רבעון למתמטיקה

ללמוד ולמחקר

בעריכת דב ירדן

כרך 1 | ירושלים, תשרי תש"ז, ספטמבר 1946 | חוברת 2

תכן

כתבת המערכת: דב ירדן, מלאכי 20, ירושלים

המחיר 200 מיל

על מערכת אכסיומות של ב. גרמנסקי לבסוס תורת המספרים הטבעיים

קורט בינג

I

רשימות אלו מטפלות במערכת אכסיומות Γ שהוצעה על ידי ב. גרמנסקי[1] כאקויולנטית למערכת האכסיומות Π של Peano [2]. ניתן הוכחה שניה מפורשת של הטענות הבאות:

1. הקבוצה G שהיא עצם ראשוני של Γ ומקיימת את Γ, מקיימת גם את Π (סעיף II).

2. הקבוצה P שהיא עצם ראשוני של Π[3] ומקיימת את Π, מקיימת גם את Γ (סעיף III).

לבסוף נוכיח את הטענה הנוספת שמערכת האכסיומות Γ היא בלתי תלויה (סעיף IV).

\- - - -

אותיות לטיניות גדולות (מלבד "R" ו "S" המסמנות יחסים דו-מקומיים) תסמנה קבוצות ופונקציות שערכיהן הם קבוצות. אותיות לטיניות קטנות תסמנה איברים של קבוצות ופונקציות שערכיהן הם איברים של קבוצות. עצמים שהם גם קבוצות וגם איברים של קבוצות לא יופיעו. אותיות יווניות גדולות תסמנה מערכות של אכסיומות. פירוש הסימנים "ε", "$\subset$", "+", "-", "$\{\}$", יהיה כמו בתורת הקבוצות.

\- - - -

מערכת האכסיומות Γ.

עצמים ראשוניים של Γ: קבוצה G, עצם 1, ויחס דו-מקומי R. ‏1, G ו R מקיימים את האכסיומות הבאות:

1. $1 \varepsilon G$.
2. אם $1 \notin G$, אז יש איבר u של G בעל התכונות הבאות: $uR1$; מן $yR1$ נובע $y=u$ [4].
3. אם $x \varepsilon G$, $x \neq 1$, אז ישנם איברים u,v של G בעלי התכונות הבאות: uRx; vRx; $u \neq v$; מן yRx נובע: $y=u$ או $y=v$. [4]
4. מן yRx נובע $y \neq x$.
5. מן yRx נובע xRy.
6. אם A ו B הן קבוצות חלקיות לא-ריקות של G המקיימות: $A.B=O$, $A+B=G$, אז ישנם איברים x ו y של G כך שקיים: $x \varepsilon A$; $y \varepsilon B$; yRx או xRy.

II

יוצאים ממערכת האכסיומות Γ ומגדירים על סמכה את ההגדרות הבאות:

<u>הגדרה 1.</u> "קבוצה" מובנה: קבוצה חלקית של G; "איבר" מובנו: איבר של G.

<u>הגדרה 2.</u> יהיו $x,y \varepsilon G$. y נקרא "שכן של x" אז ורק אז אם yRx.

<u>הגדרה 3.</u> "קבוצה ראשית" היא קבוצה המכילה את 1 כאיבר.

<u>הגדרה 4.</u> יהיה x איבר ו X קבוצה.

א) x נקרא "שלם ב X" אז ורק אז אם x הוא איבר של X וכל השכנים של x הם איברים של X.

ב) x נקרא "בודד ב X" אז ורק אז אם x הוא איבר של X ואף שכן של x איננו איבר של X.

---

1) ברוך גרמנסקי, אכסיומות של המספרים הטבעיים, רבעון למתמטיקה, כרך 1 (1946/47), עמוד 13. בקשר עם הוכחה של אי-תלות הוכנסו שינויים אחדים בניסוח המקורי של האכסיומות שאין להם חשיבות עקרונית.

2) ראה Edmund Landau, Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930, p.2 במאמר זה נמצא ביסוס של תורת המספרים הטבעיים על המערכת Π. המאמר יצוטט כ "L".

3) ב L נקראת P "קבוצת המספרים הטבעיים".

4) את האכסיומות 2 ו 3 אפשר גם לנסח בעזרת המונחים "בדיוק אחד", "בדיוק שנים". מונחים אלה (ומונחים דומים שנשתמש בהם) אינם מניחים את תורת המספרים הטבעיים.

ג) x נקרא "לקוי ב X" אז ורק אז אם x הוא איבר של X ויש בדיוק שכן אחד של x שאינו איבר של X.

__הגדרה 5.__ א) קבוצה X נקראת "לקויה" אז ורק אז, אם יש איבר x כך, ש x הוא לקוי ב X, וכל איבר של X השונה מן x הוא שלם ב X.

ב) יהיה x איבר ו X קבוצה. X נקרא "לקוי לגבי x" אז ורק אז אם X הוא קבוצה לקויה ו x הוא האיבר של X הלקוי ב X.

כדיוק באותם התנאים נקרא x "האיבר הלקוי של X".

ג) הגדרת הפונקציה l. לכל קבוצה לקויה X יותאם, בתור $l(X)$, האיבר הלקוי של X.

__הערה.__ הגדרות 5ב) ו5ג) מוצדקות על ידי זה, שלכל קבוצה לקויה ישנו בדיוק איבר אחד הלקוי בה (הגדרה 5א)). הפונקציה l אינה מוגדרת בשביל X שאינו קבוצה לקויה, והיא מוגדרת וחד-ערכית בשביל כל X שהוא קבוצה לקויה. לפי ההגדרה קיים בשביל כל קבוצה לקויה X:

(I) X הוא לקוי לגבי $l(X)$

(II) $l(X) \in X$.

__הגדרה 6.__ א) יהיה y איבר ו X קבוצה. y נקרא "האיבר המשלים של X" אז ורק אז אם קיים:

1) X הוא קבוצה לקויה.
2) $y \mathrel{R} l(X)$.
3) $y \text{ non} \in X$.

ב) הגדרת הפונקציה m. לכל קבוצה לקויה X יותאם, בתור $m(X)$, האיבר המשלים של X.

__הערה.__ הגדרות אלו מוצדקות על ידי זה, ש $l(X)$ הוא מוגדר וחד-ערכי בשביל כל קבוצה לקויה X (הגדרה 5), ושל $l(X)$ יש בדיוק שכן אחד y שאינו איבר של X (הגדרות 5 ו 4). $m(X)$ אינו מוגדר בשביל X שאינו קבוצה לקויה, והוא מוגדר וחד-ערכי בשביל כל X שהוא קבוצה לקויה.

לפי ההגדרה קיים בשביל כל קבוצה לקויה X:

(III) $m(X) \mathrel{R} l(X)$

(IV) $m(X) \text{ non} \in X$

__הגדרה 7.__ יהיה $x,y \in G$. y נקרא "שכן מצויין של x" אז ורק אז אם קיימת קבוצה X בעלת התכונות הבאות:

1) X היא קבוצה ראשית לקויה.
2) $x=l(X)$.
3) $y=m(X)$.

__הערה.__ הכינוי "שכן מצויין" הוא מוצדק, כי אם x, y ו X מספקות את הגדרה 7, קיים לפי נוסחה (III) של הגדרה 6:

(V) $y=m(X) \mathrel{R} l(X)=x$.

לכן אם y הוא שכן מצויין של x, y הוא גם שכן של x.

ההוכחה ש G מקיים את Π תהיה מבוססת על הוכחת הקיום, לגבי כל איבר x של G, של קבוצה X אחת ויחידה המקיימת את הדרישות (1) ו (2) של הגדרה 7.

__משפט 1.__ אם A ו B הן קבוצות חלקיות לא-ריקות של G המקיימות: $A.B=0$, $A+B=G$, אז ישנם איברים x ו y של G כך שקיים: $x \in A$; $y \in B$; yRx.

__הוכחה.__ אכסיומה 6 ואכסיומה 5.

__משפט 2.__ כל קבוצה חלקית אמיתית לא-ריקה X של G מכילה איבר x שאינו שלם ב X.

__הוכחה.__ X ו $(G-X)$ הן קבוצות חלקיות לא-ריקות של G המקיימות: $X.(G-X)=0$, $X+(G-X)=G$. לכן, לפי משפט 1, ישנם איברים x ו y של G כך שקיים: $x \in X$; $y \in (G-X)$; yRx. לפי הגדרה 4א), x הוא איבר של X שאינו שלם ב X.

__משפט 3.__ (משפט האנדוקציה). אם I היא קבוצה חלקית של G בעלת התכונות הבאות:

1. I אינה ריקה
2. אם $x \in I$ ו yRx, אז $y \in I$

– אז $I=G$.

__הוכחה.__ I היא קבוצה חלקית לא-ריקה של G, ולפי הגדרה 4א), כל איבר של I הוא שלם ב I. לפי משפט 2, I אינה קבוצה חלקית אמיתית של G, ו $I=G$.

<u>משפט 4.</u> קבוצה X היא קבוצה לקויה ו $l(X)=1$ אז ורק אז אם $X=\{1\}$.

<u>הוכחה.</u> א) תהיה X קבוצה לקויה, ו $l(X)=1$. נגדיר:

(1) $Z=X-\{1\}$.

כל איבר של Z הוא איבר של X השונה מן $l(X)=1$, ולכן, לפי הגדרת הקבוצה הלקויה

(2) כל איבר של Z הוא שלם ב X.

אנו טוענים שגם:

(3) כל איבר של Z הוא שלם ב Z.

באמת, היות ו 1 הוא לקוי ב X, יוצא לפי אכסיומה 2 ש 1 גם בודד ב X. לכן, נובע מן $z\in Z\subset X$ ש $z \text{ non } R\,1$, ולפי אכסיומה 5

(4) $1 \text{ non } Rz$.

לכן, כל שכן של z הוא שונה מן 1. לפי (2), כל שכן של z הוא גם איבר של X. לכן, לפי (1), כל שכן של z הוא איבר של Z. היות ו z היה איבר רצוני של Z, קיים (3). אבל Z הוא קבוצה חלקית אמיתית של G, ולפי משפט 2, נובע מן (3) ש Z צריך להיות קבוצה ריקה. לכן יוצא מן (1) והנוסחה $l(X)=1\in X$ ש $X=\{1\}$.

ב) יהיה $X=\{1\}$. אז יש ל 1, לפי האכסיומות 2 ו 4, שכן אחד ויחיד שאינו איבר של X, לכן 1 הוא לקוי ב X. באפן ריק קיים גם שכל איבר של X השונה מן 1 הוא שלם ב X. לפי הגדרה 5, X היא קבוצה לקויה, ו $l(X)=1$.

<u>משפט 5.</u> אם X היא קבוצה לקויה, $m(X)\neq 1$, אז גם $X+\{m(X)\}$ היא קבוצה לקויה, וקיים

(1) $l(X+\{m(X)\})=m(X)$.

<u>הוכחה.</u> יש להוכיח ש

(2) $m(X)$ הוא לקוי ב $X+\{m(X)\}$.

(3) כל איבר של $X+\{m(X)\}$ השונה מן $m(X)$ הוא שלם ב $X+\{m(X)\}$. באמת, יהי v איבר של $X+\{m(X)\}$ השונה מן $m(X)$. אז או $v\neq l(X)$ או $v=l(X)$, ובכל מקרה $v\in X$.

אם $v\neq l(X)$, אז, לפי הגדרת הקבוצה הלקויה, v הוא שלם ב X ולכן הוא גם שלם ב $X+\{l(X)\}$.

אם $v=l(X)$, אז שכן אחד ויחיד שלו אינו איבר של X, והשכן השני, אם הוא קיים, הוא איבר של X. אבל השכן הראשון הוא, לפי הגדרה 6, $m(X)$, ו $m(X)$ הוא איבר של $X+\{m(X)\}$; השכן השני, אם הוא קיים, גם הוא איבר של $X+\{m(X)\}$, היות והוא איבר של X. לכן v שלם ב $X+\{m(X)\}$ גם במקרה זה, וקיים (3).

$m(X)$ עצמו מקיים:

(4) $m(X)\in X+\{m(X)\}$.

מהגדרה 6 (III) והגדרה 5 (II) יוצא:

(5) $m(X)\ R\ l(X)\in X\subset X+\{m(X)\}$.

נוסף על זה, נובע מן ההנחה $m(X)\neq 1$ ואכסיומה 3 של $m(X)$ יש שכן שני z השונה מ $l(X)$. z הוא בעל התכונות הבאות:

(6) $m(X)Rz;\quad z\neq l(X);\quad z\neq m(X);\quad z \text{ non}\in X;\quad z \text{ non}\in X+\{m(X)\}$

שתי הנוסחאות הראשונות של (6) נובעות מהגדרת z ואכסיומה 5. הנוסחה השלישית מתקבלת מאכסיומה 4. הנוסחה הרביעית נובעת מן העובדה ש X היא קבוצה לקויה. כי $l(X)$ הוא האיבר היחידי של X בעל שכן שאינו איבר של X, והיות וגם ל z השונה מ $l(X)$ יש שכן (היינו $m(X)$) שאינו איבר של X, z אינו יכול להיות איבר של X. היות ו $z\neq m(X)$, קיימת גם הנוסחה האחרונה. מ (4), (5), (6) ואכסיומה 5 נובע (2), והמשפט מוכח.

<u>משפט 6.</u> יהיה

(1) X קבוצה ראשית לקויה

(2) $yRl(X)$.

מזה נובע:

(3) אם $y=m(X)$, אז $X+\{y\}$ היא קבוצה ראשית לקויה לגבי y.

(4) אם $y\neq m(X)$, אז $X-\{l(X)\}$ היא קבוצה ראשית לקויה לגבי y.

