המשיק ל- d בנקודה החוצה את AB . ע"י הטלה מרכזית מ-O (מרכז המעגל) עוברת כל



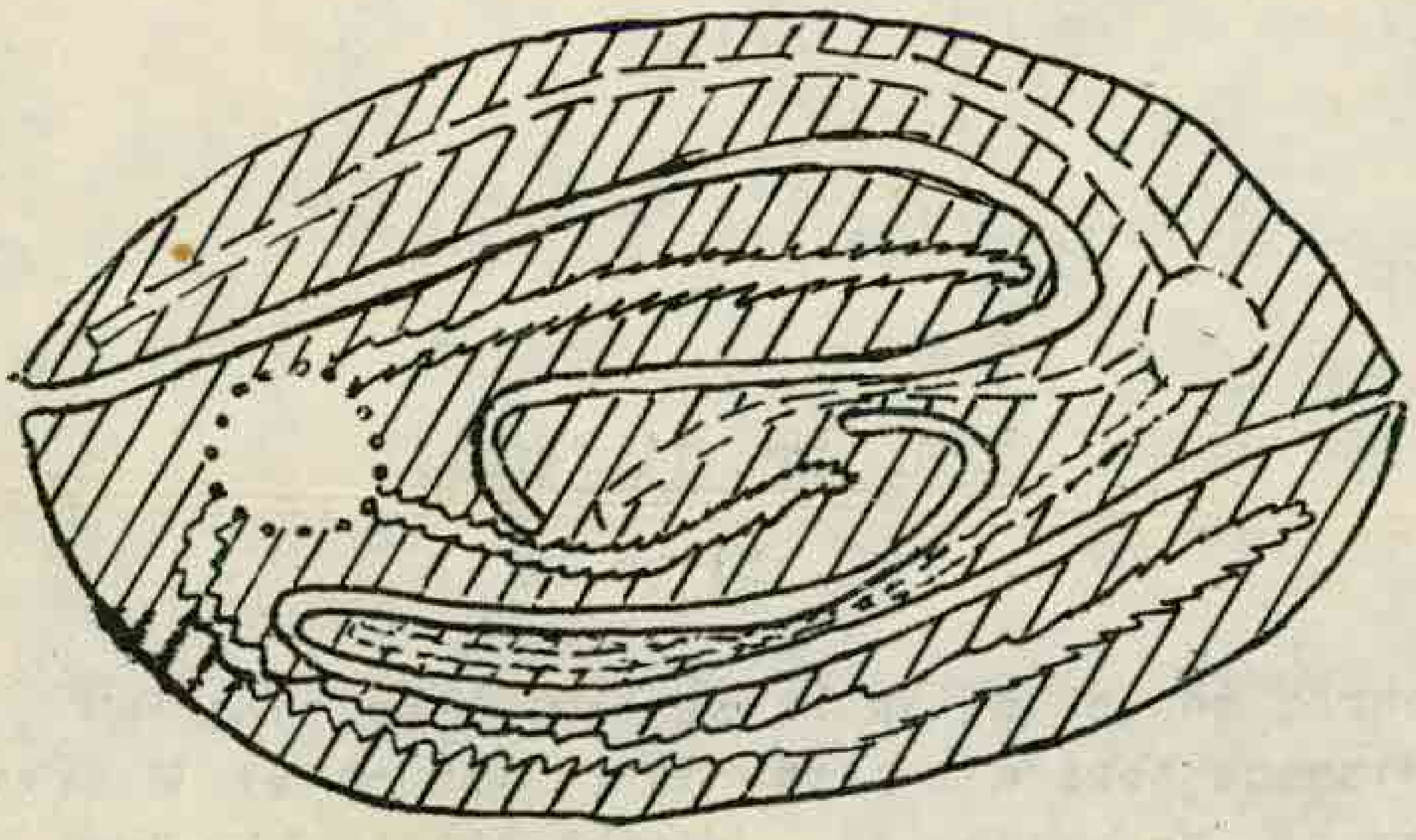
נקודה x של הישר לנקודה y על חצי המעגל הפתוח (ז.א. ללא קצוות) ואפשר על נקלה להוכח שלפנינו העתק טופולוגי של d על חצי המעגל האמור; את חצי המעגל, מאידך גיסא, נוכל להעתיק באופן טופולוגי על AB למשל ע"י הטלה ניצבת ל- d .

ע"י שימוש בחצי כדור במקום חצי מעגל ובשתי הטלות כנ"ל יוכל הקורא להוכח כי המישור הומיאומורפי לפנימו של כדור מעגל כלשהו.

6. לא תמיד קל לגלות אם תכונה מסוימת היא טופולוגית או לאו. נקח לדוגמה את המעגל. המישור מתחלק ע"י המעגל לשני תחומים נפרדים שהאחד מהם הוא פנימו והשני חוצו ואילו המעגל עצמו מהווה שפה משותפת לשני התחומים. כל שתי נקודות של אחד התחומים אפשר לקשור ע"י קו שבור המונח כולו באותו תחום.

מתקבל על הדעת שע"י העתק טופולוגי יתקבל מהמעגל עקום בעל תכונה דומה. עובדה זו היא נכונה אולם, למרבה ההפתעה, אין הוכחתה פשוטה כלל ועיקר. בעיה זו היא אחת הראשונות בהן החלה הטופולוגיה להתענין והיא קשורה בשמו של המתמטיקאי הצרפתי ג'ורדן שניסה להוכיח את המשפט בסוף המאה ה-19. את משפט ג'ורדן אפשר לנסח בקיצור כך: עקום מישורי פשוט וסגור (כלומר תמונה טופולוגית של מעגל) מחלק את המישור לשני תחומים זרים והעקום עצמו הוא שפתו של כל אחד מהם".

7. הטיפול בהוכחתו המדויקת של משפט ג'ורדן הוליד את אחת התגליות הפרדוקסאליות ביותר של המתמטיקה. בראור גילה כי קיימות שפות, (ז.א. גבולה של איזורים מסוימים) של תחומים מישוריים שהם שפה משותפת של מספר תחומים העולה על שניים. עובדה זו, העומדת בסתירה עם ההסתכלות, קיבלה הדגמה פשוטה במיוחד ע"י המתמטיקאי היפאני יונימה. נביא את דוגמתו בצורה התיאורית הבאה:



נתאר לעצמנו אי בים ועליו שני אגמים. אחד מהם אגם של מים מתוקים ואילו השני אגם של מים מינרליים בעל תכונות רפואיות. היות ורצוי שלכל אחד מדרי האי תהיה גישה נוחה לכל שלושת סוגי המים נקבעה התכנית הבאה לעבודות צבוריות: במשך השנה הראשונה תיבנה רשת תעלות כה צפופה עד שכל נקודה של האי תהיה מרוחקת בפחות מ-1 ק"מ הן מתעלת המים המתוקים הן מתעלת המים המינרליים והן מתעלת מי הים; במשך המחצית של השנה לאחר מכן תצופף רשת התעלות כך שתיבנה תעלות אולי צרות יותר המקרבות את סוגי המים השונים עד כדי פחות מ-$\frac{1}{2}$ ק"מ מכל נקודה שבאי. במשך רבע השנה העוקבת יקרבו, ע"י פתוח נוסף של רשת התעלות, את סוגי המים השונים עד כדי $1/4$ ק"מ מכל נקודה של האי וכו'. מבחינה הסתכלותית ברור כי כל שלב ושלב בתכנית דלעיל הוא בר-ביצוע (דבר זה ניתן להוכחה מדוייקת!).

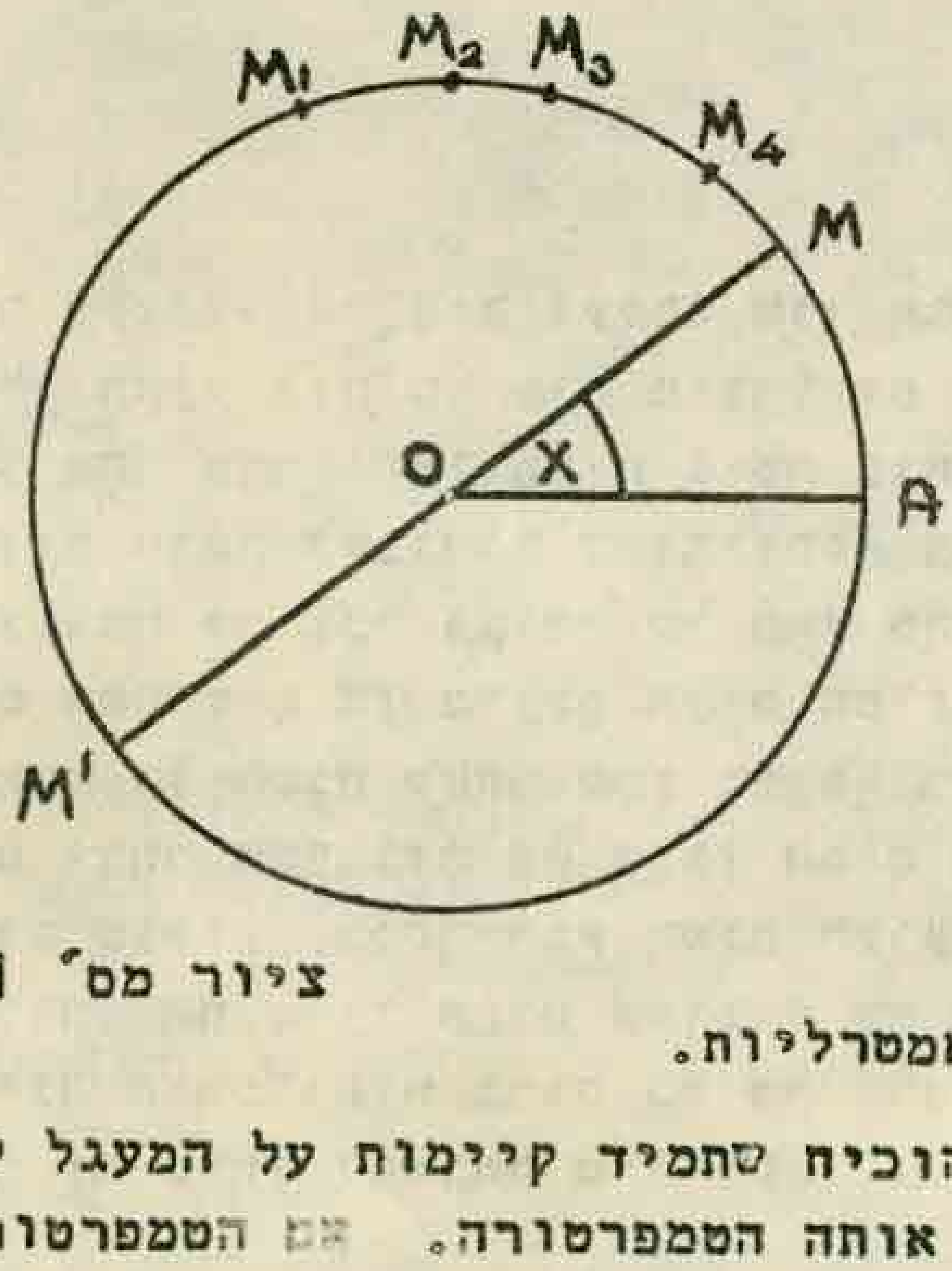
השלמת התכנית תיעשה תוך שנתיים מהתחלתה ובסופה תהיה כל נקודה הנותרת מהאי מונחת על שפת שלושת מאגרי המים. מן האי תשאר אמנם צורה שאינה מכילה כל עיגול מישורי ולו גם קטן ביותר, אולם צורה זו תהווה שפה משותפת של שלושה תחומים: זה הממולא מי-ים, זה הממולא מים מינרליים וזה המכיל מים מתוקים. נעיר, לבסוף, כי העובדה שהאי איננו נעלם כליל אף היא ניתנת להוכחה מתימטית מדוייקת.

במאמרים הבאים נעסוק בבעיות טופולוגיות נוספות.

טמפרטורה על מעגל

מ. רייכבך.

1. יהי נתון מעגל עשוי מברזל או מחומר אחד כלשהו. כל נקודה (חומרית) M (ציור מס' 1) של המעגל היא בעלת טמפרטורה T מסוימת המשתנה בדרך כלל מנקודה לנקודה. את הטמפרטורה T אפשר לתאר כפונקציה של הנקודה M ונרשום $T = T(M)$. מטעמים פיסיקליים אפשר להניח שאם נבחר סדרת נקודות $M_1, M_2, \ldots, M_n$. השואפות לאורך המעגל ל- M: $(M_n \to M)$, הרי הטמפרטורות $T(M_n)$ בנקודות אלו שואפות לטמפרטורה $T(M)$ בנקודה M: $T(M_n) \to T(M)$.



ציור מס' 1

הנקודות M ו- M' (ציור מס' 1) שהן קצות אותו הקוטר תקראנה נקודות דיאמטרליות.

מטרת מאמר זה היא להוכיח שתמיד קיימות על המעגל לפחות שתי נקודות דיאמטרליות בעלות אותה הטמפרטורה. אם הטמפרטורה T משתנה עם הזמן, אזי בכל רגע קיימות שתי נקודות דיאמטרליות M ו-M' כך ש- $T(M) = T(M')$ וגם הן משתנות בדרך כלל עם הזמן.

2. בסעיף זה נעסוק בכמה מושגים יסודיים הדרושים לנו להוכחת הטענה הנ"ל.

א. מושג הפונקציה

נניח שמושג זה ידוע מבית הספר. נזכיר רק, שאם $y = f(x)$, הרי ב- $f(a)$ מתכוונים לערך של הפונקציה הנ"ל כאשר $x = a$.

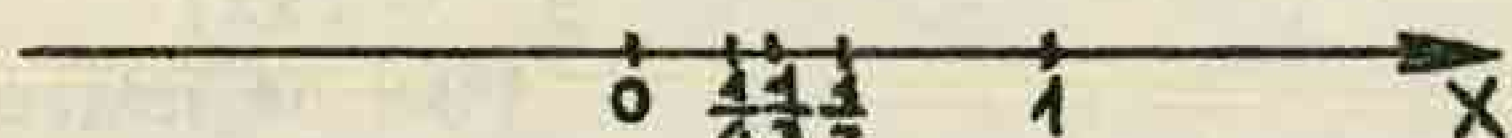
לדוגמא: אם $y = f(x) = 2x$

הרי: $f(-5) = 2.(-5) = -10; \ f(3) = 2.3 = 6$ וכו'.

ב. רציפות הפונקציה

אם סדרה אינסופית של ערכי x $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ שואפות ל- x_0 נרשום $x_n \to x_0$. למשל, הנקודות

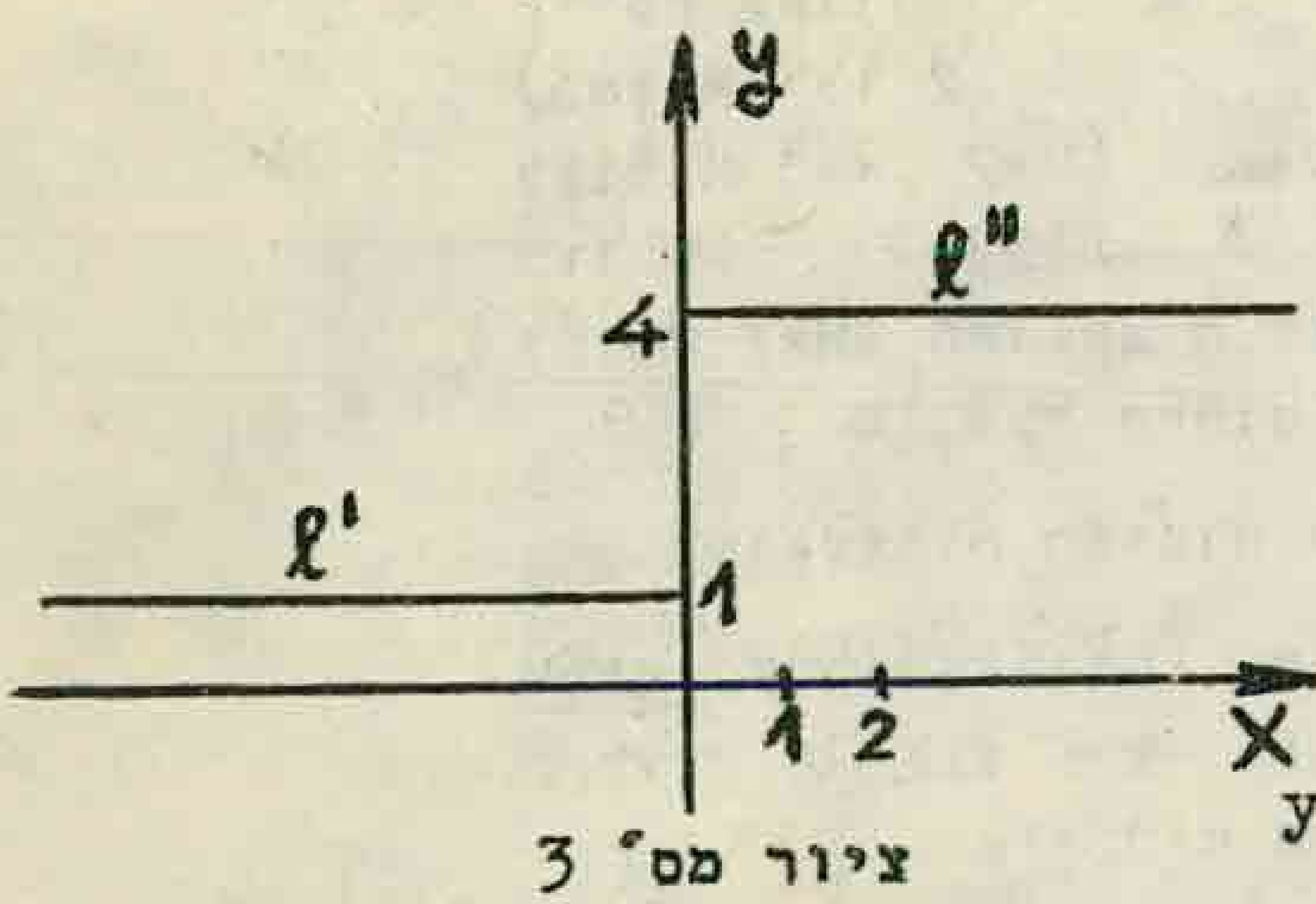
$x_1 = 1; \ x_2 = \frac{1}{2}; \ \ldots ; \ x_n = 1/n; \ \ldots$



ציור מס' 2

(ציור מס' 2) שואפות לנקודה $x_0 = 0$.

הפונקציה $y=f(x)$ נקראת רציפה בנקודה x_0, אם מהעובדה ש- $x_n \to x_0$ נובע ש $f(x_n) \to f(x_0)$; במלים אחרות הפונקציה רציפה ב-x_0 כאשר יחד עם שאיפת הערכים של x ל- x_0 שואפים הערכים המתאימים של y לערכי הפונקציה ב-x_0 ז.א. ל-$y_0=f(x_0)$.(*



ציור מס' 3

<u>דוגמא:</u> נתבונן בפונקציה המוגדרת ע"י

$y=f(x) = 1$ כאשר $x < 0$

$y=f(x) = 4$ כאשר $x \geqslant 0$

שויונות אלה מגדירים את y כפונקציה של x. לכל ערך של x הם מתאימים ערך יחיד מוגדר היטב של y.

הגרף של פונקציה זו נתון בציור מס' 3. הוא מורכב משני חצאי ישרים l' ו- l'' (חצי הישר l' הוא בלי נקודה ימנית,

---

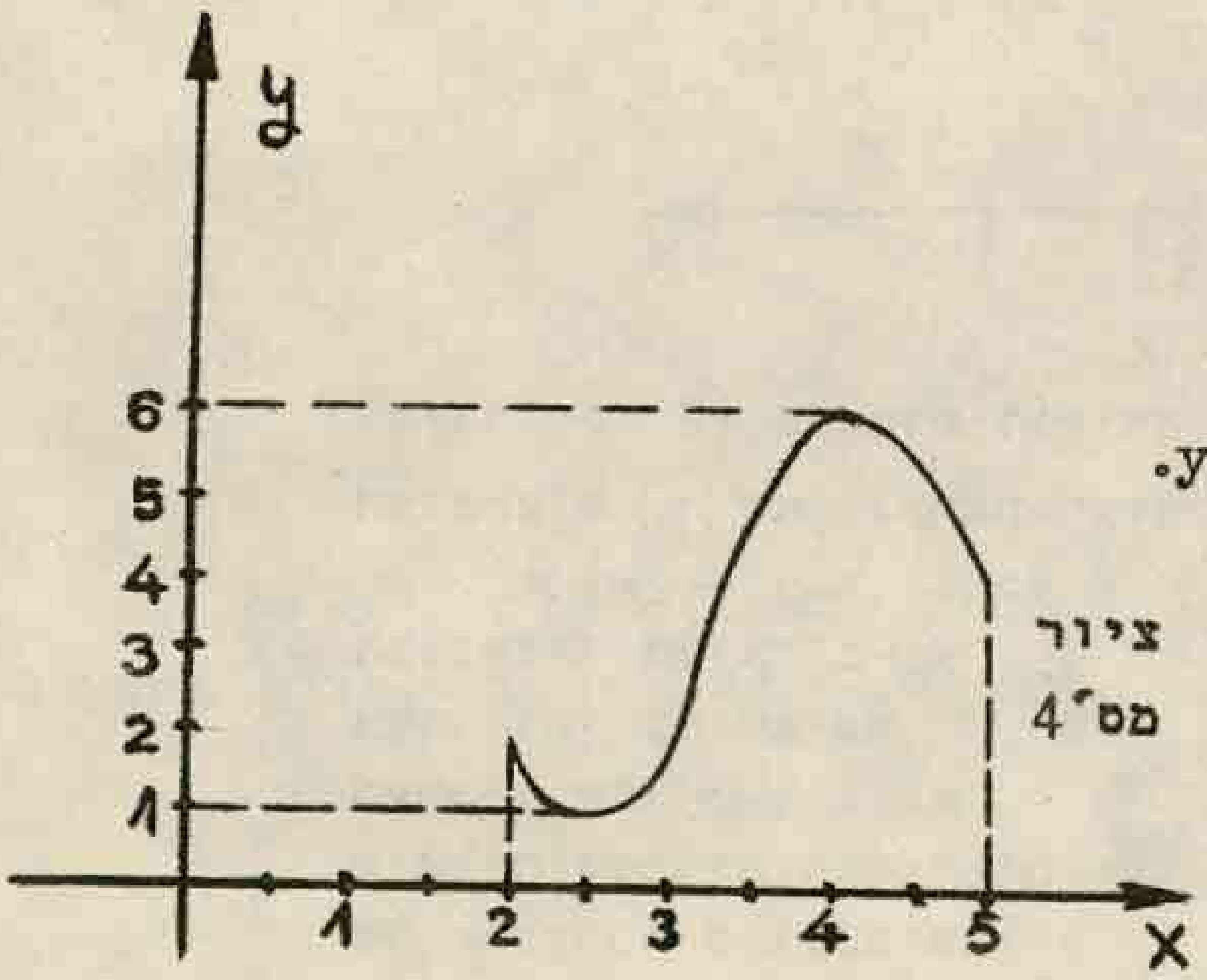
*) השווה בקשר לכך את ההסבר על רציפות במאמר "טופולוגיה מהי" המתפרסם בחוברת זו. (המערכת).

שכן $y = 1$ עבור $x < 0$ ועבור $x = 0$; $y = 4$.

פונקציה זו אינה רציפה בנקודה $x_0 = 0$. ובאמת, אם נתקרב ל- $x_0 = 0$ מצד שמאל ישאפו ערכי הפונקציה ל-1. אבל $f(0)=4$ (לפי ההגדרה של הפונקציה) ז.א. כאשר x שואף ל- $x = 0$ משמאל, הערכים המתאימים של הפונקציה אינם שואפים לערכה בנקודה $x_0=0$. קל לראות שבכל נקודה x השונה מ-0 הפונקציה הנ"ל רציפה.

אומרים שהפונקציה $y=f(x)$ רציפה בקטע $a \leqslant x \leqslant b$, כאשר היא רציפה בכל נקודה של קטע זה.

גרף של פונקציה רציפה הוא עקום רציף - השווה ציור מס' 4. הפונקציה שבציור זה מוגדרת עבור $2 \leqslant x \leqslant 5$.



ציור מס' 4

אומרים שהפונקציה $y = f(x)$ מקבלת את הערך $y = y_0$ אם קיים לפחות x_0 אחד כזה ש- $y_0=f(x_0)$. לדוגמה הפונקציה שבציור 4 מקבלת את הערך $y=2$ כי קיימת נקודה x (כאן אפילו 2 נקודות $x=2$, $x=3$) כזו ש- $f(x)=2$.
לעומת זאת, הפונקציה שבאותו הציור אינה מקבלת את הערך $y = 8$ כי בכל התחום קיים $y \leqq 6$.

פונקציות רציפות הן בעלות התכונה החשובה הבאה:

<u>משפט</u> (ערך הביניים). תהי $y = f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $a \leqslant x \leqslant b$ ונניח שהיא מקבלת בתחום זה את הערכים y_1 ו- y_2 . אזי היא מקבלת בקטע זה כל ערך ביניים, כלומר כל ערך y שבין y_1 לבין y_2 .
(בדוגמה של הציור מס' 4 הפונקציה מקבלת כל ערך בימים בין $y = 1$ ל- $y = 6$).

לא נוכיח כאן משפט זה, אשר מבחינה הסתכלותית אינו קשה להבנה. נעיר שעבור פונקציה לא רציפה טענת המשפט הזה אינה נכונה בדרך כלל. בדוגמה שבציור מס' 3 מקבלת הפונקציה את הערכים 1 ו-4, אבל אינה מקבלת אף ערך ביניים.

ג. אם $y = f(x)$ היא פונקציה רציפה, הרי גם הפונקציה $y = f(x + a)$ (a מספר כלשהו) היא פונקציה רציפה. ובאמת הפונקציה האחרונה מתקבלת מהקודמת על ידי הזזה לאורך ציר ה-x ב- a יחידות והרציפות תשמר בבירור במעבר זה. כמו כן לא קשה לראות שאם $f(x)$ ו- $g(x)$ הן שתי פונקציות רציפות, הרי גם ההפרש שלהן $f(x) - g(x)$ היא פונקציה רציפה. הקורא יוכל להדגים לעצמו את העובדה האחרונה ע"י ציור שתי פונקציות רציפות המוגדרות באותו התחום והחסרתן הגרפית, שבעקבותיה תתקבל פונקציה רציפה.

ד. אחרי הערות אלה נעבור לנסוחו והוכחתו של המשפט שהכרזנו עליו בתחילת מאמר זה.