הערה: המשפט נותן את האפשרות לעבור מקבוצה ראשית X שהיא לקויה לגבי איבר $l(X)$, לקבוצה ראשית שהיא לקויה לגבי שכן נתון של $l(X)$. אם $l(X)\neq 1$, כל אחד מהמקרים $y=m(X)$, $y\neq m(X)$, יכול לקרות לפי הגדרה 6, (III).

הוכחה. לפי הגדרה 6, (III) ו (IV) קיים:

(5) $m(X)\ R\ l(X)$,

(6) $m(X)\ \mathrm{non} \in X$,

ומן (1) נובע

(7) $1 \in X$.

(6) ו (7) נותנים

(8) $m(X)\neq 1$.

א) יהיה עכשיו

(9) $y=m(X)$.

אז ממשפט 5, (1), (8) ו (9) נובע ש $X+\{y\}$ היא קבוצה לקויה לגבי y; ומן (7) נובע ש $X+\{y\}$ היא גם קבוצה ראשית. בזה הוכח (3).

ב) יהי

(10) $y\neq m(X)$

כדי להוכיח את (4), די להוכיח:

(11) $X-\{l(X)\}$ היא קבוצה ראשית

(12) y הוא לקוי ב $X-\{l(X)\}$

(13) אם $v \in X-\{l(X)\}$, $v\neq y$, אז v שלם ב $X-\{l(X)\}$.

באמת, מ (2), (5) ו (10) נובע של $l(X)$ ישנם שני שכנים שונים, היינו $m(X)$ ו y; לכן

(14) $l(X)\neq 1$,

ומ (7) ו (14) יוצא (11).

מלבד זאת, קיים:

(15) $y \in X-\{l(X)\}$,

כי y הוא השכן של $l(X)$ השונה מ $m(X)$; והיות ו $m(X)\ \mathrm{non} \in X$ נובע מהגדרת $l(X)$ ש $y \in X$. על סמך אכסיומה 4, קיים גם $y\neq l(X)$, ו (15) מוכח.

y הוא גם לקוי ב $X-\{l(X)\}$, כי היות ו $y \in X$, $y\neq l(X)$, y הוא שלם ב X; ובמעבר ל $X-\{l(X)\}$ נאבד בדיוק שכן אחד של y, היינו $l(X)$. בזה הוכח (12).

יהיה עכשיו v איבר של $X-\{l(X)\}$ השונה מ y. היות ו $v\neq l(X)$, קיים

(16) v הוא שלם ב X.

קיים גם

(17) $v\ \mathrm{non}\ Rl(X)$

כי אחרת היה v מתלכד או עם y, בניגוד להנחה $v\neq y$, או עם $m(X)$, ואז היה נובע מ (6) ש $v\ \mathrm{non} \in X$, בניגוד להנחה ש $v \in X-\{l(X)\}$. מ (17) מתקבל ש $l(X)\ \mathrm{non}\ Rv$, וזה, יחד עם (16), גורר אחריו ש v שלם גם ב $X-\{l(X)\}$.

בזה הוכח (13), וההוכחה של (4) ושל המשפט כולו היא שלמה.

משפט 7. יהיה $x \in G$, ותהיינה X ו $\bar{X}$ קבוצות ראשיות לקויות לגבי x. אז קיים $X=\bar{X}$.

הוכחה. תהיה I קבוצת אותם האיברים של G המקיימים את הטענה.

א) $1 \in I$. כי אם X ו $\bar{X}$ הן קבוצות ראשיות לקויות לגבי 1, נובע ממשפט 4, ש $X=\bar{X}=\{1\}$. לכן:

(1) I איננה קבוצה ריקה.

ב) יהיה

(2) $v \in I$; xRv.

יש להוכיח שגם

$$x \notin I, \tag{3}$$

כי אז יצא מ (1) וממשפט 3 ש $I=G$, וההוכחה תהיה שלמה. תהיינה איפוא X ו $\bar{X}$ קבוצות ראשיות לקויות לגבי x; אז יתקיים, על סמך (2), אכסיומה 5 והגדרה 5:

$$vRx=l(X)=l(\bar{X}) \tag{4}$$

באשר לקשר בין v, $m(X)$ ו $m(\bar{X})$, קיימות, מבחינה הגיונית, הצירופים הבאים של אפשרויות:

	$v=m(\bar{X})$	$v\neq m(\bar{X})$
$v=m(X)$	מקרה 1	מקרה 2
$v\neq m(X)$	מקרה 3	מקרה 4

במקרה 1 נובע מ (4) וממשפט 6 שגם $X+\{v\}$ וגם $\bar{X}+\{v\}$ הן קבוצות ראשיות לקויות לגבי v; ומן ההנחה (2), $v\notin I$, נובע ששתי הקבוצות צריכות להתלכד. באפן זה מתקבל בכל מקרה ומקרה שוויון בין שתי קבוצות ראשיות הלקויות לגבי v. השוויונות הם הבאים:

מקרה 1: $X+\{v\}=\bar{X}+\{v\}$

מקרה 2: $X+\{v\}=\bar{X}-\{l(\bar{X})\}=\bar{X}-\{x\}$

מקרה 3: $X-\{x\}=\bar{X}+\{v\}$

מקרה 4: $X-\{x\}=\bar{X}-\{x\}$

המקרים 2 ו 3 אינם יכולים להתקיים, כי בשני המקרים מתקבל שוויון בין קבוצה המכילה את x כאיבר ($X+\{v\}$, $\bar{X}+\{v\}$), לקבוצה שאינה מכילה את x כאיבר ($X-\{x\}$, $\bar{X}-\{x\}$). לכן קיים או מקרה 1 או מקרה 4. במקרה 1 נובע מהגדרה 6 (IV) ש $v \text{ non}\in X$, $v \text{ non}\in \bar{X}$, לכן קיים $X=\bar{X}$. במקרה 4 נובע מ (4) והגדרה 5 (II) ש $x\in X$, $x\in\bar{X}$; לכן מתקבל $X=\bar{X}$ גם במקרה זה. לכן טענת המשפט נכונה ל x, ו (3) מוכח.

<u>משפט 8.</u> אם $x\in G$, אז קיימת קבוצה ראשית X הלקויה לגבי x.

<u>הוכחה.</u> תהיה I קבוצת כל האיברים של G המקיימים את המשפט.

א) לפי משפט 4, $X=\{1\}$ היא קבוצה לקויה לגבי 1, היות והיא גם קבוצה ראשית, $1\in I$, ו I אינה קבוצה ריקה.

ב) יהיה $x\in I$ ו yRx. נוכיח שגם $y\in I$.

באמת, על סמך ההנחה ישנה קבוצה ראשית X הלקויה לגבי x וקיים

$$yRx=l(X) \tag{1}$$

אם $y=m(X)$, נובע ממשפט 6 ו (1), ש $X+\{y\}$ היא קבוצה ראשית לקויה לגבי y.
אם $y\neq m(X)$, יוצא באותו אופן ש $X-\{x\}$ היא קבוצה ראשית לקויה לגבי y.
לכן ישנה קבוצה ראשית לקויה לגבי y, וגם $y\in I$. לפי משפט 3, $I=G$.

<u>הגדרה 8.</u> הגדרת הפונקציה L. לכל איבר x של G יותאם, בתור $L(x)$, הקבוצה הראשית הלקויה לגבי x.

<u>הערה:</u> אפן דיבור זה הוא מוצדק, כי מהמשפטים 8 ו 7 נובע שלכל איבר x של G ישנה קבוצה ראשית X אחת ויחידה הלקויה לגבי x. לכן $L(x)$ הוא מוגדר וחד-ערכי בשביל כל איבר x של G. לפי הגדרה 8 והגדרה 5 קים

$$x=l(L(x)). \tag{VI}$$

<u>משפט 9.</u> יהיה $x\in G$. אז יש ל x שכן מצויין [5] y אחד ויחיד. יש גם איבר z אחד ויחיד המקיים את המשואה

$$z=m(L(x)), \tag{1}$$

והשכן המצויין y של x מתלכד עם z.

<u>הוכחה.</u> יהיה $x\in G$. אז קיום וחד-ערכיות של איבר z המקיים את (1) מתקבלים מן ההערות להגדרות 8 ו 6. – ש z הוא שכן מצויין של x נובע מן הגדרה 7, מן העובדה ש $L(x)$ היא קבוצה ראשית לקויה, מהגדרה 8 (VI) ו (1). להפך, אם v הוא שכן מצויין של x, קיימת לפי הגדרה 7 קבוצה X כך ש X היא קבוצה ראשית לקויה לגבי x ו $v=m(X)$. לפי הגדרה 8 וההערה לה, $X=L(x)$; לכן

$$v=m(L(x)) \tag{2}$$

---

5) ראה הגדרה 7 [illegible] TT

ולפי מה שהוכח כבר, $z=v$.

<u>הגדרה 9.</u> הגדרת הפונקציה f. לכל איבר x של G יותאם, בתור $f(x)$, השכן המצויין של x.

<u>הערה.</u> לפי משפט 9, אפן דיבור זה הוא מוצדק, והפונקציה $f(x)$ היא מוגדרת וחד-ערכית בשביל כל איבר x של G.

<u>משפט 10.</u> יהיה $x \in G$. אז $f(x)=m(L(x))$.

<u>הוכחה.</u> הגדרה 9 ומשפט 9.

<u>משפט 11.</u> אם $x \in G$, אז $f(x) \text{ non} \in L(x)$.

<u>הוכחה.</u> משפט 10, הגדרה 6 (IV).

<u>משפט 12.</u> אם $x \in G$, אז $L(f(x))=L(x)+\{f(x)\}$.

<u>הוכחה.</u> לפי משפט 10 קיים

(1) $f(x)=m(L(x))$.

מ (1) והגדרה 6 (III) נובע

(2) $f(x) \, R \, l(L(x))$.

לפי הגדרה 8, קיים גם:

(3) $L(x)$ היא קבוצה ראשית לקויה.

ממשפט 6, (3), (2) ו (1) נובע ש $L(x)+\{f(x)\}$ היא קבוצה ראשית לקויה לגבי $f(x)$, ומזה מתקבל, לפי הגדרה 8 וההערה לה:

(4) $L(x)+\{f(x)\}=L(f(x))$.

<u>משפט 13.</u> אם $x \in G$, אז $x \in L(f(x))$.

<u>הוכחה.</u> מהגדרה 8, (VI), הגדרה 5, (II) ומשפט 12 נובע:

$x \in L(x) \subset L(f(x))$.

<u>משפט 14.</u> יהיה $x,y \in G$; yRx. בתנאים אלה קיים $y=f(x)$ אז ורק אז אם $x \neq f(y)$.

<u>הערה.</u> ממשפט 14 נובע שהאיבר v איננו השכן המצויין של השכן המצויין שלו; ואם $v \neq 1$, אז v הוא השכן המצויין של השכן הלא-מצויין שלו.

<u>הוכחה.</u> א) יהיה $y=f(x)$. אז לפי משפט 13 קיים:

(1) $x \in L(y)$.

לפי משפט 11 קיים:

(2) $f(y) \text{ non} \in L(y)$.

מן (1) ו (2) נובע $x \neq f(y)$.

ב) יהיה $x \neq f(y)$. מזה נובע על סמך משפט 10 שגם

(3) $x \neq m(L(y))$.

מלבד זאת קיים:

(4) $L(y)$ היא קבוצה ראשית לקויה.

מהגדרה 8, (VI) מתקבל:

(5) $y=l(L(y))$,

ומן (5), ההנחה yRx ואכסיומה 5 יוצא:

(6) $xRl(L(y))$.

ממשפט 6, (4), (6), (3) ו (5) נובע ש $L(y)-\{y\}$ היא קבוצה ראשית לקויה לגבי x; לכן, לפי הגדרה 8 וההערה לה:

(7) $L(y)-\{y\}=L(x)$,

ומזה נובע ש

(8) $y \text{ non} \in L(x)$.

מלבד זאת, נובע מן הנחת המשפט והגדרה 8 (VI)

(9) $yRl(L(x))$.

מהגדרה 6, הגדרת $L(x)$, (9) ו (8) נובע ש y הוא המשלים של $L(x)$, $y=m(L(x))$; ומזה נובע לפי משפט 10 ש $y=f(x)$.

משפט 15. הקבוצה G שהיא עצם ראשוני של מערכת האכסיומות Γ ומקיימת את Γ, מקיימת גם את מערכת האכסיומות Π של Peano [6]. אם נציב ב Π במקום הקבוצה P [7] את הקבוצה G, במקום העצם 1 את האיבר 1 של G, ובמקום פונקצית העוקב את פונקצית השכן המצויין המוגדרת ב G, האכסיומות של Π נהפכות למסקנות מן Γ.

הוכחה.

1. 1 הוא איבר של G.
טענה זו נכונה לפי אכסיומה 1 של Γ.

2. אם x הוא איבר של G, אז יש בדיוק איבר אחד של G הנקרא השכן המצויין של x, ואשר יצויין ב $f(x)$.
טענה זו יוצאת ממשפט 9. הסימון מתאים להגדרה 9.

3. תמיד קיים $f(x)\neq 1$.
כי לפי משפט 11,

$$f(x) \text{ non}\in L(x). \tag{1}$$

לפי הגדרות 8 ו 3, קיים גם

$$1\in L(x), \tag{2}$$

ומן (1) ו (2) יוצאת הטענה.

4. מן $f(x)=f(y)$ נובע $x=y$.
כי מ $f(x)=f(y)$ נובע על סמך הגדרה 9, ההערה להגדרה 7, ואכסיומה 5:

$$xRf(x)=f(y)Ry. \tag{3}$$

ממשפט 14 נובע

$$x\neq f(f(x)), \tag{4}$$

ומאותו משפט וההנחה מתקבל:

$$y\neq f(f(x)). \tag{5}$$

לפי (3), (4) ו (5), x ו y הם שכנים של $f(x)$ השונים מן השכן המצויין של $f(x)$. מזה, העובדה ש $f(x)\neq 1$ ואכסיומה 3 נובע שגם x וגם y צריכים להתלכד עם השכן הלא-מצויין של $f(x)$, וקיים $x=y$.