לכל נקודה M על המעגל מתאימה זוית $x = \sphericalangle MOA$ (ראה ציור מס' 1), כך שנוכל לתאר את הטמפרטורה בכל נקודה כפונקציה של הזוית x: $T = T(x)$. לגבי פונקציה זו קיים:

$$T(0) = T(2\pi) \qquad (1)$$

כיון של- $x = 0$ ול- $x = 2\pi$ מתאימה אותה הנקודה על המעגל. לשתי נקודות דיאמטרליות מתאימות הזויות x ו- $x + \pi$ והטמפרטורות בנקודות אלה הן $T(x)$ ו- $T(x + \pi)$, בהתאמה.

<u>משפט.</u> אם $T = T(x)$ היא פונקציה רציפה של x , אזי קיימות שתי נקודות דיאמטרליות M ו- M' שבהן $T(M) = T(M')$ (כלומר בעלות אותה הטמפרטורה).

<u>הוכחה:</u> להוכחת המשפט מספיק להראות שקיימת זוית x_0 כזו ש- $T(x_0) = T(x_0 + \pi)$ ז.א. $T(x_0) - T(x_0 + \pi) = 0$. נתבונן בפונקציה המוגדרת ע"י השויון:

$$y = f(x) = T(x) - T(x + \pi)$$

אם נציב $x = 0$ נקבל:

$$y_1 = f(0) = T(0) - T(\pi)$$

נציב $x = \pi$:

$$y_2 = f(\pi) = T(\pi) - T(2\pi) = T(\pi) - T(0)$$

(החלפנו את $T(2\pi)$ ב- $T(0)$ בהתאם ל-(1)).

משני השויונות האחרונים נובע:

$$y_2 = - y_1$$

לכן אחד מהמספרים y_1 או y_2 הוא חיובי והשני שלילי.

נניח למשל: $y_1 = f(0) \leqslant 0$

ו- $y_2 = f(\pi) \geqslant 0$. הפונקציה $f(x)$ מקבלת את

הערכים $0 \leqslant y_1$ (עבור $x = 0$) ו- $y_2 \geqslant 0$ (עבור $x = \pi$).

$f(x)$ היא פונקציה רציפה כי, כאמור, יחד עם $T(x)$ גם $T(x+\pi)$

היא פונקציה רציפה והפרש שתי פונקציות רציפות

$$T(x) - T(x + \pi)$$

גם הוא פונקציה רציפה.

לפי משפט ערך הבינים תקבל $f(x)$ כל ערך בין y_1 ו- y_2

ובין השאר גם את הערך 0 ($y_1 \leqslant 0 \leqslant y_2$).

קיימת, איפוא, נקודה x_0 בין 0 ל- π כזו ש:

$f(x_0) = 0$ ז.א. $T(x_0) - T(x_0 + \pi) = 0$

מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> המשפט האחרון הוא מקרה פרטי של משפט הרבה יותר כללי הנקרא Antipodensatz של Borsuk - Ulam.

- - - - -

<u>משחק: מי יגיד הראשון "מאה"?</u>

במשחק שני משתתפים. הראשון אומר מספר טבעי כלשהו לא גדול מ-10 (כלומר 10, או מספר קטן ממנו). השחקן השני מוסיף למספר הנ"ל מספר שאינו עולה על 10 ואומר את הסכום. לסכום זה מוסיף הראשון מספר טבעי שאינו עולה על 10 ומודיע את הסכום החדש וכו'. לדוגמה: הראשון אומר 8, השני - 15, הראשון 16, השני 26, וכו'.

זוכה השחקן אשר ישיג ראשון את המספר 100.

האם קיים מפתח שבעזרתו יכול אחד השחקנים תמיד לזכות? אם כן, איזה מהם?

<u>91 ספרות 1</u>

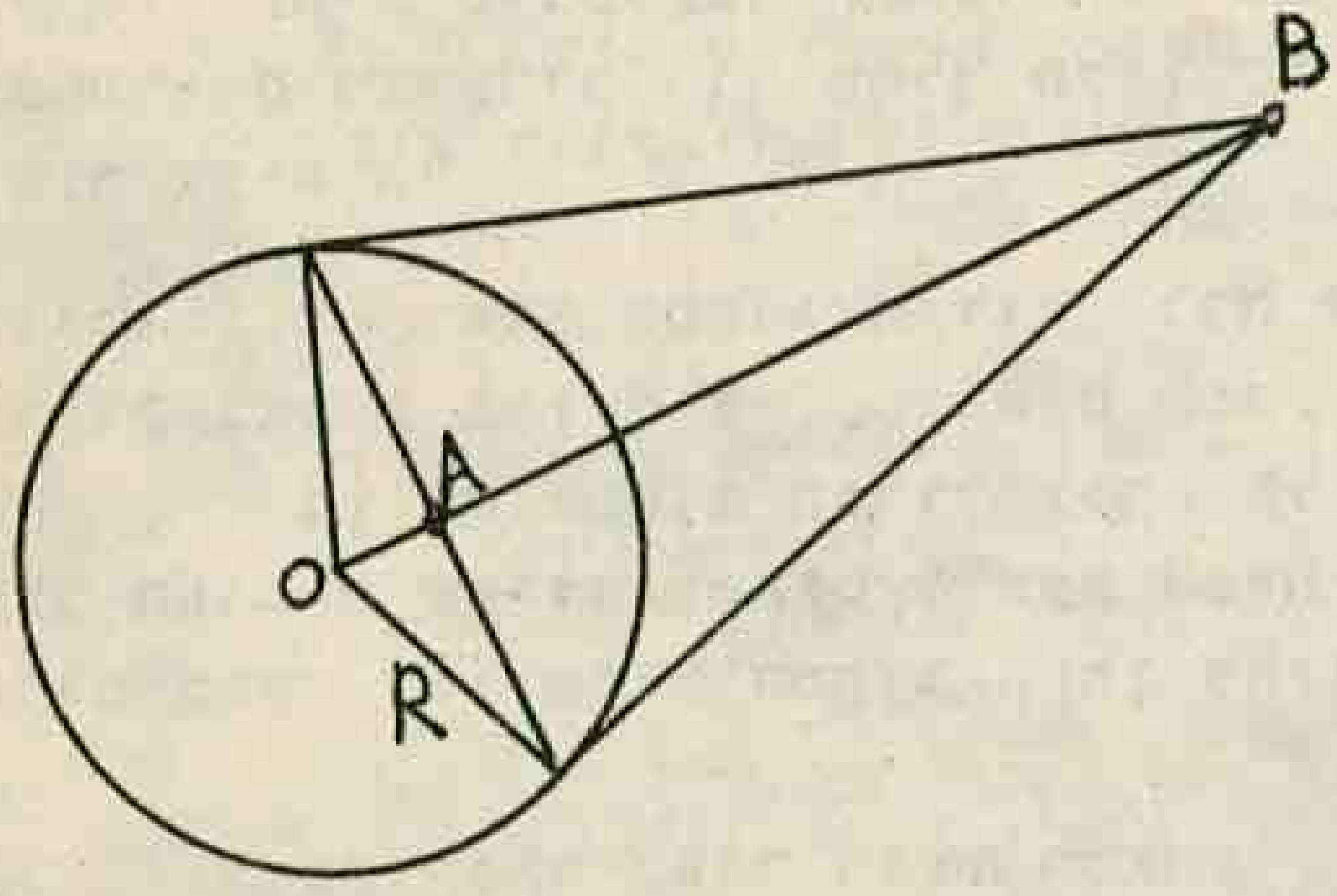
הוכח כי המספר הכתוב ב-91 ספרות 1 הוא מספר מורכב.

- - - - -

<u>מהמערכת.</u> תשובות לשאלות שונות המופיעות בעתון, שלא במסגרת התחרות, תובאנה בגליון הבא. המערכת תקבל ברצון לעיון חידות, בדיחות ותשבצים מתמטיים. כל שאלה כזו יש ללוות בפתרון מפורס.

תחרות על הנושא: "איך ללכוד אריה במדבר?"

השאלה שבכותרת ידועה היטב. אנו מציעים בזה את הפתרון הבא. יהא נתון מעגל שמרכזו ב-O ורדיוסו - R. (ראה ציור). שתי נקודות A ו- B הנמצאות על ישר אחד העובר דרך המרכז מצדו האחד והמקיימות את השויון:



$$OA \cdot OB = R^2$$

נקראות אינברסיות ביחס למעגל הנתון. בנייה גיאומטרית של נקודה אינברסית לנקודה נתונה מודגמת בציור הנ"ל.

עם ביצוע האינברסיה מועתקות הנקודות שמחוץ למעגל לתוכו, והנקודות הפנימיות - החוצה. הנקודות על המעגל נשארות במקומן.

עתה לא נשאר, אלא לבוא למדבר עם כלוב עגול, להכנס לתוכו (אבל לא להמצא במרכזו, מדוע?) ולבצע אינברסיה של המדבר ביחס למעגל המגביל את הכלוב. הציד מועתק החוצה והאריה - לתוך הכלוב.

בקשר לכך מכריז העתון על תחרות לפי התנאים הבאים:

1. <u>משתתפים:</u> בתחרות יכול להשתתף כל קורא, אשר: א) יוכיח את נכונות בנית הנקודות האינברסיות כפי שהיא מודגמת בציור הנ"ל. ב) יוכיח שהתמונה האינברסית של מעגל שאינו עובר דרך המרכז O היא מעגל ושל מעגל העובר דרך O - היא קו ישר.

2. <u>נושא התחרות:</u> על כל משתתף להציע שיטה נוספת ללכידת אריה במדבר, שתהיה "מבוססת" מבחינה מתימטית - שיטות אחרות לא תיחשבנה. את ההצעות יש לשלוח לפי כתובת המערכת עד ל-1.8.60.

3. <u>הפרסים:</u> בין המשתתפים שיקיימו את הנדרש לעיל יוגרלו הפרסים הבאים: א) מנוי שנתי של העתון ב) 2 מנויים חצי-שנתיים.

המערכת שומרת לעצמה זכות לפרסם את ההצעות שתוגשנה לתחרות.

בעיה השעון

מיכאל משלר

1. יהא נתון לוח-שעון ובו שני מחוגים - קטן וגדול, ואפשר להציב בו את המחוגים בכל צורה רצויה. אם מצב המחוגים מזדהה עם אחד המצבים האפשריים הנוצרים תוך מהלך תקין של השעון, נאמר שהמחוגים מורים על "שעה אמיתית".

דוגמות: א) כאשר המחוג הגדול יורה על הספרה 6 והמחוג הקטן יכוון בדיוק באמצע בין 6 ל-7, יתאים המצב ל"שעה אמיתית" (השעה היא 6.30).

ב) אם המחוג הגדול יורה על הספרה 9 והמחוג הקטן על 2, זהו מצב מחוגים שאינו מתאים ל"שעה אמיתית". (השעה היא "כמעט" רבע לשתיים, אולם בשעה כזו חייב המחוג הקטן להיות קצת לפני הספרה 2).

2. מפורסמת מאוד הבעיה הבאה:

יהי נתון שעון שמחוגיו נעים באופן תקין (כלומר כל הזמן הם מורים על שעה אמיתית). כמה פעמים במשך יום (12 שעות) אפשר להחליף את מחוגי השעון זה בזה ולקבל תוך כך מצב שיתאים שוב לשעה אמיתית?

נדגים מספר מקרים:

א) אם נחליף את המחוגים בשעה 3.00, יורה המחוג הקטן על המספר 12 והמחוג הגדול על 3. זו אינה שעה אמיתית ("כמעט" 12.15 אך המחוג הקטן "מפגר").

ב) בשעה 12.00 נמצאים המחוגים זה מעל לזה ואם נחליפם לא תשתנה השעה, ולכן תישאר אמיתית.

אותו דבר יקרה כמובן כל אימת שהמחוגים ימצאו אחד מעל השני. מצב כזה חוזר, כידוע, 11 פעמים במשך יום, ברווח וזמן של שעה ו-$5\frac{5}{11}$ דקות זה מזה, החל משעה 0.00 (השעה 12.00 תיחשב כבר ליום חדש).

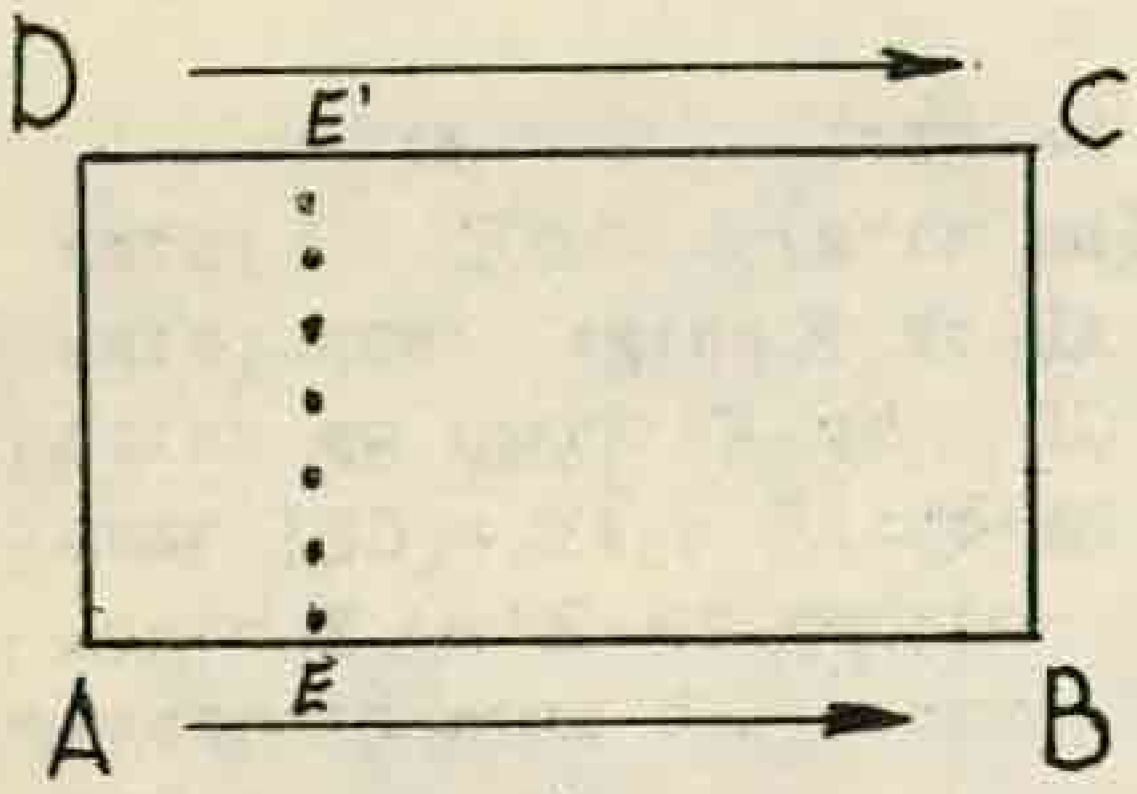
השאלה היא: האם אלה הם כל הפתרונות של הבעיה שלנו? התשובה היא שלילית, כפי שיוכח בהמשך דברינו. אפשר לטפל בבעיה בדרך אלגבראית, אולם הפתרון אינו קל. מטרת רשימה זו היא להצביע על דרך פשוטה לפתרון הבעיה.

3. הרבה תכונות של משטחים במרחב אפשר לראות ביתר קלות, אם מתארים אותם כצורות מישוריות בעלות "נקודות מזוהות".

שתי נקודות נקראות "מזוהות" אם מחליטים לראותן כ"נקודה" אחת.

נסביר את הדבר בדוגמות הבאות:

דוגמה א. נסתכל במלבן ABCD (ציור מס' 1) ונזהה את הנקודות שעל הצלע AB עם הנקודות על הצלע DC, כדלקמן: כל נקודה

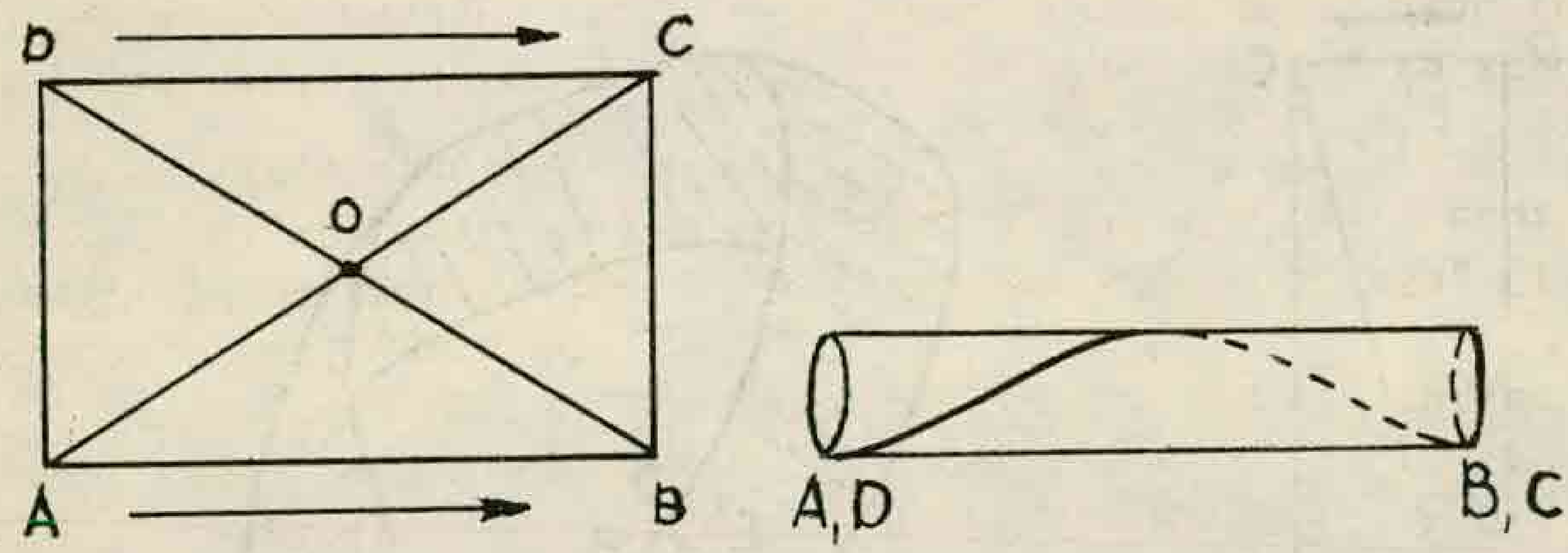


על הצלע AB תזוהה עם הנקודה
על הצלע DC הנמצאת "ממולה",
כלומר הנמצאת אתה על אנך אחד
לצלע AB . (למשל, הנקודות
E ו- E'). נעיר, שהנקודות
על הצלעות AD ו- BC בלי
הקצות והנקודות שבפנים המלבן
נשארות בלי כל זהוי.

ציור מס' 1

הזיהוי שביצענו מסומן ע"י שני החיצים כמתואר בציור מס' 1.

למלבן ABCD עם זיהוי הנקודות כנ"ל יש תכונות דומות לתכונות הגליל. ואמנם אם נדביק את הנקודות המזוהות, נוכל ליצור מהמלבן מעטפת של גליל. (ציור מס' 2).

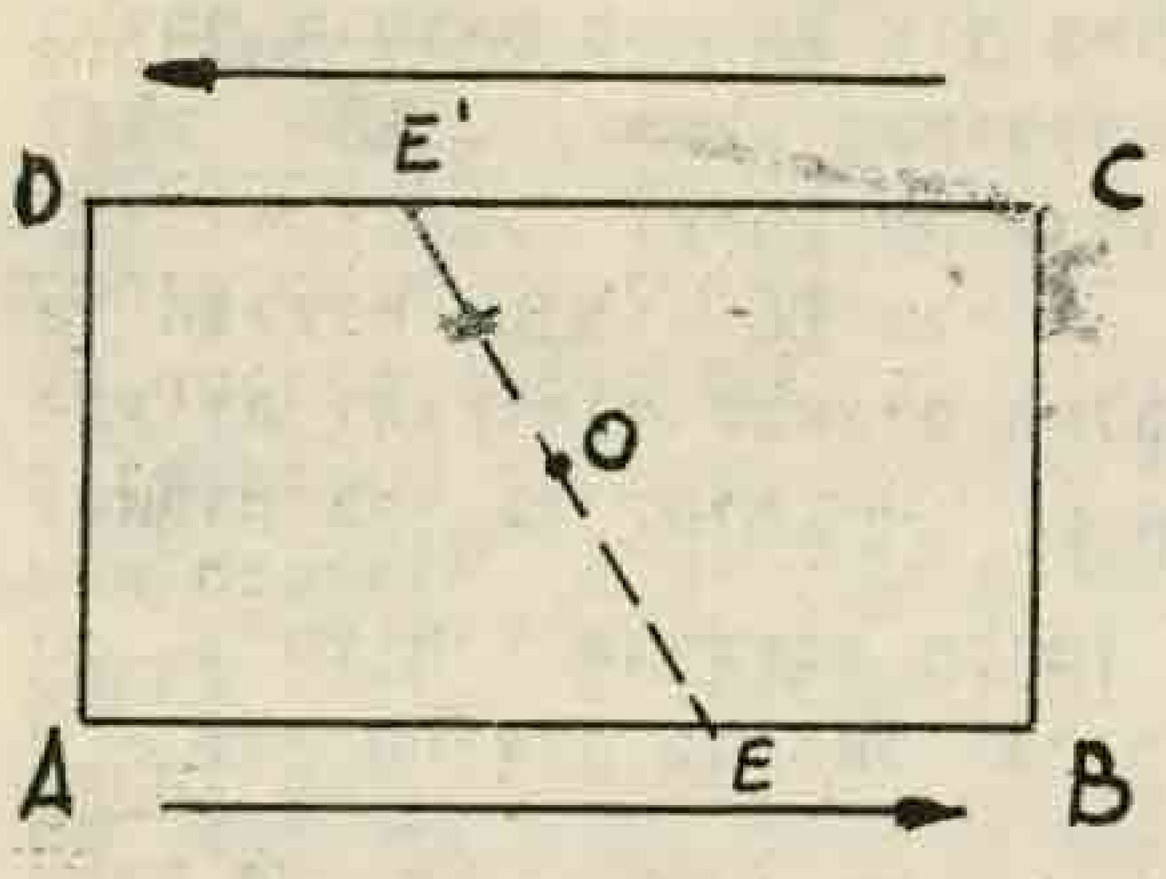


ציור מס' 2

אפשר למצוע תכונות שונות של הגליל מתוך "תאורו המישורי". לדוגמה, אלכסון AC מתאים על הגליל קו-בורג (ציור מס' 2). לאלכסון BD מתאים קו בורג אחר היוצא מאותן הנקודות. (קו בורג זה איננו מסומן בציור על הגליל). אחד משני קוי בורג אלה הוא ימני והשני שמאלי.

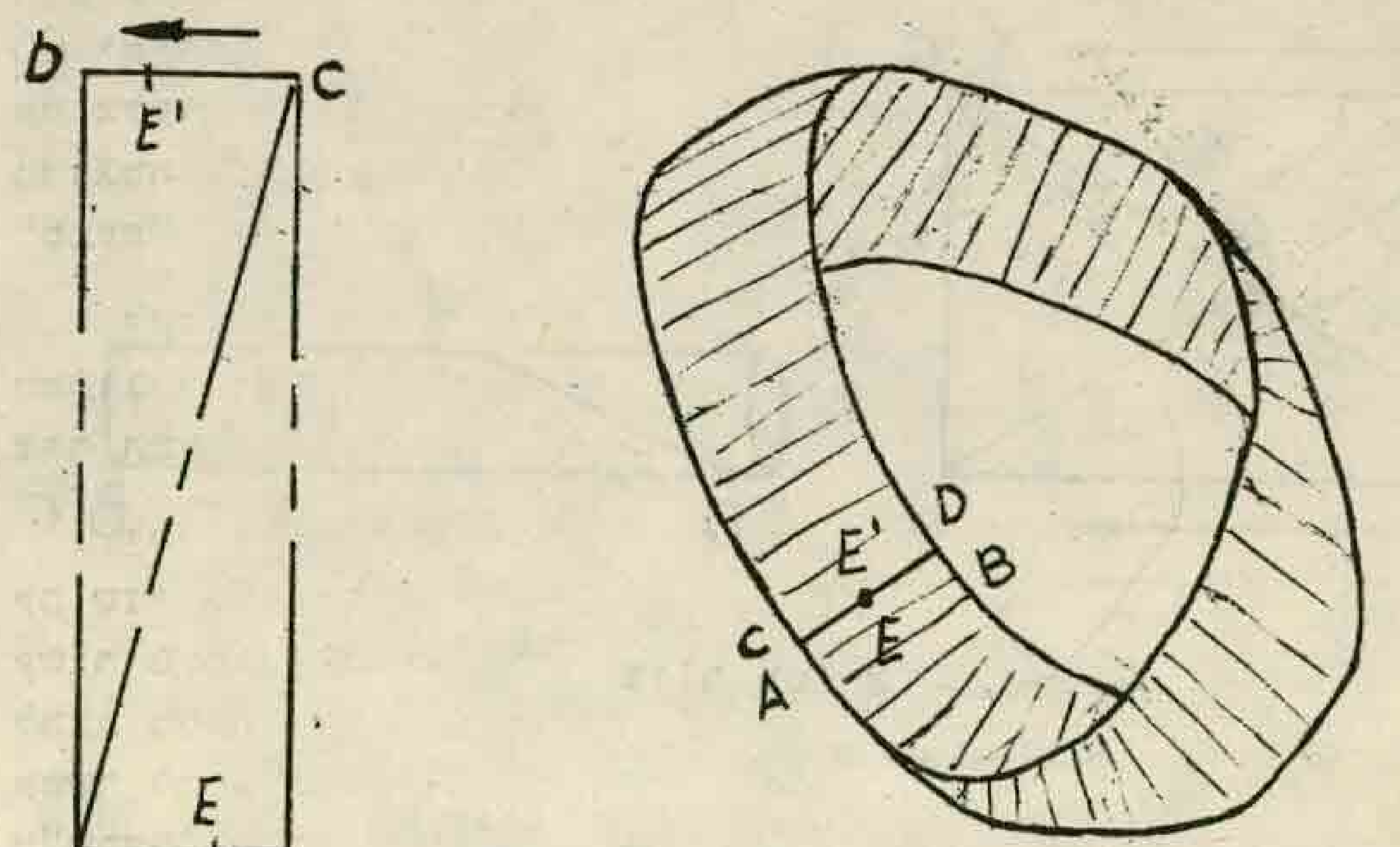
אם נשאל: כמה נקודות משותפות יש לקוי הבורג הנ"ל?-נקבל בקלות את התשובה מתוך הסתכלות בצורה המישורית. אכן מספרן 3 והן הנקודות $A \equiv D$, O ו- $B \equiv C$. בכל מקום בו לא תהיה אי-הבנה נקרא גם לצורה שבציור מס' 1 בשם "גליל".

דוגמה ב. נזהה את הנקודות שעל הצלעות AB ו-CD אשר במלבן ABCD (ציור מס' 3) באופן הבא: נקודה E על AB תזוהה עם נקודה E' על CD, כאשר AE = CE' . (במלים אחרות E ו-E' הן נקודות סימטריות ביחס ל-O - מרכז המלבן).