5. תהיה M קבוצה של איברים מתוך G כך שקיים:

$$1\in M, \tag{I}$$

$$\text{אם } x\in M, \text{ גם } f(x)\in M, \tag{II}$$

אז M מכיל את כל האיברים של G.
- כי נוכיח שקיים

(6) אם $x\in G$, אז $L(x)\subset M$.

היות ולפי הגדרה 8, (VI) והגדרה 5, (II), כל איבר x של G מקיים גם את הנוסחה

$$x\in L(x), \tag{7}$$

יצא מן (6) שכל איבר של G הוא גם איבר של M, וההוכחה של טענה 5 תהיה שלמה.
באמת, תהי I קבוצת כל האיברים x של G שבשבילם המסקנה של (6) היא נכונה.

א) לפי משפט 4, $\{1\}$ היא קבוצה לקויה לגבי 1. היא גם קבוצה ראשית, ולפי הגדרה 8 וההערה לה קיים:

$$L(1) = \{1\}. \tag{8}$$

היות ולפי התכונה (I) של M, $1\in M$, נובע מן (8)

$$L(1)\subset M, \tag{9}$$

לכן $1\in I$, ו I איננה קבוצה ריקה.

- - - - - - - - - - - - - -

6) ראה הערה 2).
7) ראה הערה 3).

ב) יהיה $x \in I$, ו yRx. יש להוכיח כי גם $y \in I$.

מן $x \in I$ נובע

(10) $L(x) \subset M$.

לכן לפי (7) קיים

(11) $x \notin M$,

ומזה מתקבל לפי התכונה (II) של M:

(12) $f(x) \notin M$.

יש להבדיל בין המקרים $y=f(x)$ ו $y \neq f(x)$.

אם $y=f(x)$, קיים לפי משפט 12:

(13) $L(y)=L(x)+\{f(x)\}$,

ומן (13), (10) ו (12) נובע ש

(14) $L(y) \subset M$.

אם $y \neq f(x)$, אז נובע מן ההנחה yRx ומשפט 14

(15) $x=f(y)$.

מן (15) ומשפט 12 נובע

(16) $L(x)=L(y)+\{f(y)\}$,

ומן (16) ו (10) יוצא גם במקרה זה הקיום של (14). לכן $y \in I$. לפי משפט 3, $I=G$, והנוסחה (6) היא נכונה. בזה הוכח משפט 15.

(המשך יבוא)

הערה על חשיבות אכסיומת Pasch בגאומטריה אוקלידית

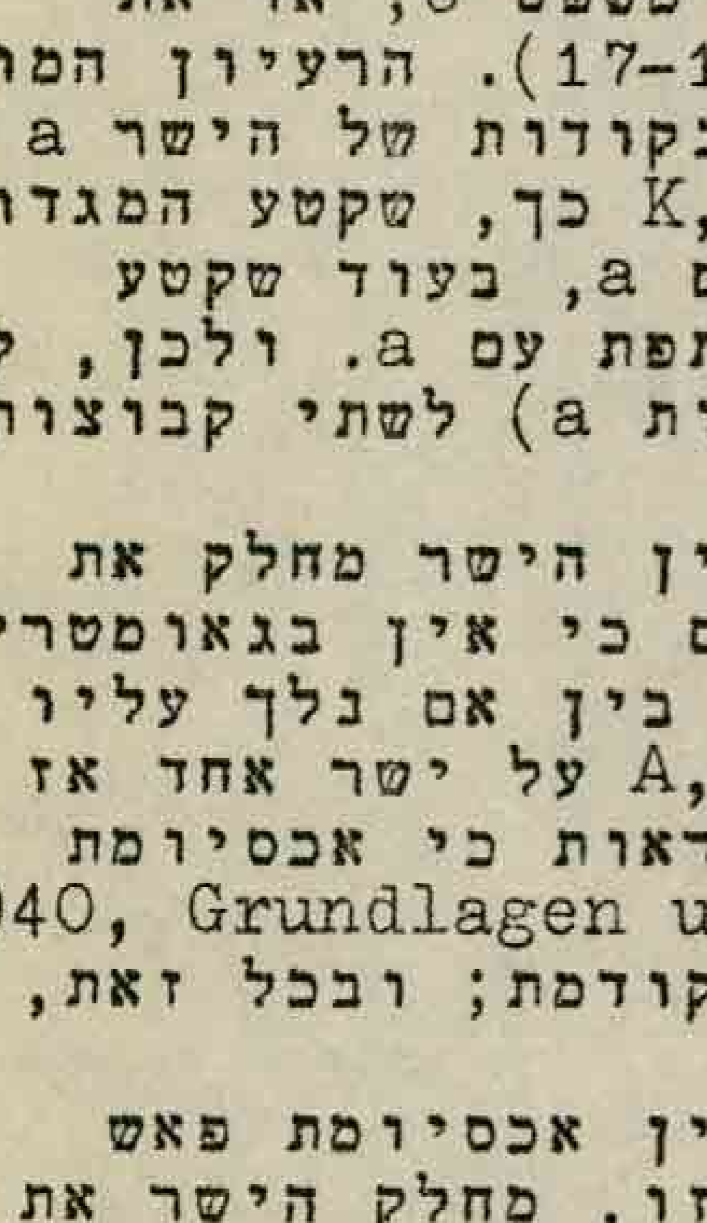
נתן קבקר

1. נהוג לחשוב כי המשפט כי ישר a מחלק את המישור לשני חלקים שונים הוא תוצאה ישרה מהאכסיומה של פאש בלבד. (ראה למשל: D. Hilbert, Grundlagen der Geomet ie, הוצאה שביעית, פרק א, §4, משפט 8; או את ספרה של גב' אמירה: "גאומטריה", חלק א, תרצ"ח, עמ' 15–17). הרעיון המונח ביסוד הוכחת משפט זה הוא כי את נקודות המישור (פרט לנקודות של הישר a עצמו) אפשר, על סמך אכסיומת פאש, לחלק לשתי קבוצות K,L כך, שקטע המגדר ע"י שתי נקודות מאחת הקבוצות, אין לו נקודה משותפת עם a, בעוד שקטע המגדר ע"י שתי נקודות מקבוצות שונות יש לו נקודה משותפת עם a. ולכן, קשר זה בין שתי נקודות מחלק את נקודות המישור (פרט לנקודות a) לשתי קבוצות זרות, כי הוא מקים את יחסי האקויולנציה הדרושים.

2. יש דוגמה קלסית לגאומטריה מישורית אשר בה אין הישר מחלק את המישור לשני חלקים, והיא הגאומטריה הפרויקטיבית. ואם כי אין בגאומטריה זו מובן חד-ערכי למושג "בין" (כי לישר יש אותו "קצה" בין אם נלך עליו "ימינה" או "שמאלה"), הרי בכל-זאת אם נאמר כי אם A,B,C על ישר אחד אז כל אחת מהנקודות האלה היא בין שתים האחרות, יכולים לראות כי אכסיומת פאש קימת (ראה למשל L. Hefter, Grundlagen u. Analytischer Aufbau, 1940, עמ' 10). אפשר אפוא לחזור אף במקרה זה על ההוכחה הקודמת; ובכל זאת, אין הישר מחלק את המישור לשני חלקים.

3. מתוך הדוגמה המצוטטת ב (2) אפשר להסיק כי אין אכסיומת פאש מספיקה למטרתנו, והסבה פשוטה. אמנם, בעזרת אכסיומה זו, מחלק הישר את המישור לשני חלקים שונים K,L, אולם יש להוכיח כי הם אינם ריקים. באמת נראה כי לשם כך אנו זקוקים לאכסיומת "בין" אחרת, והיא: אם A,B,C שלש נקודות על ישר אז אחת מהן בין שתים האחרות, ורק אחת מהן. (דבר שאינו מתקים בגאומטריה פרויקטיבית).

4. יש אפוא להוכיח, כי אם נתון ישר a, אפשר למצוא שתי נקודות, אשר הקטע המגדר על-ידן, יש לו נקודה משותפת עם הישר a.



הוכחה: נקח נקודה A לא על הישר a, ונבחר בנקודה B כלשהי על a. על הישר הנקבע ע"י A,B נקח נקודה C כך ש B בין A ו C. (מציאותה נובעת מאכסיומת "בין" אצל Hilbert שם). ברור, כי AC (המכיל את B) הוא הקטע המגדר ע"י A ו C, כי אחרת היה גם A בין B ו C (כמו בגאומטריה פרויקטיבית). ע"כ מצאנו שתי נקודות A,C משני צדי הישר a. הקבוצות K,L אינן ריקות, והישר a (ע"ס אכסיומת פאש) מחלק את המישור לשני חלקים שונים.

על הדיסטריבוטיביות של צרוף DIRICHLET

נתן קבקר

1. במאמר של דב ירדן ות. מוצקין "צרוף דירכלה ותורת המספרים" (רבעון למתמטיקה כרך 1, עמודים 1-7) נפלה טעות בעמוד 3, משפט 12.

המשפט הדיסטריבוטיבי לגבי פונקציות כפליות נתון בצורה הבאה: אם f,g,h פונקציות כפליות, הרי: $f(g\hat{}h) = (fg)\hat{}(fh)$ . . . . (1).

בהוכחת המשפט (שם שורה ראשונה) כתוב: $f(n) = f(d)f(n/d)$, דבר שאינו קים בדרך כלל בפונקציות כפליות.

הערה א. אם n מכיל גורמים ראשוניים שונים בלבד, יהיה (1) נכון.

הערה ב. אם $f(mn)=f(m)f(n)$ בשביל כל זוג m,n, יהיה (1) נכון.

הגדרה. אם f פונקציה אריתמטית המקימת את התנאי של הערה ב, תקרא בשם פונקציה כפלית חזקה (לפי הצעת מר ירדן).

הערה ג. בדרך כלל אין צרוף דירכלה של פונקציות כפליות חזקות אף היא כפלית חזקה. דוגמה: נקח $f=g=1$ בשביל כל n, אז $f\hat{}g=\tau$, ופה τ מספר המחלקים של n, ואין פונקציה כפלית זו כפלית חזקה.

הערה ד. הטעות במאמר תפסול רק את המשפטים 12 ו 13. בהמשך המאמר אין משתמשים בהם.

2. אוכיח עתה את המשפט: אם f פונקציה כפלית ואם (1) נכון לגבי כל שתי פונקציות כפליות g,h, הרי f בהכרח פונקציה כפלית חזקה.

הוכחה. נקח $g=1$ לכל n, ו $h=\mu$ (הפונקציה של Möbius). אז $g\hat{}h=\delta$ (δ יחידת דירכלה, ראה עמ' 1 ו 3 למטה במאמר הנ"ל). ע"כ (1) נותן: $f.\delta=f\hat{}(f\mu)$

כיון ש $f(1)=1$, הרי $f.\delta=\delta$ וע"כ $f\hat{}(f\mu)=\delta$

ובכתיב מלא: $n\geqslant 2$; $\sum_{d|n} f(d)f(n/d)\mu(n/d)=0$ . . . . (2).

יהי $n=p^{\alpha}$ (p ראשוני, α טבעי). אז, כידוע: $\mu(1)=1$; $\mu(p)=-1$; $\mu(p^{\beta})=0$ בשביל $\beta\geqslant 2$. ולכן מתוך (2):

$f(p^{\alpha})-f(p^{\alpha-1})f(p)=0$. מכאן, ע"י אנדוקציה, $f(p^{\alpha})=(f(p))^{\alpha}$.

אם $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ (הפרוק הקנוני של n) נקבל על סמך הכפליות של f כי

$f(n) = \prod_{i=1}^{k} (f(p_i))^{\alpha_i}$, וע"כ f כפלית חזקה.

בצרוף עם הערה ב למעלה, נוכל לומר:

משפט: נתונה פונקציה כפלית f. תנאי הכרחי ומספיק לכך שיתקים (1) בשביל כל שתי פונקציות כפליות g,h ובשביל כל n, הוא כי f תהיה כפלית חזקה.

3. אפשר בקלות למצוא דוגמה לשלש פונקציות כפליות f,g,h שתקימנה את התנאי (1) מבלי ש f תהיה כפלית חזקה. ואמנם, אם $g=\delta$, אז $g\hat{}h=h$, וע"כ יתן האגף השמאלי של (1): fh; האגף הימני יהיה: $(f\delta)\hat{}(fh)=(\delta)\hat{}(fh)=fh$.

טור מתכנס מהר בשביל פונקציה אליפטית מטיפוס ויירשטרס

עַרִי ז'בוטינסקי

1. הקדמה:

כידוע, הפונקציות האליפטיות הפשוטות ביותר הן אלה שיש להן שני קטבים במשבצת היסודית. אם שני הקטבים מתלכדים נקראת הפונקציה "מטיפוס ויירשטרס" ואם שני הקטבים שונים – "מטיפוס יעקובי". כל הדיונים בפונקציות של ויירשטרס פשוטים הרבה יותר מאלה של יעקובי, פרט לעובדה שהטורים הנותנים את הפונקציות של יעקובי מתכנסים הרבה יותר מהר מאלה הנותנים את הפונקציות של ויירשטרס.

כך למשל הפונקציה $P(z)$ של ויירשטרס בעלת המחזורים w_1, w_2 נתנת ע"י הטור:

$$P(z)=1/z^2+\sum{}'\left[(z-2mw_1-2nw_2)^{-2}-(2mw_1+2nw_2)^{-2}\right] \qquad (1)$$

($\sum{}'$ מציין את הסכום הכפול לפי כל הערכים השלמים של m ו n מ$-\infty$ ועד$+\infty$, פרט לצרוף הערכים $n=o$, $m=o$).