ציור מס' 3

דרך זיהוי זו מסומנת בציור מס' 3 ע"י הכיוונים המנוגדים של החיצים. לצורה המתקבלת כך יש הרבה תכונות משותפות עם המשטח במרחב הידוע בשם סרט מביוס (Moebius). ואמנם, אם נדביק את הנקודות המזוהות, נקבל את המשטח המתואר בציור מס' 4. (הציור מתאים למלבן צר וארוך יותר; טוב יעשה הקורא, אם יכין לעצמו

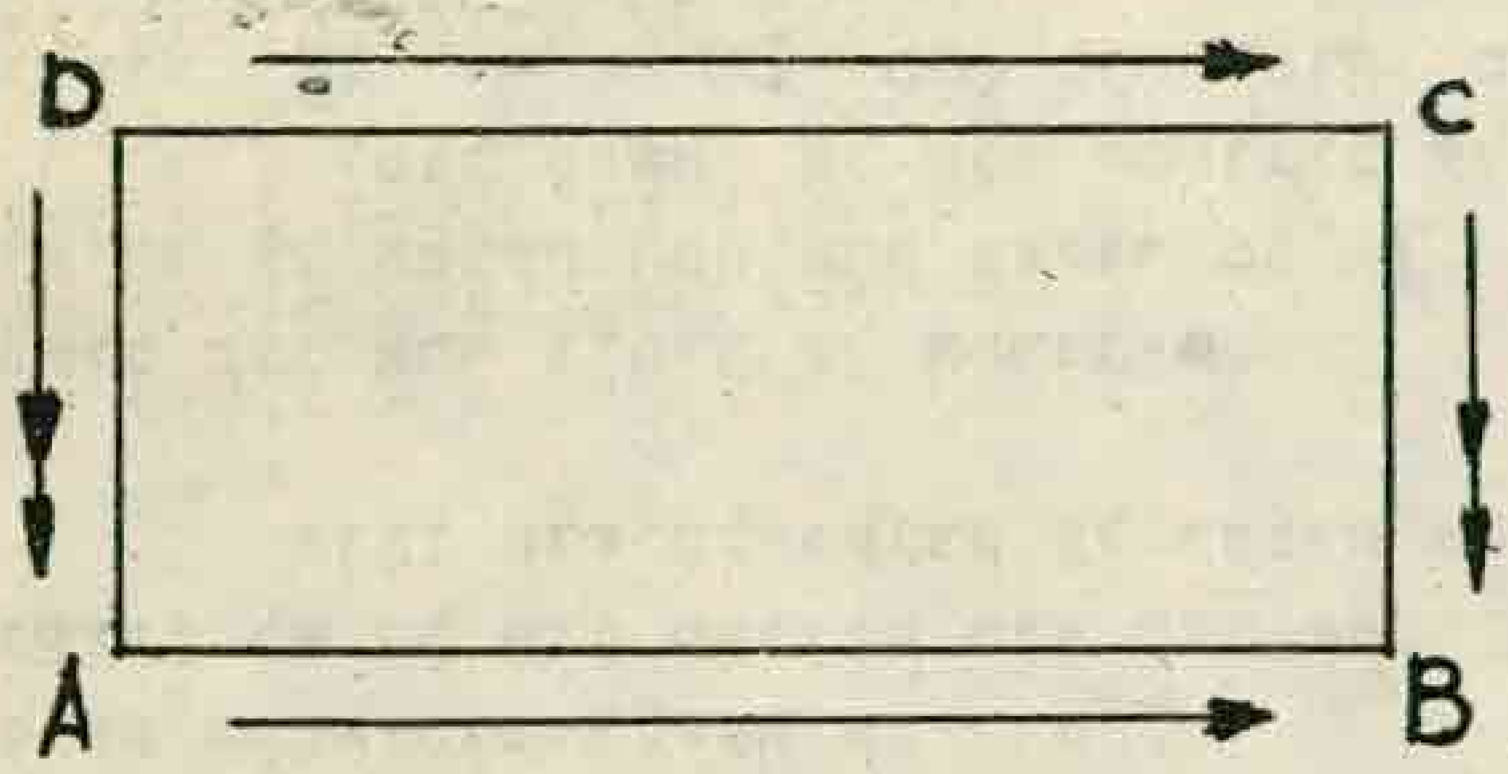


ציור מס' 4

בדרך הנ"ל דוגמה של סרט מביוס). סרט מביוס מצטיין בכך שיש לו רק צד אחד: אם נתחיל, למשל, לצבוע אותו ונמשיך בצביעה עד שנחזור למקום ממנו יצאנו, נמצא כי הסרט יהיה צבוע בכל מקום.

שים לב: האלכסון AC הוא קו סגור משום שהקצוות A ו-C הן "אותה הנקודה". איזה קו יתאים לאלכסון זה על סרט שבציור מס' 4?

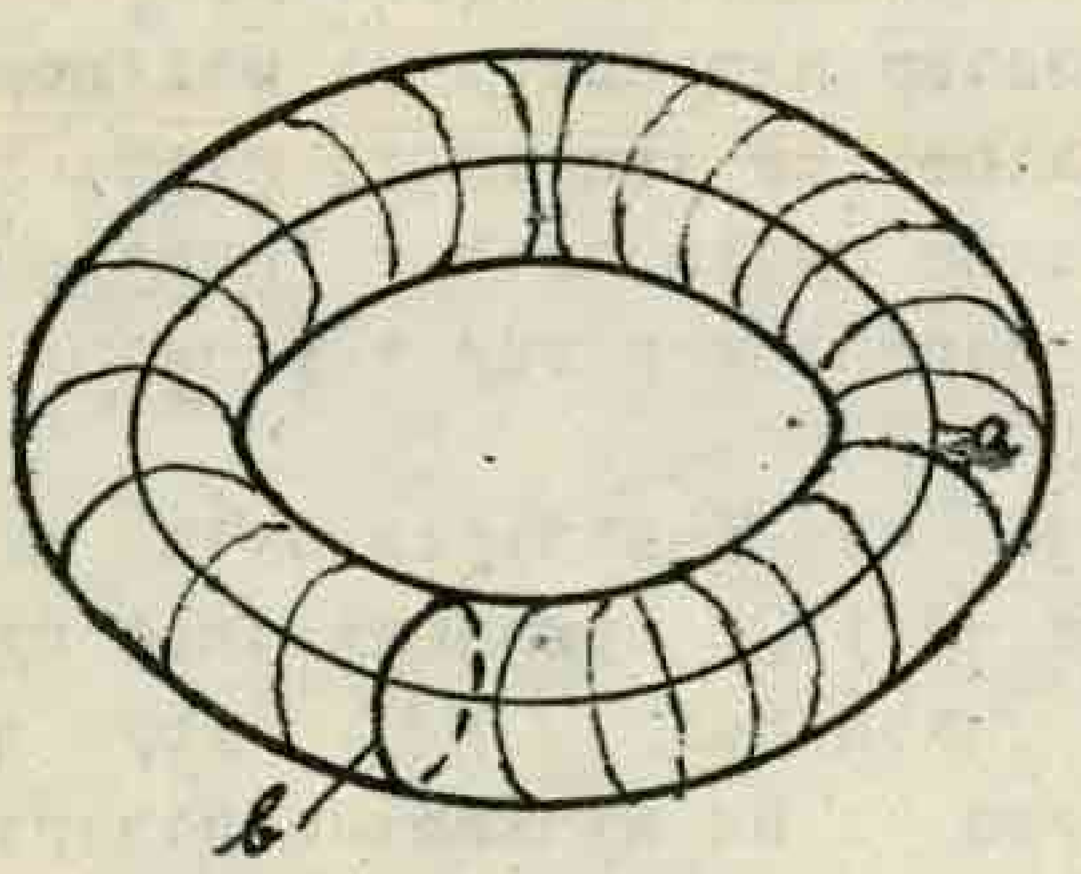
דוגמה ג. אם נזהה במלבן ABCD את הצלעות DC עם AB ואת הצלעות BC עם AD , כמתואר בציור מס' 5, נקבל צורה הדומה בתכונותיה למשטח הנקרא טבעת או "טורוס" (ציור מס' 6)



ציור מס' 5

גם במקרה זה אפשר להסיק הרבה מסקנות על תכונות הטבעת מתוך דיון בציור מס' 5. אחת המסקנות תהיה פתרון בעית השעון.

<u>הערה:</u> בכל מקום שלא יהיה חשש לאי-הבנה נכנה גם את הציור 5 בשם "טבעת".

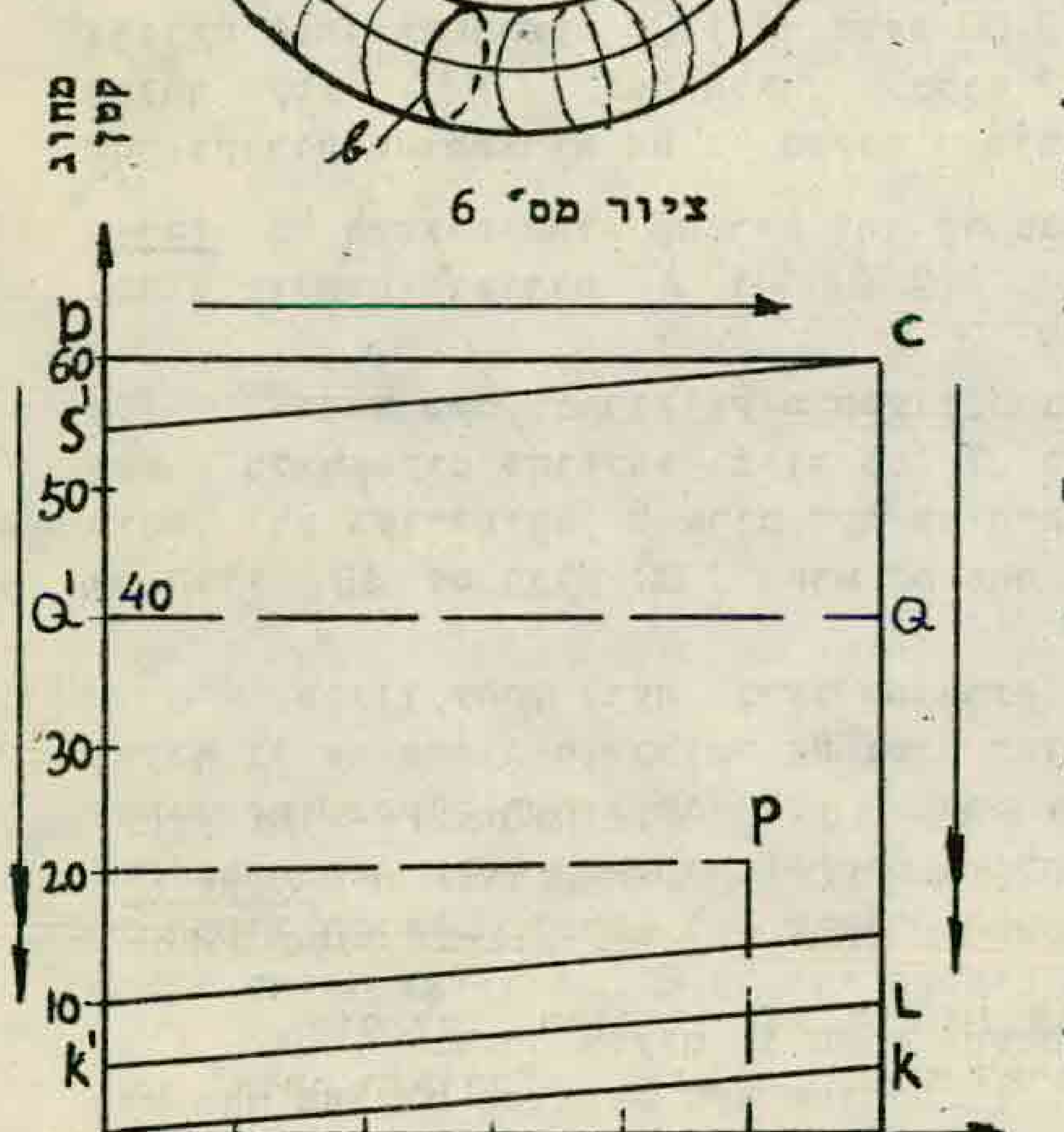


ציור מס' 6

4. יהא נתון ריבוע שצלעו היא בת 60 יחידות אורך. נזהה את צלעות הריבוע כמו בדוגמה האחרונה ונקבל "טבעת" (ציור מס' 7).

לקטע AB נקרא ציר המחוג הגדול ולקטע AD: ציר המחוג הקטן.

יהי נתון לוח-שעון עם שני מחוגים שאינם קשורים בתנועותיהם. למצב כלשהו של המחוגים אפשר להתאים נקודה על ה"טבעת" שבציור מס' 7.



ציור מס' 7

ההתאמה היא בדרך המקובלת בשרטוט גרפים. הנקודה P , למשל, מתאימה למצב מחוגים כדלקמן: המחוג הגדול מורה על הספרה 10 (50 דקות) והמחוג הקטן מורה על הספרה 4 (20 דקות). אגב, אין זו "שעה אמיתית".

שתי הנקודות Q ו- 'Q , המזוהות בציור מס' 7, מתאימות לאותו מצב מחוגים של לוח-השעון. אכן, בשני המקרים מורה המחוג הקטן על הספרה 8 (40 דקות) והמחוג הגדול מראה על הספרה 12 (0 דקות או 60 דקות). באופן דומה, קל להווכח שגם כל שתי נקודות מזוהות על הצלעות AB ו- DC מתאימות לאותו מצב מחוגים על לוח-השעון. בסך הכל, למצב כלשהו של שני המחוגים על לוח השעות מתאימה נקודה אחת ויחידה על הטבעת המתוארת בציור מס' 7; ולהיפך, לכל נקודה בציור זה מתאים מצב אחד ויחיד של המחוגים.