בו בזמן שהפונקציה $\operatorname{sn} z$ של יעקובי מוגדרת ע"י המשואה:

$$\operatorname{sn} z = \left[\vartheta_3(o)/\vartheta_2(o)\right]\cdot\left[\vartheta_1(z/\vartheta_3^2(o))/\vartheta_4(z/\vartheta_3^2(o))\right]$$

באשר הפונקציות ϑ_1, ϑ_4 מוגדרות ע"י הטורים:

$$\vartheta_1(u)=2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-)^m q^{(m+1/2)^2}\sin(2m+1)u$$

$$\vartheta_4(u)=1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-)^m q^{m^2}\cos 2mu$$

ובאשר q הוא מספר הקשור במחזורים וידוע ש $|q|<1$.

רואים מיד שהטור (1) פשוט הרבה יותר מהטורים (2) אך הוא מתכנס יותר לאט ואינו יכול לשמש לחישוב מעשי של ערכי $P(z)$. מטרת המאמר הזה היא לתת נוסחה המאפשרת לבנות טורים המגדירים פונקציות אליפטיות הקשורות ב $P(z)$, אבל המתכנסים במהירות דומה לזו של הטורים (2).

לשם כך עלינו להזכיר עוד כמה פרטים על הפונקציות מטיפוס ויירשטרס (ראה גם כן: Whittaker and Watson, Modern Analysis, p.348). ראשית נזכיר את הפונקציה $\sigma(z)$ של ויירשטרס המוגדרת ע"י המכפלה:

$$\sigma(z)=z\prod{}'\left[\left(1-\frac{z}{2mw_1+2nw_2}\right)\operatorname{Exp}\left(\frac{z}{2mw_1+2nw_2}+\frac{z^2}{2(2mw_1+2nw_2)^2}\right)\right]$$

מ $\sigma(z)$ מגדירים את $\zeta(z)=\sigma'(z)/\sigma(z)$ ואת $P(z)=-\zeta'(z)$. קל לבדק שההגדרה הזו של $P(z)$ מובילה לטור (1). לפונקציה $\zeta(z)$ יש התכונה הבאה של קְוָזִי-מחזוריות:

$$\zeta(z+2w_1)=\zeta(z)+2w_1' \; ; \; \zeta(z+2w_2)=\zeta(z)+2w_2'$$

המספרים w_1' ו w_2' קשורים עם המספרים w_1 ו w_2 ע"י המשואה:

$$w_1'w_2-w_2'w_1=\tfrac{1}{2}\pi i$$

משואה זו חשובה מאד בהמשך עניננו. לפונקציה $\sigma(z)$ יש גם כן תכונות של קְוָזִי-מחזוריות לפי המשואה:

$$\sigma(z+2w_1)=-e^{2w_1'(z+w_1)}\sigma(z)\cdot\sigma(z+2w_2)=-e^{2w_2'(z+w_2)}\sigma(z) \qquad (4)$$

2. הנוסחה:

הנוסחה שברצוני להוכיח אותה היא:

$$Q(z)=P(z)\,\sigma'(z)=\sum(-)^{mn+m+n}\frac{\mathrm{Exp}\left[-2\{w_1w_1'm^2+(w_1w_2'+w_2w_1')mn+w_2w_2'n^2\}+2(w_1'm+w_2'n)z\right]}{z-(2mw_1+2nw_2)} \tag{5}$$

במקרה המיוחד שבו $2w_2=i$; $2w_1=1$ ידוע שקים $2w_1'=\pi;\ 2w_2'=-i\pi$ והנוסחה (5) מקבלת את הצורה המיוחדת:

$$Q(z) = \sum(-)^{mn+m+n}\frac{\mathrm{Exp}\left[-\frac{\pi}{2}(m^2+n^2)+\pi(m-in)z\right]}{z-(m+ni)} \tag{6}$$

רואים בנקל שהטור (6), שהוא מקרה מיוחד של הטור (5), מתכנס במהירות הדומה לזו של הטורים (2). בשביל להוכיח שהטור (5) מתכנס ת מ י ד בצורה דומה יש להוכיח שהחלק הממשי של התבנית הרבועית $T(m,n)$ הנתנת להלן הוא תמיד חיובי מוחלט.

$$T(m,n)=w_1w_1'm^2+(w_1w_2'+w_2w_1')mn+w_2w_2'n^2=(w_1m+w_2n)(w_1'm+w_2'n) \tag{7}$$

אינני יודע להוכיח שהחלק הממשי של $T(m,n)$ הוא תמיד חיובי מוחלט אך אני מ ש ע ר שהדבר נכון. בשביל להוכיח זאת לא די במשואה (3) וצריך גם להוכיח, בין השאר, שהחלק הממשי של w_1w_1' ושל w_2w_2' תמיד חיובי. אודה מאד למי שיוכל למלא את ההוכחה. בכל אפן ב (6) יש לנו דוגמה של מקרה שבו הדבר נכון. כעת אוכיח שבמקרה שהטור (5) מתכנס, קים $Q(z)=P(z).\sigma(z)$.

3. ההוכחה:

נקרא $u(m,n;z)$ לאיבר שמתחת לסמן הסכום בנוסחה (5). רואים ש:

$$u(m+1,n;z+2w_1)/u(m,n;z)=-e^{2w_1'(z+w_1)}$$

$$u(m,n+1;z+2w_2)/u(m,n;z)=-e^{2w_2'(z+w_2)}$$

אבל $Q(z)=\sum u(m,n;z)$ כאשר m ו n משתנים מ $-\infty$ ל $+\infty$. לכן

$$Q(z+2w_1)/Q(z)=-e^{2w_1'(z+w_1)}$$

$$Q(z+2w_2)/Q(z)=-e^{2w_2'(z+w_2)}$$

מכאן ומהמשואות (4) רואים שהפונקציה $Q(z)/\sigma(z)$ היא פונקציה אליפטית, בעלת המחזורים $2w_1, 2w_2$ ואשר אין לה קטבים אלא באפסים של $\sigma(z)$ ובקטבים של $Q(z)$. לכן לפונקציה הזאת יש קטבים כפולים בנקודות $2mw_1+2nw_2$. קל לבדוק נוסף על כך שבקרבת $z=0$, הפונקציה $Q(z)/\sigma(z)$ אסימפטוטית ל $1/z^2$. לכן $Q(z)/\sigma(z)=P(z)$, כפי שרצינו להוכיח.

4. השימוש:

הנוסחה (6) נתקבלה על ידי באיסטנבול ב 1945 אגב חקירה על מספר הנקודות של סריג רבועי הנמצאות בפנים של מעגל גדול. (חקירה זו נעשתה על ידי ביחד עם הגברת אירמגרד בראון). אמנם יש לה ולנוסחה הכללית (5) שמוש הרבה יותר ישיר: מ (5) אפשר לקבל טורים מתכנסים מהר בשביל הפונקציות $Q'(z)$ ו $Q''(z)$. אבל $Q'/Q=P'/P+\zeta$ ומכאן, בהתחשב עם הנוסחאות:

$P'^2=4P^3-g_2P-g_3$ ו $P''=6P^2-\frac{1}{2}g_2$:

$$(QQ''-Q'^2)/Q^2=(P^3+\tfrac{1}{2}g_2P+g_3)/P^2 \tag{8}$$

הנוסחה (5) מרשה לחשב (לאחר שיודעים את w_1, w_2 ואת w_1', w_2') את הערך של $Q(z)$. הנוסחה (8) מרשה למצא את הערך של $P(z)$ מתוך משואה אלגברית ממעלה שלישית. (אגב: אפשר לשאול איך להבחין בין שלשת השרשים של (8)).

משפט חפיפה שלישי בארבעונים

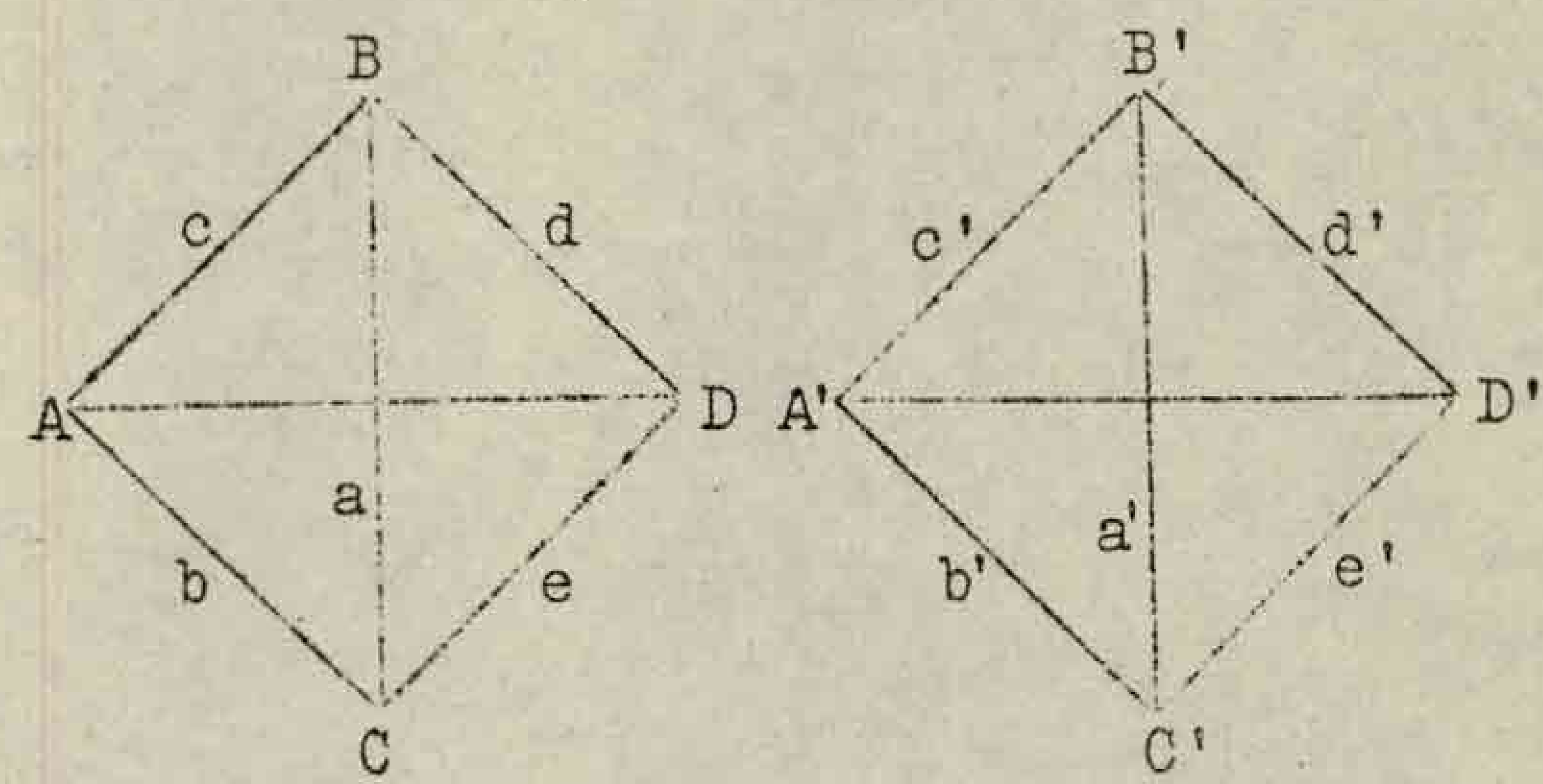
זבולון טוכמן

ב"דפים למתמטיקה ולפיסיקה" כרך א חוברות ז וי"א הוכיח דב יוז'וק וכותב השורים האלה את משפטי החפיפה הראשון והשני בארבעונים, שלפיהם שני ארבעונים חופפים, אם ארבע פאות האחד חופפות בהתאמה לארבע פאות האחר, או אם שלש פאות האחד חופפות בהתאמה לשלש פאות האחר והפנות הכלואות ביניהן חופפות אף הן. כאן ברצוני להוכיח את

משפט החפיפה השלישי. שני ארבעונים חופפים, אם שתי פאות האחד חופפות בהתאמה לשתי פאות האחר ושתי הפנות שעל-יד הפאות החופפות בארבעון האחד חופפות לשתי הפנות המתאימות בארבעון השני.

הוכחה. נתון:

$$(1)\quad \begin{cases} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \\ \triangle DBC \equiv \triangle D'B'C' \\ B \text{ פנה} \equiv B' \text{ פנה} \\ C \text{ פנה} \equiv C' \text{ פנה} \end{cases}$$



צריך להוכיח, שהארבעונים חופפים.

משפט-עזר. מ (1) נובע:

$$(2,1)\quad d/b=d'/b', \qquad (2,2)\quad c/e=c'/e'.$$

הוכחה. ידוע שנפחי שני ארבעונים בעלי פנה חופפת מתיחסים זה לזה כמכפלת המקצועות, הבונים את הפנה, לכן: $acd/a'c'd'=abe/a'b'e'$, ומכאן:

$$(3)\quad (d/b).(c/e) = (d'/b').(c'/e').$$

אך מצד שני: $abc=a'b'c'$ ו $ade=a'd'e'$, לכן $ade/abc=a'd'e'/a'b'c'$, ומכאן:

$$(4)\quad (d/b):(c/e) = (d'/b'):(c'/e').$$

מ (3) ו (4), בשים לב לכך, שהמדובר הוא בקטעים וארכיהם, הוה אומר בגדלים חיוביים, יוצא (2,1) ו (2,2).

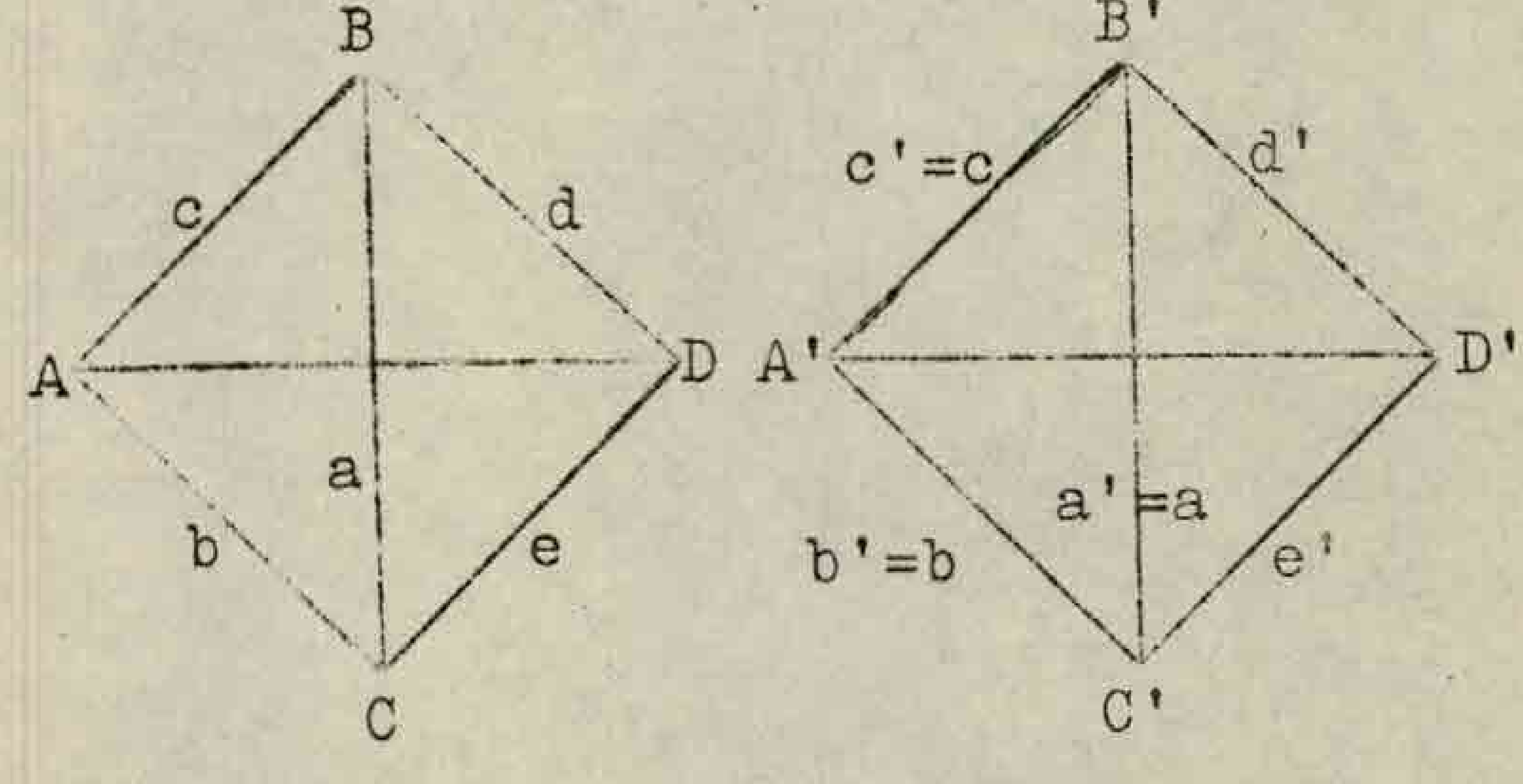
בכדי להוכיח את המשפט הראשי נבדיל בין המקרים הבאים, הממצים את כל האפשרויות:

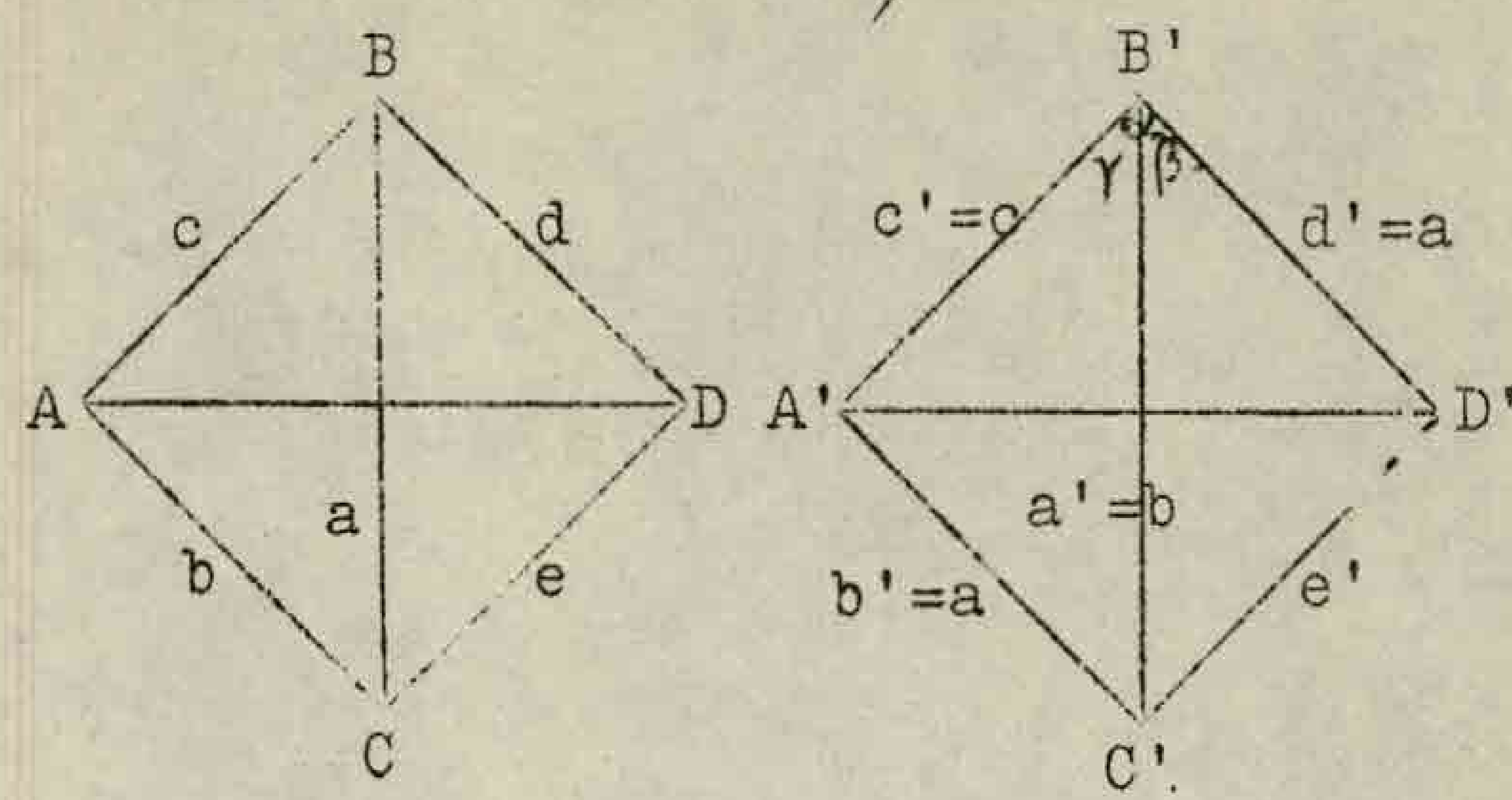
$$I.\ a'=a, b'=b, c'=c;\ II.\ a'=b, b'=a, c'=c;\ III.\ a'=a, b'=c, c'=b;\ IV.\ a'=b, b'=c, c'=a;$$
$$V.\ a'=c, b'=b, c'=a; \qquad VI.\ a'=c, b'=a, c'=b.$$

די לטפל במקרים I-IV, כי V סמטרי ל II ו VI ל IV.

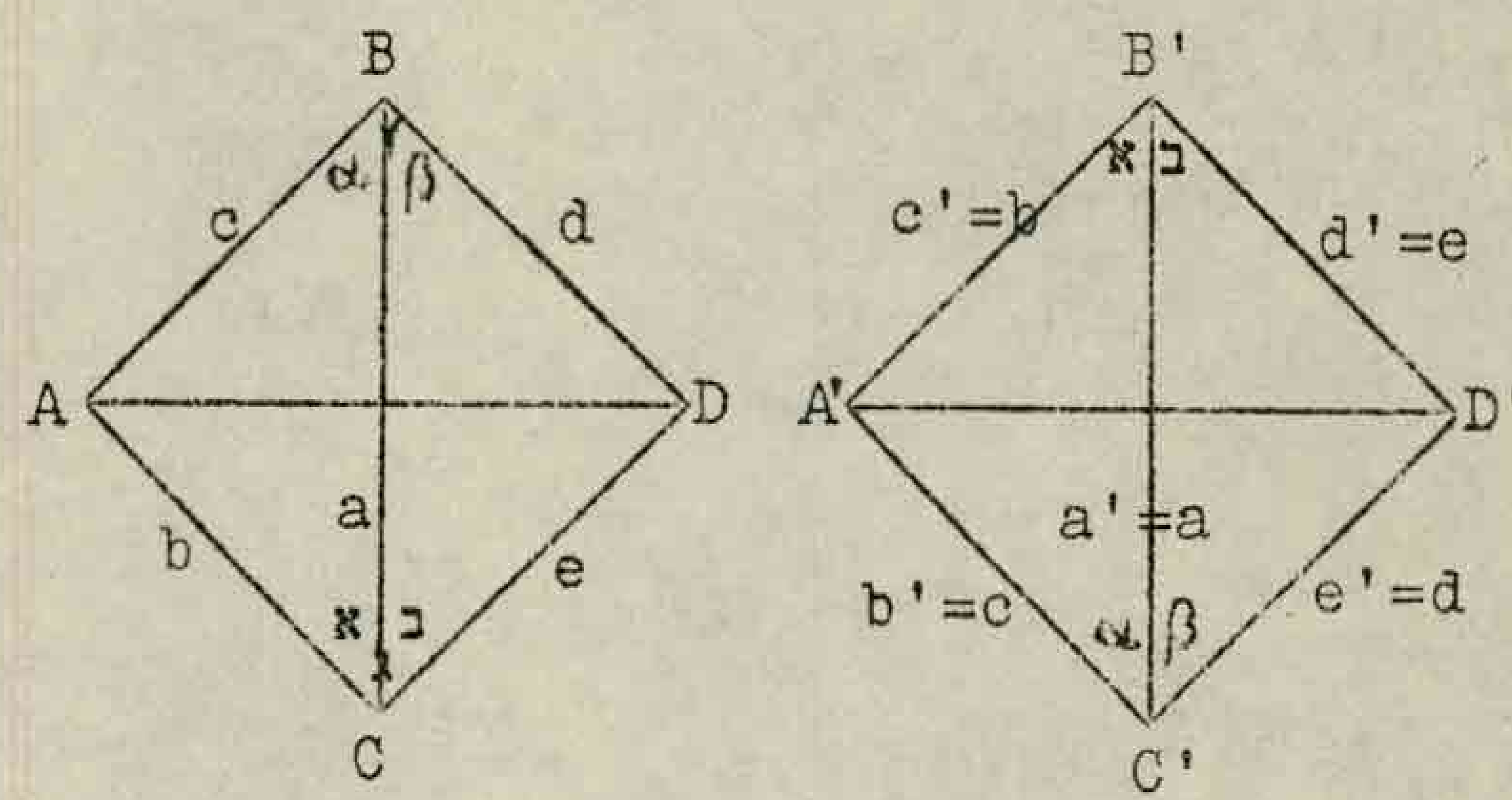
מקרה I. מלבד (1) נתון: $a'=a, b'=b, c'=c$.

על סמך משפט-העזר נקבל: $d'=d$, $e'=e$, ומכאן נקבל על נקלה שכל הפאות המתאימות חופפות, מה שמחזיר אותנו למשפט-החפיפה הראשון.