.5 מובן שלא כל נקודה על הטבעת מתאימה ל"שעה אמיתית", משום שבשעון לא כל מצב מחוגים הוא מצב אפשרי. מה הן, איפוא, הנקודות של הטבעת המתאימות ל"שעה אמיתית"?

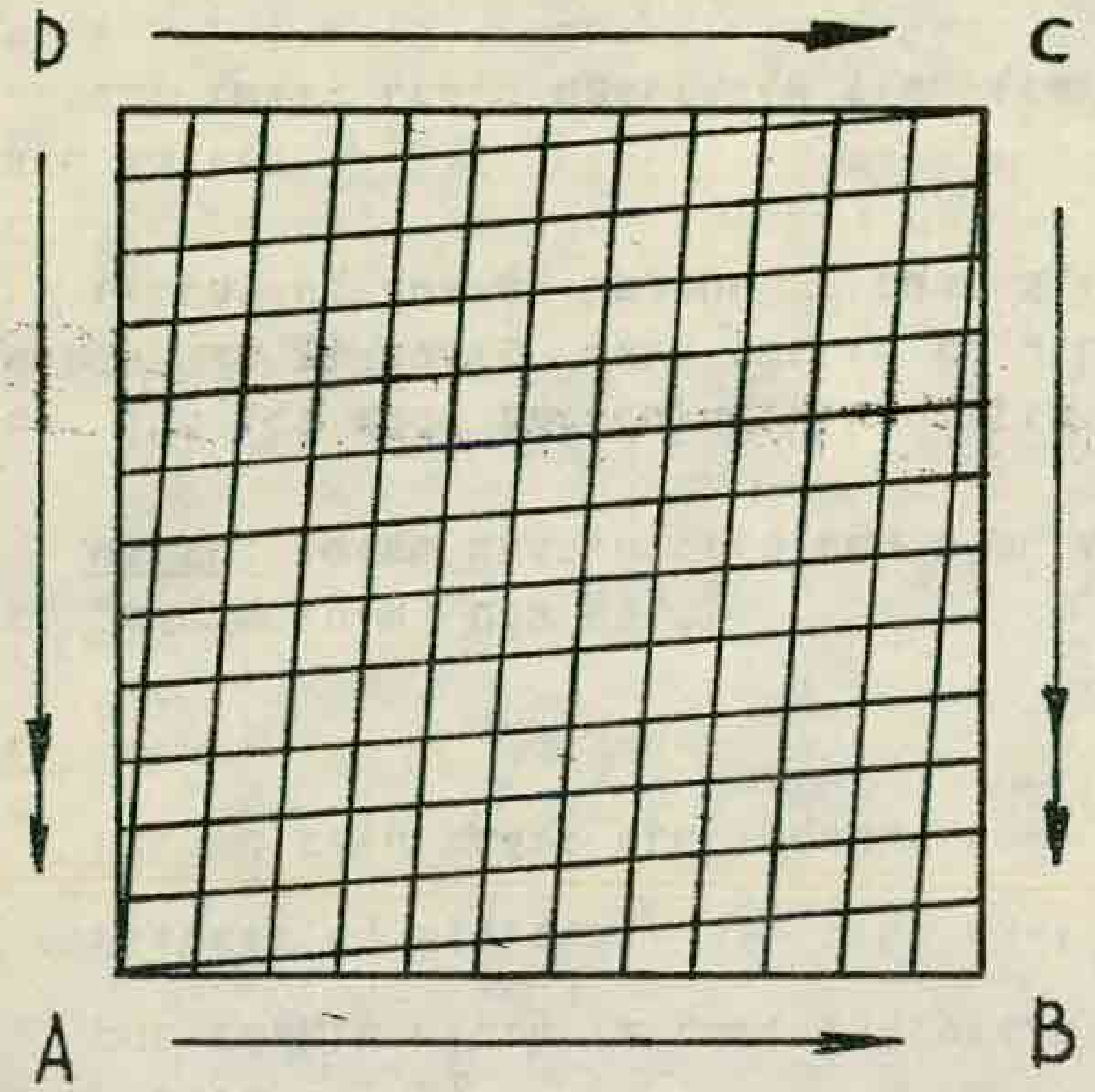
נצא מהשעה 0.00 ונתבונן בתנועת מחוגי השעון עד השעה 1.00. שני המחוגים נעים במהירות קצובה, אבל המהירות הזויתית של המחוג הגדול גדולה פי 12 מזו של המחוג הקטן. מכאן שתנועת המחוגים המורים "שעה אמיתית" (כלומר תנועת מחוגים בשעון תקין), בזמן שבין 0.00 עד 1.00 תתואר ע"י קטע הישר המחבר את A עם K ששפועו 1/12 (ציור מס' 7).

אולם הנקודות K ו- 'K מזוהות (שתיהן מתארות את השעה 1.00) ותנועת המחוגים מהשעה 1.00 עד השעה 2.00 מתוארת על הטבעת כתנועה לאורך הקטע K'L , וכך הלאה. קבלנו 12 קטעים ישרים (האחרון S'C), אשר נקודותיהם מתארות את כל השעות האמיתיות.

<u>הערה:</u> כל הקטעים האלה מתארים יחד קו סגור, בגלל זהוי הנקודות שבטבעת. (מדוע מזוהות הנקודות A ו- C ?)

.6 ניגש כעת לפתרון בעית השעון. בציור מס' 8 מתוארים, בין השאר, כל הקטעים שהוזכרו בציור מס' 7, כלומר כל הקטעים אשר נקודו-תיהם, ורק נקודותיהם, מתארים שעה אמיתית. משפחת קטעים אלה, המחברים את הצלע AD עם הצלע BC , תקרא המשפחה I .

מענין, עתה, לדעת כיצד תתוארנה נקודות השעון הרגיל אם נחליף בו את המחוגים, כלומר אם נשים מחוג גדול במקום המחוג הקטן, ומחוג קטן במקום המחוג הגדול. במקרה זה יהיה לפנינו שעון אשר בו מסתובב המחוג הקטן במהירות זויתית גדולה פי 12 מהמהירות הזויתית של המחוג הגדול. נקרא, לשם קיצור, לשעון החדש בשם "שעון הפוך". מהלכו מתואר בציור מס' 8 על ידי הקטעים המחברים את הצלע AB עם הצלע DC . משפחת קטעים זו תקרא המשפחה II . כל נקודה במשפחה II היא מצב מחוגים הפוך של שעה אמיתית !! ולהיפך, כל מצב מחוגים הפוך של שעה אמיתית הוא נקודה של המשפחה II !!



ציור מס׳ 8

<u>שים לב:</u> בציור זה, AB הוא ציר המחוג הגדול עבור <u>שני השעונים</u> - הרגיל וההפוך, וכמו"כ AD הוא ציר המחוג הקטן עבור <u>שני השעונים</u>.

אנו שואלים מתי מצב מחוגים הפוך הוא בעצמו שעה אמיתית. בתרגום ללשון הציור - מתי נקודה של המשפחה II נמצאת על המשפחה I . זה קורה אם ורק אם הנקודה היא בחיתוך קטע מהמשפחה II עם קטע מהמשפחה I .

נסכם: כל נקודת חיתוך היא מצב רצוי. ראשית, היא מראה שעה אמיתית כי היא שייכת למשפחה I . שנית, בהיותה שייכת גם למשפחה II וגם למשפחה I , מראה היא על מצב מחוגים הפוך של שעה אמיתית, אשר אף הוא שעה אמיתית.

ולהיפך, כל מצב רצוי חייב להורות על שעה אמיתית ולכן חייב להיות מתואר ע"י נקודה של המשפחה I ; וכמו"כ עליו להורות על מצב מחוגים הפוך של שעה אמיתית, ולכן עליו להיות מתואר ע"י נקודה של המשפחה II .

משום כך מתואר כל מצב רצוי ע"י נקודת חיתוך של קטע של המשפחה I עם קטע של המשפחה II .

כדי להשיב לבעית השעון, לא נותר לנו אלא לספור את נקודות החיתוך השונות.

ואמנם, כל קטע של המשפחה I נחתך ע"י 12 קטעים של המשפחה II . במשפחה I יש 12 קטעים. מבין נקודות החיתוך מזוהות רק הנקודות A ו- C . לכן מספר נקודות החיתוך השונות הוא $143 = 1 - 12.12$.

<u>תשובה:</u> מספר הפעמים ביום בהם אפשר להחליף את מחוגי השעון ולקבל "שעה אמיתית" הוא 143.

<u>בעיות</u> *)

1. התר את בעית השעון בדרך אלגבראית.

2. הייתכנו על הגליל שני קוי בורג שאין להם אף נקודה משותפת?

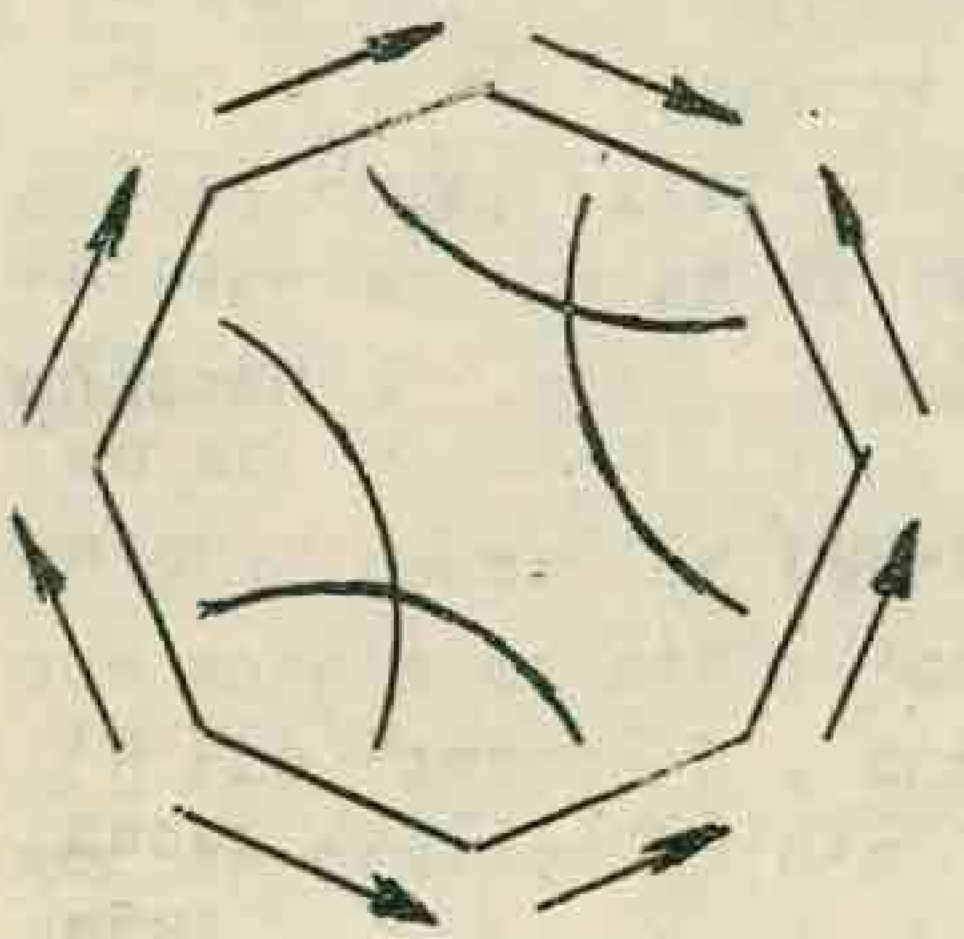
3. כמה נקודות חיתוך יש לשני האלכסונים AC ו- BD בסרט מביוס המתואר בציור מס' 3?

4. בציור מס' 6 מתוארים שני מעגלים a ו-b שעל הטבעת. שרטט אותם בתאור הטבעת שבציור מס' 5.

5. הוכח בעזרת ציור מס' 7 כי במשך יום נפגשים מחוגי השעון בדיוק 11 פעמים.

6. "שעון" מיוחד נע בהתאם לחוק הבא: במשך יום עושה מחוגו הקטן סיבוב אחד ומחוגו הגדול 2 סיבובים. כמה פעמים במשך 5 ימים אפשר להחליף את מחוגי "שעון" ולקבל "שעה אמיתית"?

7. איזה משטח במרחב מתואר ע"י המתומן המשוכלל שבציור מס' 9, כאשר מזהים בו בכוון החיצים את הנקודות של כל שתי צלעות הקשורות ע"י קשת?



ציור מס' 9

*) שלחו את תרותיכם לפי כתובת המערכת. נשמח לפרסם פתרונות מענינים.

המערכת.

מבוא לאלגברה של בול

יהושפט גבעון.

1. מבוא.

האלגברה הרגילה שאנו לומדים בביה"ס אינה, אלא קבוצת כללים החלים על פעולות מסוימות בין המספרים שביחס אליהם הוגדרו פעולות אלה. כך, לדוגמא, מבצעים באלגברה של המספרים הרציונליים פעולות החיבור והכפל ונקבעו כללים מסויימים אשר פעולות אלה מקיימות (למשל: המכפלה של מספר באפס היא אפס, סכום שני מספרים אינו תלוי בסדר המחוברים וכו׳).

נכיר עכשיו אלגברה חדשה הקרויה על שם יוצרה, אלגברת בול (G.Boole 1815 - 1864), שתחום דיונה יהיה שונה וגם הפעולות עצמן אינן פעולות הלאגברה הידועות מבית הספר. מדי פעם בפעם נעמוד על הדמיון הקיים בין שתי התורות האלה, תוך הקפדה על הפתוח העצמאי של האלגברה הבוליאנית מתוך חוקיה היסודיים שלה.

מטרת מאמר זה היא השגת ידיעות על שדה הדיון ועל הפעולות היסודיות של אלגברת בול. במאמרים הבאים נראה שמושיותה הגדולה של אלגברה חדשה זו.

2. שדה הדיון של אלגברת בול. שויון המחלקות.

שדה הדיון של האלגברה הבוליאנית מורכב ממחלקות של עצמים, דהיינו מאוספים שונים של איברים, הנלקחים בדיון בתור יחידות שלמות.
נדרוש, שבין מחלקות של שדה הדיון תהיה נתונה מחלקה מסוימת, שתיקרא בשם <u>מחלקת הדיון</u> או <u>המחלקה הכוללת</u> ותסומן ב- I . התעניינותנו בשאר המחלקות שבשדה הדיון תמדד לפי הופעת אברי I בהן. להדגמת רעיון זה נתאר לעצמנו אדם היודע לקרוא שפה אחת בלבד והוא שופט על תוכן הספרים שברשותו לפי המלים שבשפה זו המופיעים בספרים אלה. לפיכך, למשל, כל הספרים שאין בהם אף מלה בשפתו הם חסרי תוכן לגביו. אם נדרוש, באופן דומה, שבשדה הדיון תמצא גם מחלקה שאין בה שום איבר של I , נוכל לקרוא לה בשם <u>מחלקה ריקה</u>. מחלקה כזו תסומן ב-$\emptyset$.
האדם, שדברנו עליו קודם, לא יבדיל בין שני ספרים במדה ומופיעים בהם בדיוק אותן המילים שבשפתו. לגביו ספרים אלה שוים. בהמשך לאנלוגיה זו נגדיר שויון בין שתי מחלקות שבשדה הדיון באופן הבא:

המחלקות X ו- Y משדה הדיון, תקראנה שוות-בסמון $X = Y$ אם ורק אם חלקיהן המופיעים ב- I שוים ביניהם.

לדוגמה: אם I מורכבת מהאברים א, ב ו-ג, המחלקה X - מהאברים א,ב ו-ה והמחלקה Y מהאברים א,ב ו-+, אזי $X = Y$, כי החלק של X בתוך I (האברים א ו-ב) מזדהה עם החלק של Y בתוך I (אותן האותיות). לעומת זאת $I \neq X$ ו- $I \neq Y$.

לפי הגדרה זו ברור שכל המחלקות הריקות שבתוך שדה הדיון שוות ביניהן. כמו כן שוות כל המחלקות המכילות את כל אברי I. בהתאם לכך נדבר להלן על מחלקה I אחת ומחלקה $\emptyset$ אחת.

יחס השויון הידוע מהחשבון מקיים את התכונות היסודיות הבאות:

א. עבור כל מספר x קיים: $x = x$ (רפלקסיביות)

ב. עבור כל x ו- y : אם $x = y$ הרי $y = x$ (סימטריה).

ג. עבור כל x, y ו- z : אם $x = y$ ו- $y = z$, הרי $x = z$ (טרנזיטיביות).

ד. אם בבטוי חשבוני $P(x)$, המכיל את x, נחליף בכל מקום מספר זה במספר שוה לו y , לא ישתנה גם ערך הבטוי החשבוני הנתון. בסמון: אם $x = y$ הרי $P(x) = P(y)$.

תכונות אלה הן פשוטות וידועות היטב. חשיבותן נעוצה בכך, שהכללים המבטאים אותן מספיקים לבצוע כל הצעדים החשבוניים הקשורים בשויון.

למרות ההבדל היסודי שבין משמעות יחס השויון שבחשבון ובין משמעות הסימן "=" המופיע בדיוננו על מחלקות, מתברר, שגם יחס שויון חדש זה הוא בעל אותן התכונות:

*א. עבור כל מחלקה X מתקיים $X = X$

*ב. עבור כל שתי מחלקות X ו- Y : אם $X = Y$, הרי $Y = X$

*ג. עבור כל המחלקות X , Y ו- Z ; אם $X = Y$ ו- $Y = Z$ הרי $X = Z$.

נשאיר לקורא אישור תכונות אלה.

אחרי שנכיר מהו <u>בטוי בוליאני</u> נמצא שגם לכלל ד. המצא אנלוגיה מדויקת באלגברה הבוליאנית.

3. <u>הפעולות והנוסחות הבוליאניות.</u>

$I, \emptyset, X, Y$ סמנו מחלקות שבשדה הדיון. בדומה לנהוג באלגברה הרגילה, ישנם סימנים שמשמעותם קבועה ביחס לשדה הדיון: I ו- $\emptyset$ (השוה 2,1,0... באלגברה הרגילה), וסימנים שמשמעותם אינה קבועה, אם כי יודעים שהם מסמנים מחלקות: X, Y, Z וכו' (השוה z, y, x באלגברה הרגילה). לסימנים מהמין הראשון נקרא <u>קבועים</u> ואילו לסימנים מהסוג השני נקרא <u>משתנים.</u> באלגברה הבוליאנית יש רק שני קבועים I ו- $\emptyset$.

נעבור כעת להגדרת הפעולות באלגברת בול.

א. <u>פעולת האיחוד</u>

נדרוש שבשדה דיון יחד עם כל שתי מחלקות X ו- Y תהיה קיימת מחלקה המכילה מאברי I בדיוק אותם האברים הנמצאים ב- X או ב- Y או בשתי מחלקות אלה גם יחד. מחלקה כזו הקרא האיחוד של X ו- Y ותסומן $X \cup Y$.

<u>דוגמה:</u> תהי I המחלקה המורכבת מהאברים א, ב ו-ג. בדרך כלל מסמנים זאת בצורה הבאה: $I = \{א, ב, ג\}$. נניח גם: $X = \{א, ב, ה\}$,

$Y = \{א, ג, +\}$ ו- $Z = \{ב, +, ה\}$

מתקיים:

$$X \cup Y = I \quad ; \quad X \cup Z = X \quad ; \quad \emptyset \cup X = X$$

ב. <u>פעולת החיתוך</u>

נדרוש שבשדה הדיון יחד עם כל שתי מחלקות X ו- Y תמצא מחלקה המכילה מאברי I בדיוק את אלה, המשותפים ל- X ול- Y. מחלקה כזו תקרא המשותף או החיתוך של X ו- Y ותסומן $X \cap Y$.

כך בדוגמה הנ"ל: $X \cap I = X$; $Y \cap Z = \emptyset$.

$$X \cap Y = \{א, ה\} = \{א\} = \{א, +\} = \{א, +, ה\}$$

ג. <u>פעולת ההשלמה</u>

נדרוש שבשדה הדיון יחד עם כל מחלקה X, תמצא גם מחלקה המכילה מאברי I בדיוק את כל אלה שאינם מופיעים ב- X. מחלקה כזו תקרא המשלים של X ותסומן ב- X'.

בדוגמה הנ"ל: $Y' = Z$ ו- $Z' = Y$

קיים בבירור $I' = \emptyset$ ו- $\emptyset' = I$

בטוי בוליאני יוגדר באופן הבא:

(1) סימן של משתנה או של קבוע הוא בטוי בוליאני.

(2) אם α הוא בטוי בוליאני אז גם α' הוא בטוי כזה.

(3) אם γ ו- δ הם בטויים בוליאניים אזי $\delta \cup \gamma$ ו- $\delta \cap \gamma$ הם בטויים כאלה.

(4) אין בטויים בוליאניים אחרים פרט לנ"ל.

נוסחה בוליאנית היא שויון בין שני בטויים בוליאניים.

<u>תרגיל:</u> נסח את התכונה הרביעית (*ד) של יחס השויון שבין המחלקות המתאים לתכונה ד' שבעמוד 22. בהתבסס על דוגמה כלשהי הגדר מספר בטויים בוליאניים ובדוק עבורם את קיום *ד.

4. <u>משפטים בוליאניים וייצוג הסתכלותי שלהם.</u>

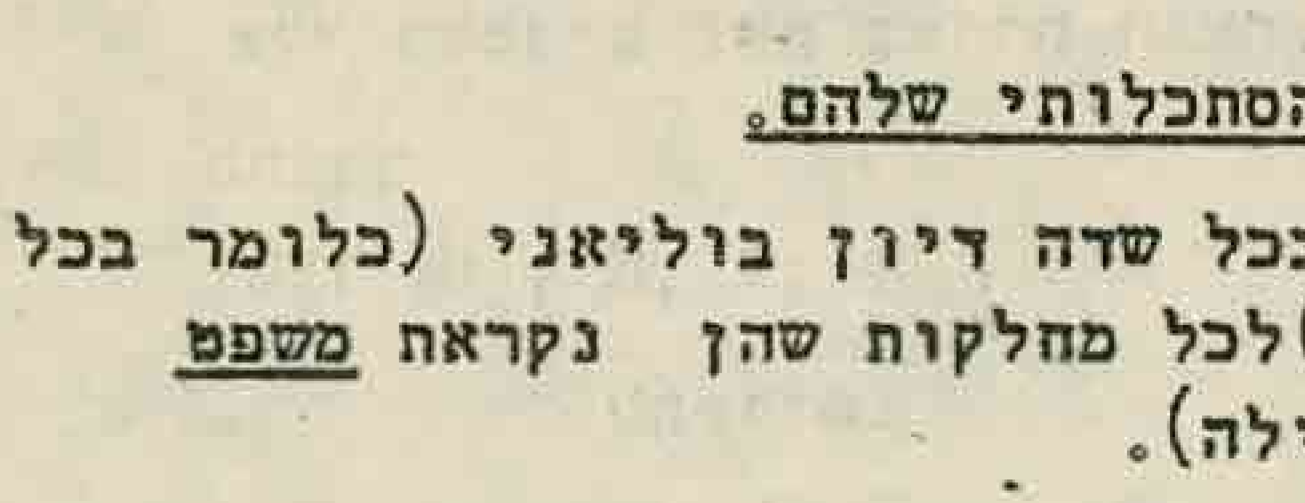
נוסחה בוליאנית המתקיימת בכל שדה דיון בוליאני (כלומר בכל שדה דיון הממלא את דרישותינו הנ"ל) לכל מחלקות שהן נקראת <u>משפט</u> בוליאני. (השוה זהות באלגברה הרגילה).

<u>דוגמאות:</u> $X \cup I = I$, $X \cap I = X$ וכו'.

לעומת זאת הנוסחה $X \cup Y = X$ מתקיימת בדרך כלל רק עבור מחלקות מסוימות של שדה הדיון ואיננה, איפוא, משפט בוליאני.

נשתדל בהמשך לרכז מספר מספיק של משפטים בוליאניים שיאפשרו ע"י חשוב פורמלי לקבל משפטים נוספים.

כדי להקל הבנת המשפטים השונים נשתמש בתאור הסתכלותי שלהם הנתן להלן. כשדה הדיון נקבע את מכלול קבוצות נקודות שעל פני עמוד זה. עבור I נבחר בנקודות שבתוך המלבן (ציור מס' 1). $\emptyset$ מיוצגת על ידי כל השטח שאינו מכוסה ע"י I. מחלקה כלשהי X תיוצג ע"י נקודותיה שבתוך I, ובאופן כזה כל המחלקות השוות מקבלות ייצוג זהה בציור שלנו. בעזרת הציור מקבלים ייצוג ברור ל- $X \cup Y, X \cap Y$



ציור מס' 1

ו- X' . אם X מתוארת ע"י השטח המקווקו, ו- Y ע"י המנוקד, הרי $X \cup Y$ מתוארת ע"י השטח המכוסה ע"י קוים או נקודות (גם קוים ונקודות ביחד), $X \cap Y$ ע"י השטח המנוקד והמקווקו בבת אחת, X' הוא השטח (בפנים המלבן) שאינו מקווקו.

כל בטוי בוליאני המכיל את הסמנים I, $X, \emptyset$ ו- Y בלבד מיוצג בציור מס' 1. בעזרת ציור זה נוכל להדגים את נכונות נוסחה בוליאנית $\alpha = \beta$ שמופיעים בה לכל היותר שני סימני משתנים שונים, ע"י כך שנראה את זהות השטחים המיצגים את α ו- β . אם במקרה מסוים נקבל ששטחים אלה אינם שוים, הרי הנוסחה המתאימה אינה משפט.

אם בנוסחה מסוימת מופיע מספר גדול של משתנים שונים, נעשה התאור הנ"ל מסובך למדי.

5. <u>התכונות היסודיות של הפעולות הבוליאניות.</u> פעולות האלגברה הרגילה מקיימות, כידוע, את התכונות היסודיות הבאות:

חוק החילוף (קומוטטיביות): $a + b = b + a; \quad ab = ba$

חוק הצירוף (אסוציאטיביות): $(a+b)+c=a+(b+c); (ab)c=a(bc)$

מתברר שגם פעולות החיתוך והאיחוד של אלגברת בול מקיימות שני חוקי יסוד אלה:

א) <u>קומוטטיביות האיחוד והחיתוך:</u>

לכל מחלקות X ו- Y מתקיים: $X \cup Y = Y \cup X; \; X \cap Y = Y \cap X$

ב) <u>אסוציאטיביות האיחוד והחיתוך:</u>

עבור כל X, Y, Z מתקיים:

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z); \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

נאשר, לדוגמה, את החוק האסוציאטיבי עבור האיחוד.