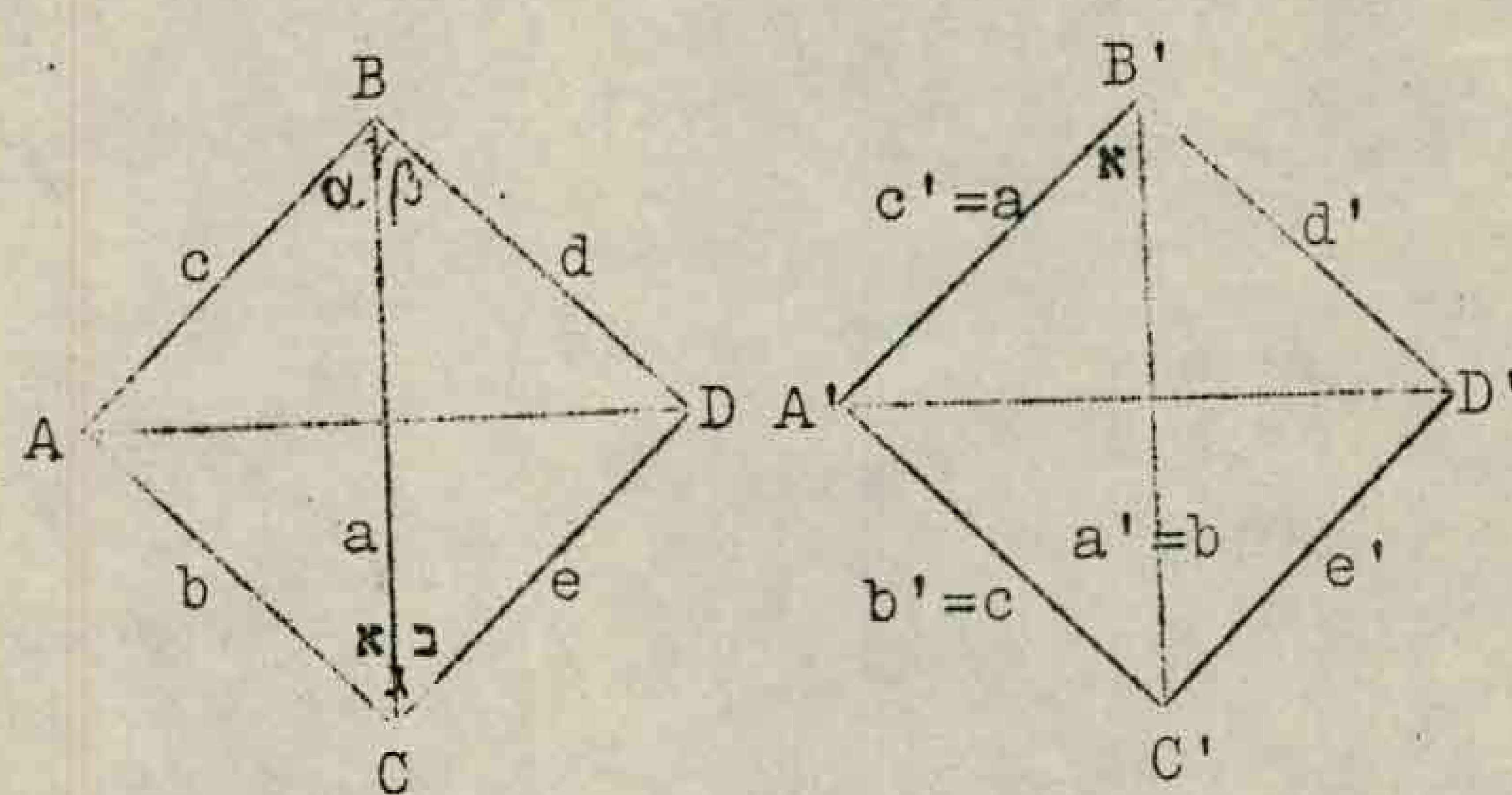


מקרה II. מ (2,2) יוצא:
$a'=d$ ולכן $e'=e$
(אחרת $a'=a$ ולפנינו מקרה I),
כלומר $d=b$, ומכאן $d'=a$.
$\angle A'B'C'=\gamma$ ולכן: $\beta=\angle C'B'D'$
ו $\angle A'B'D'=\alpha$ (אחרת $b'=b$
ולפנינו מקרה I). מכאן:
$\triangle A'B'D' \equiv \triangle ABC$
ו $A'D'=b$. באותה דרך נגיע ל $AD=a$ ומכאן $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$, מה שמחזיר אותנו למשפט החפיפה השני.

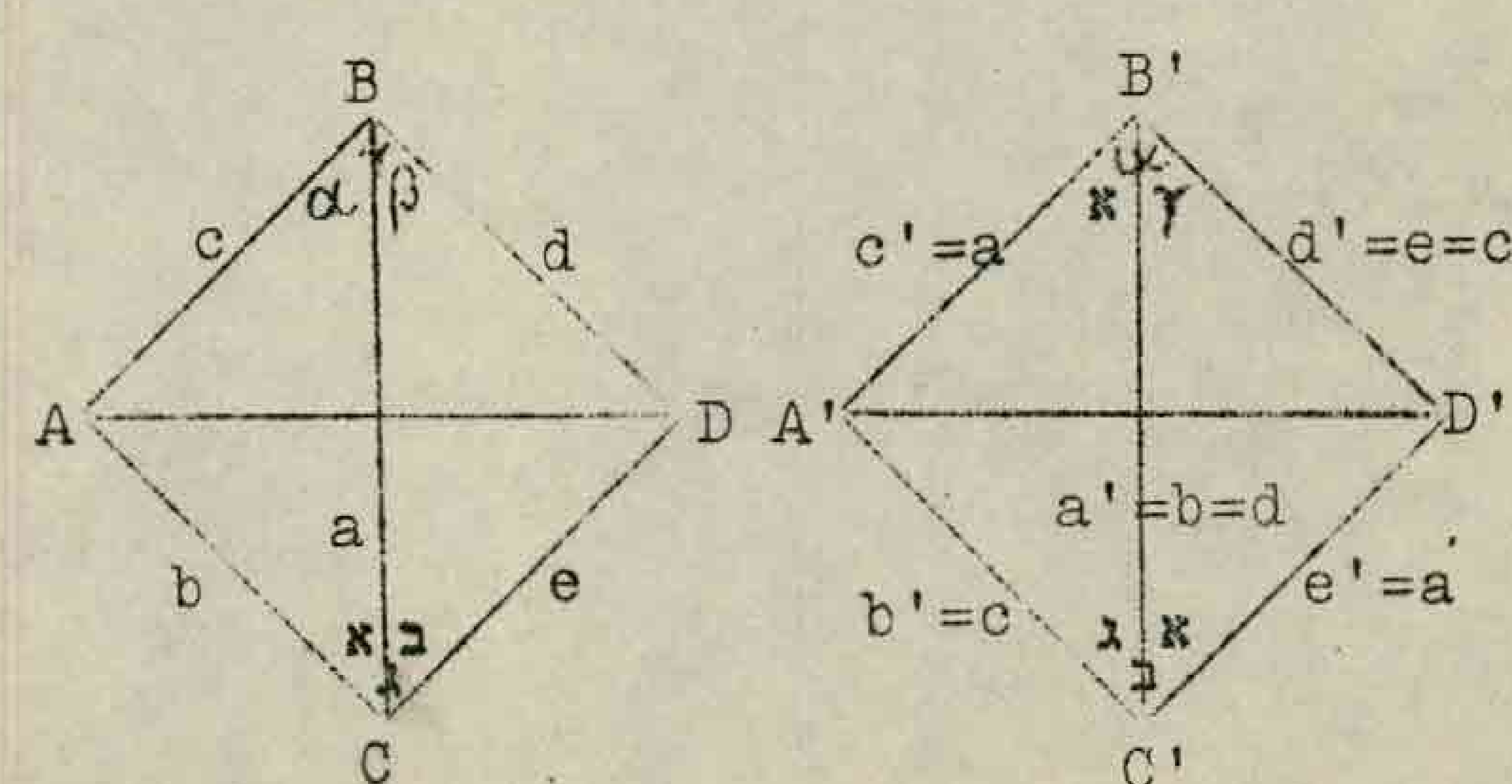


מקרה III. נבדיל בין אפשרויות אלה:
א) $d'=d$, $e'=e$ - סימטרי למקרה I.
ב) $d'=e$, $e'=d$.
מכאן: $\angle A'C'B'=\alpha$, $\angle A'B'C'=$א
$\angle B'C'D'=\beta$, $\angle C'B'D'=$ב
ב1) א$=\beta$ ו ב$=\alpha$ - מכאן
$\triangle BCD \equiv \triangle ABC$ ומכאן
$b=d$, $c=e$ וכן $\angle A'B'D'=\gamma$
ולכן $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$
ולפנינו משפט-חפיפה שני.
ב2) א$=\beta$ ו ב$=\gamma$. מכאן ג$=\alpha$ (כי אם א$=\alpha$ יוצא $c'=c$ ולפנינו מקרה I, ואם ב$=\alpha$ - לפנינו ב1). אך אם א$=\beta$, ב$=\gamma$ ו ג$=\alpha$ - יוצא כי פנה B ≡ פנה C' ו $\triangle ABD \equiv \triangle A'D'C'$ ולפנינו משפט-חפיפה שני.
ב3) א$=\gamma$, ב$=\alpha$ - סימטרי ל ב2.

אפשרויות אחרות אין צרך לקחת בחשבון, כי בהן או א$=\alpha$ או ב$=\beta$ ובכל אחת מאלה אנו מגיעים למקרה I.



מקרה IV. מלבד (1) נתון
$a'=b$, $b'=c$, $c'=a$
1IV) $a'=a$ מכאן $a=b$ ולפנינו מקרה III.
2IV) $a'=d$ אז נקבל מ (2,1) ו (2,2)
$d'=cd/b$ $e'=be/c$
ואם $a'=d$ יוצא $b=d$ ולכן $d'=c$.
אך אם $a'\neq a$ (אם לא - 1IV)
ו $d'\neq a$ (אם לא כן $c=a$ ולפנינו מקרה II) - אז $e'=a$ ואז כמובן $d'=e$ ו $c=e$.

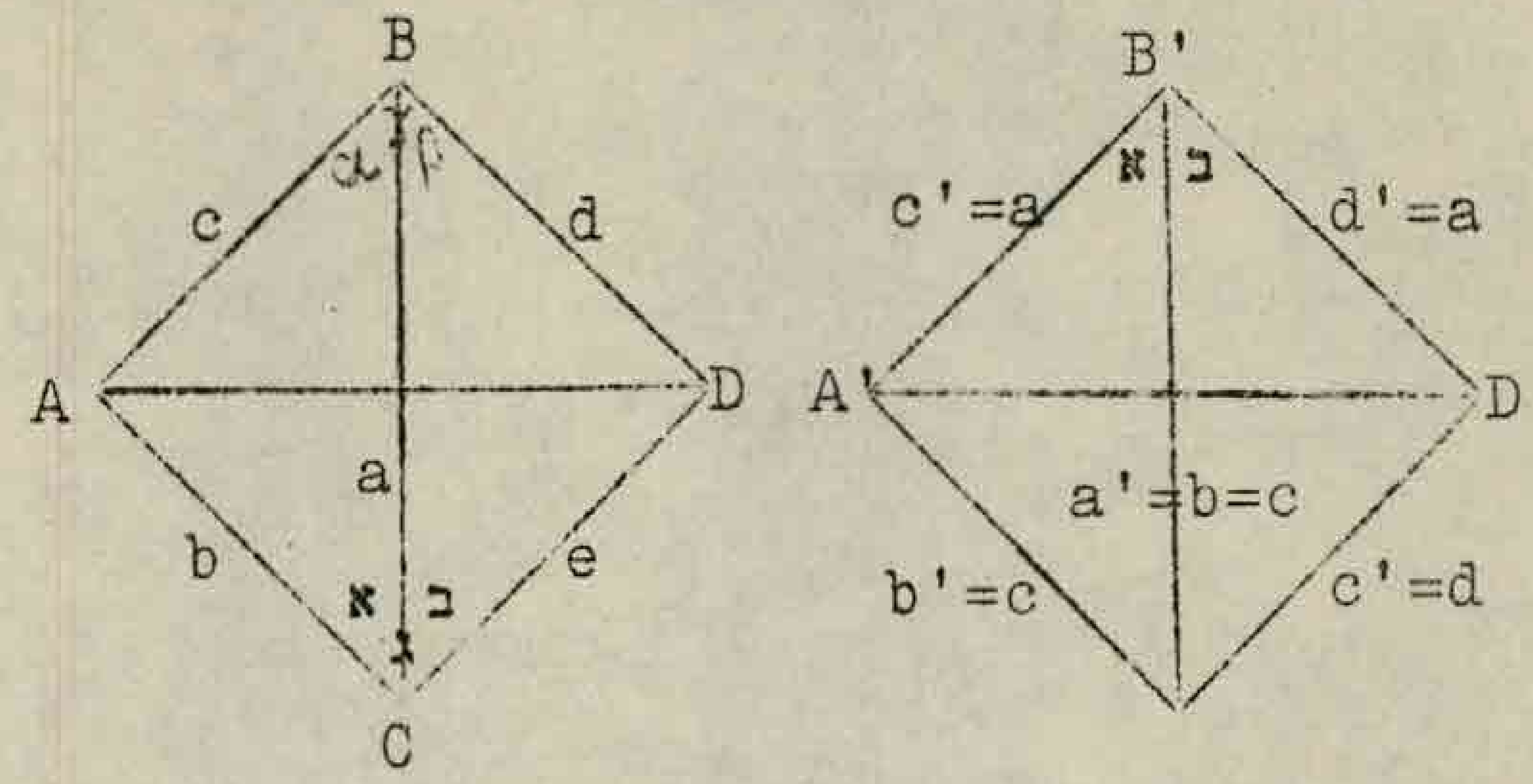


מחפיפת $B'D'C'$ ו ABC יוצא
א$=\angle B'C'D'$, $\angle B'D'C'=\alpha$
ובשים לב ל $\triangle BDC$ נקבל: ב$=\alpha$
ולכן ג$=\angle B'C'A'$ (אחרת $a'=a$!)
ב$=\angle A'C'D'$. באותה דרך: $\beta=$א,
$\angle C'B'D'=\gamma$, $\angle A'B'D'=\alpha$
מהשואת ABD ו $C'B'D'$ יוצא:
$AD=a$
מהשואת ABC ו $A'B'D'$ יוצא:
$A'D'=b$

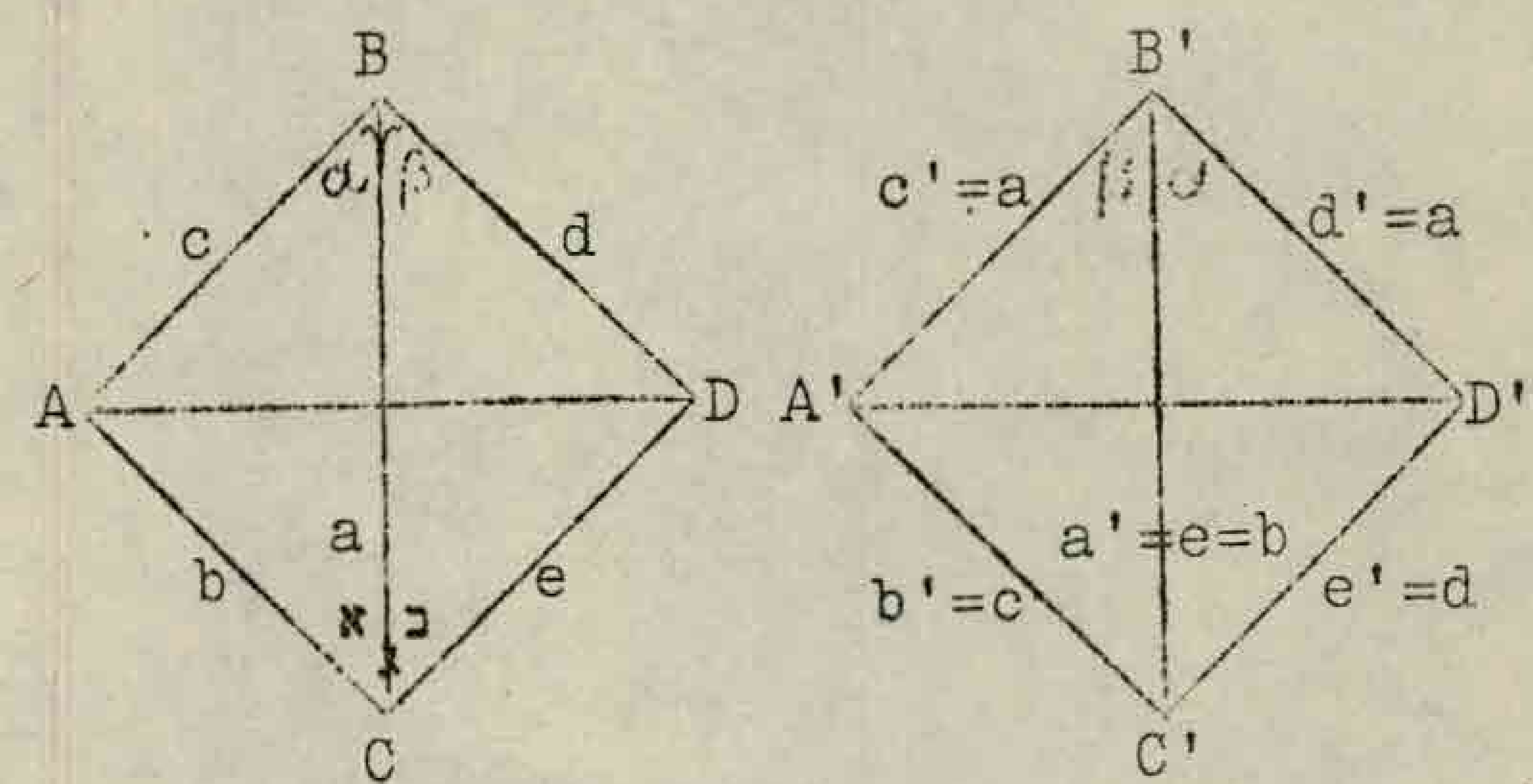
ומזה A'B'D' ≡ ABD ולפנינו משפט-חפיפה שני.

3IV) a'=e ואז d'=a (כי אם d'=d, אז לפי (1,2) b'=b,
כלומר c=b ואז לפנינו מקרה V, שהוכח כסימטרי ל II), ולכן

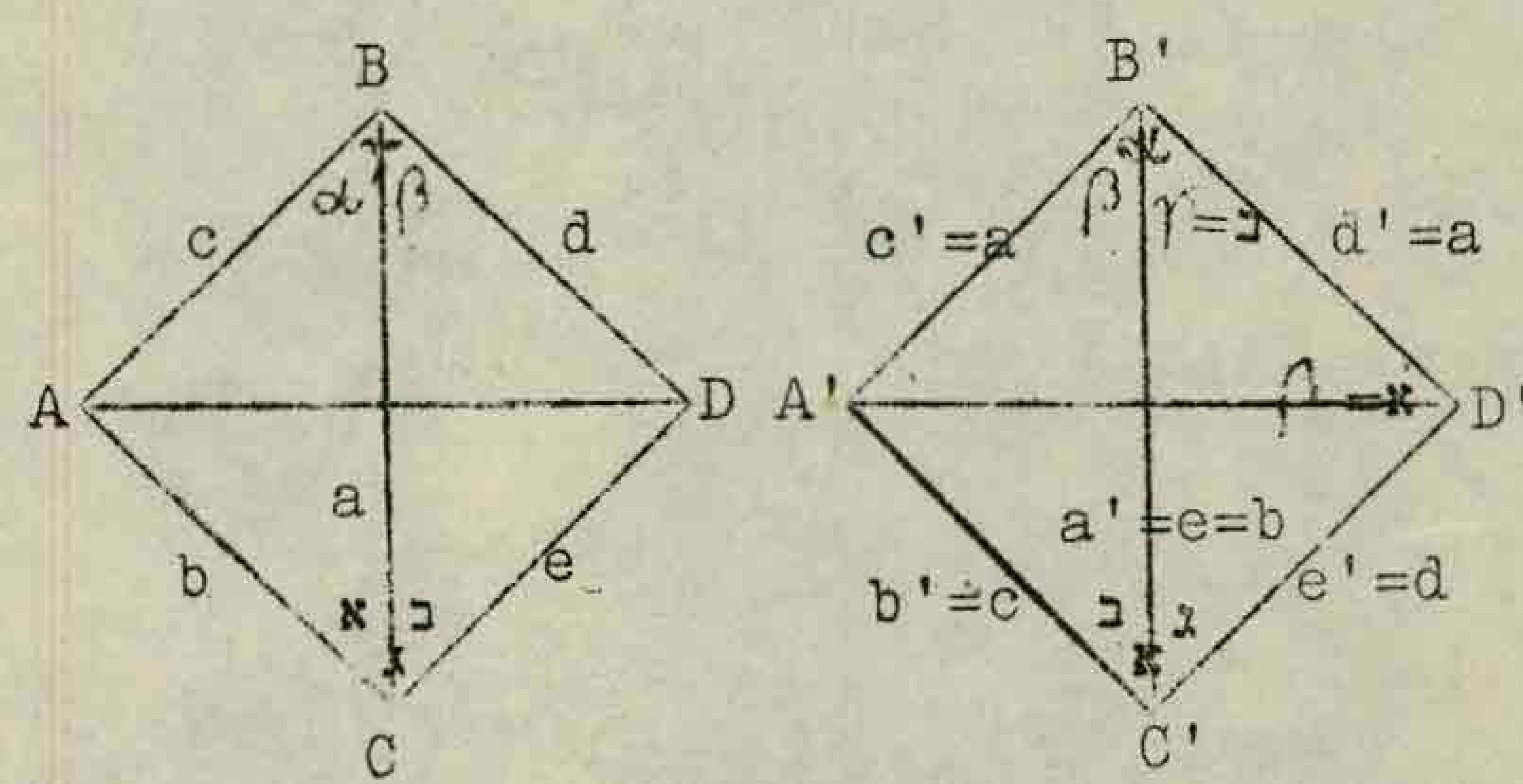
e'=d d'=a



א) א=γ, ב=α ואז מחפיפת A'B'C' ו B'C'D' יוצא b=c
וזה מקרה V.



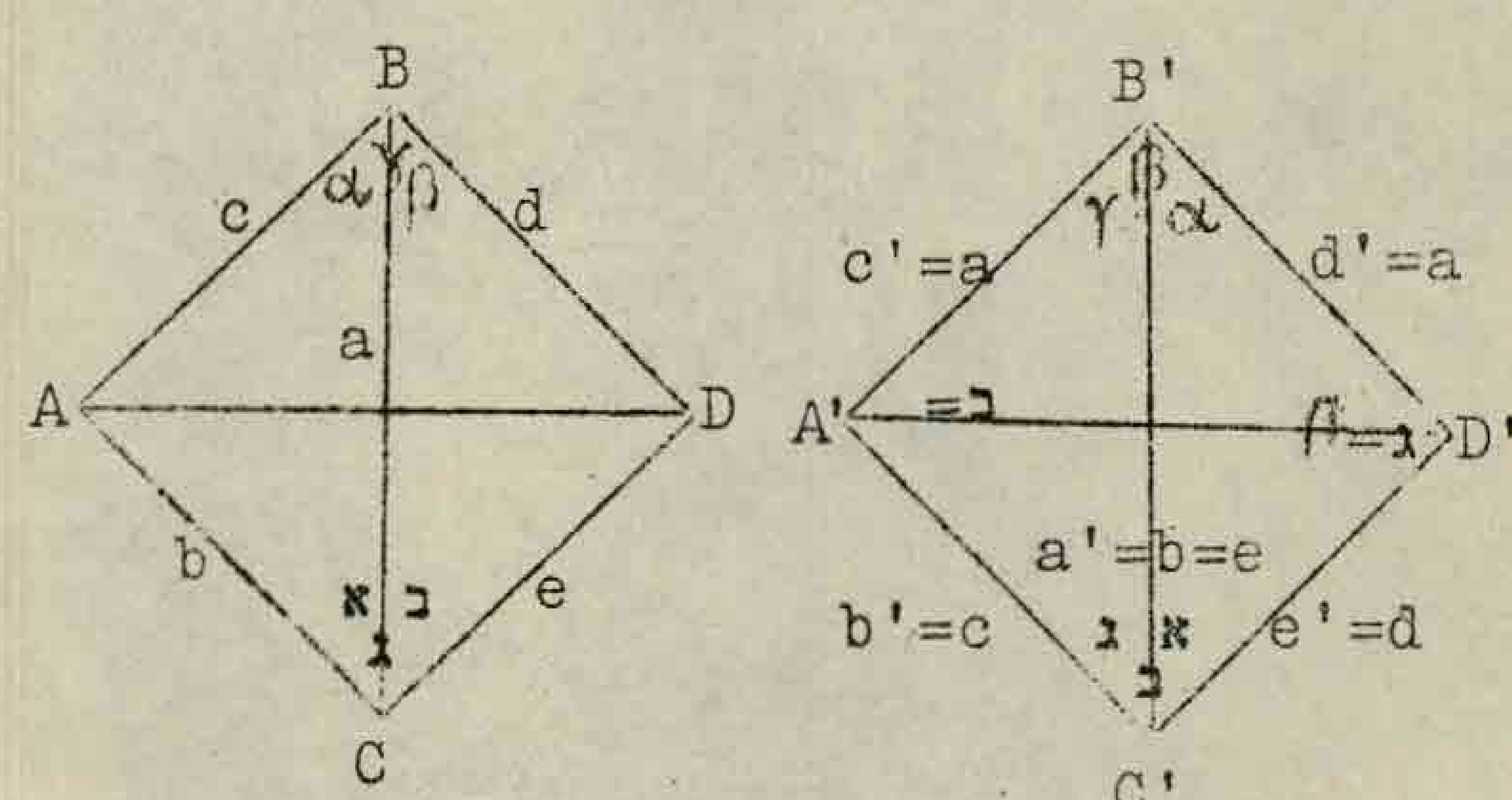
ב) א=β, ב=γ ואז: ג=$\angle$B'C'D'
(כי אם היא א יוצא a=b
וזה מקרה III ואם ל ב
יוצא a'=d והוא 2IV)
ולכן ב=$\angle$A'C'B' ומכאן ג=α
ולכן B פנה ≡ C פנה
והזויות המישוריות שלהן שורות
לפי הסדר ג,ב,א, α, γ, β
ולכן (ב,א) = (γ, β)
(קרי: הזוית דו-הפאית בין β
ו γ שוה לזוית דו-הפאית בין
ב ו א); מצד שני רואים במקרה
זה (ג,ב) = (γ, β) ולכן
ואז b = c וזהו מקרה V.



(ב,א) = (ג,ב) ומכאן ג = א או $\beta = \alpha$

ג) א=γ, ב=α ומכאן
ג=$\angle$A'C'B', $\angle$B'C'D'=א,
ג=β. ומכאן, בדרך
הקודמת C פנה = B פנה
לפי הסדר: ג,ב,א, - β, α, γ.
ולכן (ג,א) = (β, γ)
ולפי הציור: (ג,א) = (α,γ)
ומכאן: β = α ולכן a'=a
וזהו מקרה III.

בזה הוכח המשפט.



לוח מספרי פברנצ׳י

דב ירדן

מדגשים: ב"n", "U_n", "V_n" - מספרים הידועים כראשוניים; ב"n" השיך ל V_n - גם חזקות טבעיות של 2; ב"פרוק U_n, V_n" - מחלקים ראשוניים קדומים ומעריכים קדומים (המופיעים לראשונה). מדגשים ומסוגרים מחלקים קדומים עלומי-פרוק.