במחלקה $X \cup Y$ נמצאים בדיוק אותם אברי I הנמצאים או ב- X או ב- Y או בשתיהן. לכן ב- $(X \cup Y) \cup Z$ נמצאים אברי I המופיעים ב- X או ב- Y או ב- Z (גם בשתים מהן או בשלושתן). במחלקה $X \cup (Y \cup Z)$ נמצאים אברי I אשר ב- X או ב- $Y \cup Z$ או בשתיהן, כלומר ב- X , או ב- Y, או ב- Z (גם בשתים מהן או בשלשתן). לפי הגדרת שויון המחלקות: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

הקורא יאשר בלי קושי את שאר החוקים הנ"ל.

בשער החוברת ימצא הקורא הדגמה גרפית של חוק הצירוף לגבי החיתוך.

לאור חוק הצרוף נרשום להלן פשוט: $X \cup Y \cup Z$
ו- $X \cap Y \cap Z$. מוכיחים גם שחיתוך (או איחוד) של מספר כלשהו של מחלקות אינו תלוי בצירוף מחלקות אלה.

ג) <u>חזקות האיחוד והחיתוך.</u>

עבור כל מחלקה X קיים: $X \cup X = X$; $X \cap X = X$ (אשר!)
תכונות אלו מאפיינות את האלגברה הבוליאנית ומבדילות אותה מן החשבון הרגיל שבו $x + x = x$ רק עבור $x = 0$ ו-א $x.x = x$ רק עבור $x = 0$ או $x = 1$.

ד) <u>האיחוד והחיתוך לגבי $\emptyset$ ו-I</u> .

לכל מחלקה X קיים: $X \cup I = I$; $X \cap I = X$
$X \cup \emptyset = X$; $X \cap \emptyset = \emptyset$

הקורא יאשר בקלות שויונות אלה.

תרגיל: חשב: $I \cup I$; $I \cup \emptyset$; $\emptyset \cup \emptyset$;
$I \cap I$; $I \cap \emptyset$; $\emptyset \cap \emptyset$;
החלף את I ב-1 את $\emptyset$ ב-0, את האיחוד בחיבור ואת החיתוך בכפל. השוה את הנוסחאות המתקבלות בשתי האלגברות.

ה) <u>חוק המחלקה החלקית.</u>

עבור כל המחלקות X ו-Y מתקיים $X \cap Y = X$ אם ורק אם $X \cup Y = Y$.

<u>אשור:</u> להלן נקרא לאיבר של קבוצה כלשהי Z , אשר נמצא ב-I בשם עצם של Z .
אם $X \cap Y = X$, הרי כל עצמי X הם גם עצמי Y , כלומר ב-X אין שום עצם שאינו ב-Y , ו-$X \cup Y = Y$.
ולהיפך, אם $X \cup Y = Y$, הרי אין ב-X שום עצם שאינו מופיע ב-Y , כלומר כל עצמי X הם בתוך Y ו- $X \cap Y = X$.
במקרה כנ"ל אומרים ש-X היא מחלקה חלקית של Y .

6. <u>חוקי הסיפוח.</u>

לסיום המאמר נדגים הוכחת חוקים נוספים של האלגברה הבוליאנית בעזרת החוקים הקודמים.

<u>משפט:</u> עבור כל X ו-Y קיים:

א) $X \cap (X \cup Y) = X$ ב) $X \cup (X \cap Y) = X$

בעיות במסגרת התחרות המתמדת

ההתרות של בעיות גליון זה צריכות להגיע למערכת לא יאוחר מ- 15.8.1960.

הערה: הבעיות המצוינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ה׳, ו׳ בלבד.

ת.1* (2 נקודות). הוסף ל- ... 523 3 ספרות כך שמספר בעל שש הספרות המתקבל יתחלק ב-9,8,7.

ת.2* (3 נקודות). הוכח שמתוך 52 מספרים שלמים (שונים) אפשר תמיד לבחור שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב-100.

ת.3* (2 נקודות). הוכח: אם סכומם של שלושה מספרים טבעיים מתחלק ב-3, מתחלק גם סכום המעוקבים שלהם ב-3.

ת.4* (5 נקודות). שני אחים מכרו עדר כבשים משותף וקיבלו בעד כל כבשה מספר לירות השוה למספר הכבשים בעדר. את הכסף חילקו ביניהם באופן הבא: תחילה לקח האח הגדול 10 ל"י, אחר כך, קיבל האח השני 10 ל"י, שוב קיבל הגדול 10 ל"י וכו׳. בסוף חסרו לאח הקטן 10 ל"י. הוא לקח את כל הכסף הקטן שנשאר וחוץ מזה למען דיוק החלוקה נתן לו אחיו הגדול אולר. בכמה כסף העריכו האחים את האולר?

ת.5 (4 נקודות). במשלש 6 אלמנטים יסודיים: 3 צלעות ו-3 זויות. האם ייתכנו שני משלשים שונים בעלי 5 אלמנטים יסודיים שוים? אם כן, הבא דוגמה.

ת.6* (2 נקודות). פרק לגורמים $x^5 + x + 1$.

ת.7* (2 נקודות). בגמר תחרות מרוץ בו השתתפו 5 תלמידים א, ב, ג, ד, ה נמסרו ע"י המשתתפים ההודעות הבאות:

התלמיד	א	אמר:	ה היה הראשון ואני שני.
"	ב	" :	ה היה השני ואני הרביעי.
"	ג	" :	ד היה האחרון ואני הייתי השלישי.
"	ד	" :	ה היה השלישי ואני הייתי השני.
"	ה	" :	ג נצח ואני הייתי האחרון.

כל אחד מהנ"ל מסר עובדה אחת המתאימה למציאות ועובדה אחת בדויה. מצא את תוצאות המרוץ.

ת.8* (2 נקודות). בנה קטע, השוה ומקביל לקטע נתון, כך שקצותיו יהיו מונחים על מעגל וישר נתונים.

ת.9* (2 נקודות). מצא מספר בעל שלש ספרות (בשטת הספירה העשרונית), שערכו לא ישתנה אם נקרא אותו מימין שמאלה בשטת הספירה לפי בסיס 9.

$2 = 2 \bmod 11$
$2^2 = 4 \bmod 11$
$2^3 = 8 \bmod 11$
$2^4 = 16 = 5 \bmod 11$
$2^5 = 1 \bmod 11$
$2^6 = 2 \bmod 11$
$2^{55} = 1 \bmod 11$
$2^{55} = -1 \bmod 11$

*ת.10 (3 נקודות). הוכח שאם המעגלים, החסומים בתוך שני משולשים המתקבלים ממרובע כלשהו ע"י העברת אלכסון אחד, נוגעים זה לזה, יגעו גם המעגלים החסומים בתוך המשולשים המתקבלים ממרובע זה ע"י העברת האלכסון השני.

ת.11 (3 נקודות). הוכח כי המספר $2^{55} + 1$ מתחלק ב-11. 2^4+

ת.12 (2 נקודות). הוכח שאם יש מספר סופי של ישרים באופן שכל שניים מהם נחתכים, הרי או כולם נמצאים במישור אחד או כולם עוברים דרך נקודה אחת.

ת.13 (3 נקודות). העבר ישר (במרחב) מקביל לישר נתון וחותך 2 ישרים נתונים.

*ת.14 (5 נקודות). מתוך הלוח:

1	2	3	$\ldots\ldots\ldots n$
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\ldots\ldots\ldots 2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$\ldots\ldots\ldots 3n$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2$	$(n-1)n+3$	$\ldots\ldots\ldots n^2$

נבחרו n מספרים, כך שאף זוג ממספרים אלה לא נמצא באותו העמוד או באותה השורה של הלוח. מהו סכום המספרים שנבחרו?

ת.15 (5 נקודות). נתונים שני כדורים בעלי רדיוס r, שני כדורים בעלי רדיוס R ($R > r$), גליל ארוך מאד שרדיוסו ρ ומישור. ידוע שכל אחת משש הצורות הנ"ל משיקה לשאר החמש. הגליל משיק למישור לאורך קו יוצר ולכדורים על פני המעטפה שלו. בטא R ו- ρ באמצעות r.

- - - - - -

תמיד 1089

נתון מספר בן 3 ספרות שונות. החליפו את ספרת המאות בספרת היחידות והחסירו את המספר הקטן מהמספר הגדול. בהפרש שוב החליפו את ספרת המאות בספרת היחידות וחברו את התוצאה להפרש. הראה, כי התוצאה הסופית תהיה תמיד 1089.

חשבון חדש ?!

מתי: א) $2 \times 2 = 11$?

ב) $2 \times 3 = 11$?

ג) $3 \times 3 = 14$?

על החוג למתמטיקה בביה"ס המקצועי התיכוני של הטכניון.

בבית הספר התחיל לפעול לפני חדשים מספר חוג למתמטיקה בהדרכת מרכז לימודי המתמטיקה בביה"ס.

משתתפי החוג הם תלמידי כיתות ב' ו-ג' אשר המתמטיקה קרובה ללבם. בפגישות הראשונות נראו בחוג פנים רבות; כעת התיצב מספר המבקרים והועמד על כ-20 תלמידים.

החוג מתכנס אחת לשבוע ביום ו' בשעה 1 אחה"צ. החוג עוסק בשטחים שונים אשר אינם כלולים בתכנית הלימודים של בית-הספר. בין השאר נלמדה בחוג תורת הקונגרואנציה אשר אינה נלמדת בביה"ס וכן תורת ההסתברות אשר בה נוגעים בקצרה בלבד.

ההרצאות ניתנות על ידי המורה ועל ידי תלמידים מקרב משתתפי החוג. ההרצאה נבחרת ע"י המרצה בעזרת המורה.

מדי שבוע מוגשות מספר בעיות אשר אותן יש לפתור לקראת הפגישה הבאה של החוג. הפתרון איננו דורש בדרך כלל ידיעות מוקדמות מיוחדות, אלא בעיקר כושר התמצאות והסתכלות. להלן אחדות מבעיות אלה:

1. 72 תרנגולות עולות * 67.9 * ל"י (במספר האחרון נמחקו הספרות הראשונה והאחרונה ובמקומן רשומים כוכבים). מהו מחיר תרנגולת אחת?
2. התר את המשואה: $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$
3. להוכיח שבין 10 מספרים טבעיים עוקבים ישנו לפחות אחד ולכל היותר ארבעה אשר אינם מתחלקים ב-2, 3, 5, 7.

נוסף על הבעיות המתמטיות מובאים גם משחקים ובעיות הרכבה המעניינות ומהנות לא פחות.

ב-1.4.1960 התקיימה תחרות במתימטיקה המיועדה לתלמידי בית הספר המקצועי. בתחרות השתתפו כ-15 תלמידים רובם חברי החוג. לזוכים במקומות הראשונים יוענקו פרסים כספיים שיועדו למטרה זו ע"י הנהלת בית הספר. להלן הבעיות שהוצגו למשתתפי התחרות: (להתחרות הוקצבו שעתיים):

1. 25 מ' סרט שעביו 0.1 מ"מ מגוללים בצורה מהודקת על גליל. רוחב הסרט כגובה הגליל. אחרי הגלול התקבל גליל חדש שקוטר בסיסו 1 דצ"מ. מהו קוטר הגליל בלי הסרט ?
2. הוכח: כי אם עבור שני המספרים $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ קיים $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ הרי המספר $\frac{a+c}{b+d}$ נמצא בין שני המספרים האלה. ("נמצא בין" פירושו גדול מאחד מהם וקטן מהשני).
3. פתור את המשואה $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1$

4. הוכח כי בשביל כל n טבעי גדול מ-1 קיים:

$$(1 - \frac{1}{4}) \cdot (1 - \frac{1}{9}) \cdot (1 - \frac{1}{16}) \ldots (1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

<u>אין להשתמש באינדוקציה</u>

5. נתונים שני מעגלים בני מרכז משותף. עליך להעביר מיתר במעגל בעל המחוג הגדול יותר באופן שאורך המיתר הזה יחולק ע"י המעגל בעל המחוג הקטן ל-3 חלקים שוים.

6. נתונה קוביה שאורך צלעה n ס"מ. הקוביה עשוייה עץ לבן וצבועה מבחוץ (בכל צדדיה) בצבע אדום. חתכו את הקוביה ל- n^3 קוביות קטנות שנפח כל אחת מהן 1 סמ"ק.
בנה נוסחה (תלויה ב- n) לחישוב מספר הקוביות :
א. שפאה אחת שלהן צבועה אדום והשאר לבנות.
ב. ששתים מפיאותיהן צבועות באדום והשאר לבנות.
ג. ששלוש מפיאותיהן צבועות באדום והשאר לבנות.
ד. שכל פאותיהן לבנות.

קבוצת תלמידים ממשתתפי החוג.

<u>מהמערכת:</u> אנו מברכים את בית הספר המקצועי של הטכניון על פעילותו המתימטית הערה. אנו מקוים שגם בבתי ספר אחרים מתנהלת פעילות כזו ומחכים לכתבות מפורטות.

בגליון הבא נפרסם תשובות לבעיות שבמאמר זה.

- - - - - -

<u>רבוע קסם כפלי</u>

4	9	2
3	5	7
8	1	6

בנה רבוע אשר בו שוות מכפלות המספרים בכל שורה, עמוד ואלכסון.

העזר ברבוע קסם הנתון.

- - - - - -

הציורים בוצעו במחלקה לשרטוט ותכנון של בית הספר המקצועי ע"י הטכניון בהדרכתו של מר א. חריש.

הכפלת אופסט: "המכפיל", דרך העצמאות 43, טל' 4645, חיפה.

התכן

כתובת המערכת:

א. גינזבורג, המחלקה למתמטיקה, הטכניון, חיפה.

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.