פרוק V_n	V_n	n	פרוק U_n	U_n	n
2	2	0		0	0
	1	1		1	1
3	3	2		1	2
2^2	4	3	2	2	3
7	7	4	3	3	4
11	11	5	5	5	5
2.3^2	18	6	2^3	8	6
29	29	7	13	13	7
47	47	8	3.7	21	8
$2^2.19$	76	9	2.17	34	9
3.41	123	10	5.11	55	10
199	199	11	89	89	11
2.7.23	322	12	$2^4.3^2$	144	12
521	521	13	233	233	13
3.281	843	14	13.29	377	14
$2^2.11.31$	1364	15	2.5.61	610	15
2207	2207	16	3.7.47	987	16
3571	3571	17	1597	1597	17
$2.3^3.107$	5778	18	$2^3.17.19$	2584	18
9349	9349	19	37.113	4181	19
7.2161	15127	20	3.5.11.41	6765	20
$2^2.29.211$	24476	21	2.13.421	10946	21
3.43.307	39603	22	89.199	17711	22
139.461	64079	23	28657	28657	23
2.47.1103	103682	24	$2^5.3^2.7.23$	46368	24
11.101.151	167761	25	$5^2.3001$	75025	25
3.90481	271443	26	233.521	121393	26
$2^2.19.5779$	439204	27	2.17.53.109	196418	27
$7^2.14503$	710647	28	3.13.29.281	317811	28
59.19489	1149851	29	514229	514229	29
$2.3^2.41.2521$	1860498	30	$2^3.5.11.31.61$	832040	30
3010349	3010349	31	557.2417	1346269	31
1087.4481	4870847	32	3.7.47.2207	2178309	32
$2^2.199.9901$	7881196	33	2.89.19801	3524578	33
3.67.63443	12752043	34	1597.3571	5702887	34
11.29.71.911	20633239	35	5.13.141961	9227465	35
2.7.23.103681	33385282	36	$2^4.3^3.17.19.107$	14930352	36
54018521	54018521	37	73.149.2221	24157817	37
3.29134601	87403803	38	37.113.9349	39088169	38
$2^2.79.521.859$	141422324	39	2.233.135721	63245986	39
47.1601.3041	228826127	40	3.5.7.11.41.2161	102334155	40
370248451	370248451	41	2789.59369	165580141	41
$2.3^2.83.281.1427$	599074578	42	$2^3.13.29.211.421$	267914296	42
6709.144481	969323029	43	433494437	433494437	43
$7^2.263.881.967$	1568397607	44	3.43.89.199.307	701408733	44
$2^2.11.19.31.181.541$	2537720636	45	2.5.17.61.109441	1134903170	45
3.4969.275449	4106118243	46	139.461.28657	1836311903	46
6643838879	6643838879	47	2971215073	2971215073	47
2.769.2207.3167	10749957122	48	$2^6.3^2.7.23.47.1103$	4807526976	48
29.599786069	17393796001	49	13.97.6168709	7778742049	49
3.41.401.570601	28143753123	50	$5^2.11.101.151.3001$	12586269025	50
$2^2.919.3469.3571$	45537549124	51	2.1597.6376021	20365011074	51
7.103.102193207	73681302247	52	3.233.521.90481	32951280099	52
119218851371	119218851371	53	953.55945741	53316291173	53
$2.3^4.107.11128427$	192900153618	54	$2^3.17.19.53.109.5779$	86267571272	54
$11^2.199.331.39161$	312119004989	55	5.89.661.474541	139583862445	55
$47^2.10745088481$	505019158607	56	$3.7^2.13.29.281.14503$	225851433717	56
$2^2.229.9343.95419$	817138163596	57	2.37.113.797.54833	365435296162	57
3.347.1270083883	1322157322203	58	59.19489.514229	591286729879	58
709.8969.336419	2139295485799	59	353.2710260697	956722026041	59
2.7.23.241.2161.20641	3461452808002	60	$2^4.3^2.5.11.31.41.61.2521$	1548008755920	60
	5600748293801	61		2504730781961	61
3^2.(3020733700601)	9062201101803	62	557.2417.3010349	4052739537881	62
$2^2.19.29.211.1009.31249$	14662949395604	63	2.13.17.421.35239681	6557470319842	63
127.(186812208641)	23725150497407	64	3.7.47.1087.2207.4481	10610209857723	64

n	U_n	פרוק U_n
65	17167680177565	$5.233.\underline{14736206161}$
66	27777890035288	$2^3.89.\underline{199}.\underline{9901}.19801$
$\underline{67}$	44945570212853	$\underline{269}.(\underline{167083904137})$
68	72723460248141	$3.\underline{67}.1597.3571.\underline{63443}$
69	117669030460994	$2.\underline{137}.\underline{829}.\underline{18077}.28657$
70	190392490709135	$5.11.13.29.\underline{71}.\underline{911}.141961$
$\underline{71}$	308061521170129	
72	498454011879264	$2^5.3^3.7.17.19.23.107.\underline{103681}$
$\underline{73}$	806515533049393	
74	1304969544928657	$73.149.2221.\underline{54018521}$
75	2111485077978050	$2.5^2.61.3001.\underline{230686501}$
76	3416454622906707	$3.37.113.9349.\underline{29134601}$
77	5527939700884757	$13.89.(\underline{4777821694801})$
78	8944394323791464	$2^3.\underline{79}.233.521.\underline{859}.135721$
$\underline{79}$	14472334024676221	$\underline{157}.(\underline{92180471494753})$
80	23416728348467685	$3.5.7.11.41.47.\underline{1601}.2161.\underline{3041}$
81	37889062373143906	$2.17.53.109.\underline{19441}.\underline{9922337}$
82	61305790721611591	$2789.59369.\underline{370248451}$
$\underline{83}$	99194853094755497	
84	160500643816367088	$2^4.3^2.13.29.\underline{83}.211.281.421.\underline{1427}$
85	259695496911122585	$5.1597.(\underline{32522917584361})$
86	420196140727489673	$\underline{6709}.\underline{144481}.433494437$
87	679891637638612258	$2.\underline{173}.\underline{514229}.\underline{3821263937}$
88	1100087778366101931	$3.7.43.89.199.\underline{263}.307.\underline{881}.\underline{967}$
$\underline{89}$	1779979416004714189	
90	2880067194370816120	$2^3.5.11.17.19.31.61.\underline{181}.\underline{541}.109441$
91	4660046610375530309	$13^2.233.(\underline{118344378961717})$
92	7540113804746346429	$3.139.461.\underline{4969}.28657.\underline{275449}$
93	12200160415121876738	$2.557.2417.(\underline{4531100550901})$
94	19740274219868223167	$2971215073.\underline{6643838879}$
95	31940434634990099905	$5.37.113.\underline{761}.(\underline{2007733164641})$
96	51680708854858323072	$2^7.3^2.7.23.47.\underline{769}.1103.2207.\underline{3167}$
$\underline{97}$	83621143489848422977	$\underline{193}.\underline{389}.(\underline{1113805073322701})$
98	135301852344706746049	$13.29.97.6168709.\underline{599786069}$
99	218922995834555169026	$2.17.89.\underline{197}.19801.\underline{18546805133}$
100	354224848179261915075	$3.5^2.11.41.101.151.\underline{401}.3001.\underline{570601}$
$\underline{101}$	573147844013817084101	
102	927372692193078999176	$2^3.\underline{919}.1597.\underline{3469}.3571.6376021$
$\underline{103}$	1500520536206896083277	
104	2427893228399975082453	$3.7.\underline{103}.233.521.90481.\underline{102193207}$
105	3928413764606871165730	$2.5.13.61.421.141961.\underline{8288823481}$
106	6356306993006846248183	$953.55945741.\underline{119218851371}$
$\underline{107}$	10284720757613717413913	
108	16641027750620563662096	$2^4.3^4.17.19.53.107.109.5779.\underline{11128427}$
$\underline{109}$	26925748508234281076009	
110	43566776258854844738105	$5.11^2.89.199.\underline{331}.661.\underline{39161}.474541$
111	70492524767089125814114	$2.73.149.2221.(\underline{1459000305513721})$
112	114059301025943970552219	$3.7^2.13.29.47.281.14503.\underline{10745088481}$
$\underline{113}$	184551825793033096366333	$\underline{677}.(\underline{272602401466814027129})$
114	298611126818977066918552	$2^3.37.113.\underline{229}.797.9349.54833.\underline{95419}$
115	483162952612010163284885	$28657.(\underline{16860207021391288805})$
116	781774079430987230203437	$3.59.\underline{347}.19489.514229.\underline{1270083883}$
117	1264937032042997393488322	$2.233.135721.(\underline{20000273725560977})$
118	2046711111473984623691759	$353.\underline{709}.8969.336419.2710260697$
119	3311648143516982017180081	$13.1597.(\underline{159512939815855788121})$
120	5358359254990966640871840	$2^5.3^2.5.7.11.23.31.41.61.\underline{241}.2161.2521.\underline{20641}$
121	8670007398507948658051921	$89.(\underline{97415813466381445596089})$
122	14028366653498915298923761	$(3504730781961).(\underline{5600748293801})$
123	22698374052006863956975682	$2.2789.59369.(\underline{68541957733949701})$
124	36726740705505779255899443	$3.557.2417.3010349.(\underline{3020733700601})$
125	59425114757512643212875125	$5^3.3001.(\underline{158414167964045700001})$
126	96151855463018422468774568	$2^2.13.17.19.29.211.421.\underline{1009}.\underline{31249}.35239681$
$\underline{127}$	155576970220531065681649693	
128	251728825683549488150424261	$3.7.47.\underline{127}.1087.2207.4481.(\underline{186812208641})$

n	V_n	פרוק V_n
65	38388099893011	11.131.521.2081.24571
66	62113250390418	2.3^2.43.307.26139601
67	100501350283429	
68	162614600673847	7_2(23230657239121)
69	263115950957276	2^2.139.461.691.1485571
70	425730551631123	3.41.281.12317523121
71	688846502588399	
72	1114577054219522	2.47.1103.10749957121
73	1803423556807921	
74	2918000611027443	3_2(972666780342481)
75	4721424167835364	2^2.11.31.101.151.12301.18451
76	7639424778862807	7.(1091346396980401)
77	12360848946698171	29.199.(2141890304461)
78	20000273725560978	2.3^2.90481.12280217041
79	32361122672259149	
80	52361396397820127	2207.(23725145626561)
81	84722519070079276	2^2.19.5779.(192900153619)
82	137083915467899403	3.163.(280335205455827)
83	221806434537978679	
84	358890350005878082	2.7^2.23.167.14503.65740583
85	580696784543856761	11.3571.(14783146675081)
86	939587134549734843	3_2(313195711516578281)
87	1520283919093591604	2^2.59.349.19489.947104099
88	2459871053643326447	47.(52337681992411201)
89	3980154972736918051	179_3(22235502640988369)
90	6440026026380244498	2.3^3.41.107.2521.10783342081
91	10420180999117162549	29.521.(689667151970161)
92	16860207025497407047	7_2(2408601003642486721)
93	27280388024614569596	2^2.3010349.(2265550275451)
94	44140595050111976643	3.563.(26134159295507387)
95	71420983074726546239	11.191.9349.(3636089893511)
96	115561578124838522882	2.1087.4481.(11862575248703)
97	186982561199565069121	
98	302544139324403592003	$3_2$281.(358889844987430121)
99	489526700523968661124	2^2.19.199.991.2179.9901.1513909
100	792070839848372253127	7.2161.(52361396162994001)
101	1281597540372340914251	809_2(1584174957196960339)
102	2073668380220713167378	2.3^2.67.409.63443.(66265118449)
103	3355265920593054081629	619.(5420461907258568791)
104	5428934300813767249007	43.(115509240442846111681)
105	8784200221406821330636	2^2.11.29.31.71.211.911.21211.767131
106	14213134522220588579643	3.(4737711507406862859881)
107	22997334743627409910279	
108	37210469265847998489922	2.7.23.103681.(1114577054219521)
109	60207804009475408400201	
110	97418273275323406890123	$3_2$41.43.307.(59996854928656801)
111	157626077284798815290324	2^2.54018521.(729500152756861)
112	255044350560122222180447	223.449.2207.(1154149773784223)
113	412670427844921037470771	
114	667714778405043259651218	2.3^2.227.4250681.(5608975608563)
115	1080385206249964297121989	11.139.461.1151.(1331664720764831)
116	1748099984655007556773207	7_2(249728569236429650967601)
117	2828485190904971853895196	2^2.19.521.67861.(1052645985555841)
118	4576585175559979410668403	3.(1525528391853326470222801)
119	7405070366464951264563599	29.239.3571.(299187497162794199)
120	11981655542024930675232002	2.47.1103.1601.3041.(33735900452321)
121	19386725908489881939795601	199.(97420733208491869044199)
122	31368381450514812615027603	3_2(10456127150171604205009201)
123	50755107359004694554823204	2^2.370248451.(34270978866974851)
124	82123488809519507169850807	7.743.(15789942089890310934407)
125	132878596168524201724674011	11.101.151.251.(3155660716639506001)
126	215002084978043708894524818	2.3^3.83.107.281.1427.(3354115420615683)
127	347880681146567910619198829	509.(683459098519779785106481)
128	562882766124611619513723647	

משואה דיופנטית מעריכית

דב ירדן ותאודור מוצקין

המשואה הדיופנטית המעריכית $x^y-y^x=a$ (x,y,a שלמים אי-שליליים; x,y נעלמים; a פרמטר; $0^0=1$) הופיעה בספרות, עד כמה שידוע לנו, רק במקרה הפרטי $a=0$. זולת הפתרון $(x,y)=(a+1,1)$, הממלא את משואתנו לכל a, קיימים כמובן אין-סוף a שיש למענם גם פתרונות אחרים. כאן נתן הערכות אחדות פרימיטיביות לגמרי ל x, y, x^y ו y^x, המאפשרות למצא את הפתרונות השונים מ $(a+1,1)$, אך לקבע את העדרם, במספר צעדים קטן מאד ביחס.

<u>משפט-עזר 1.</u>

$$2^y > 2y^2 \quad (y \geqslant 7)$$

<u>הוכחה.</u> אם $2y^2-2^y+1 \leqslant 0$, יהיה גם:

$$2(y+1)^2-2^{y+1}=2(y^2+2y+1-2^y) < 2(2y^2-2^y+1) \leqslant 0.$$

<u>משפט-עזר 2.</u>

$$3^y > 2y^3 \quad (y \geqslant 6)$$

<u>הוכחה.</u> אם $2y^3-3^y+1 \leqslant 0$, יהיה גם:

$$2(y+1)^3-3^{y+1}=2y^3+6y^2+6y+2-3^{y+1} < 2y^3+2y^3+2y^3+3-3.3^y=3(2y^3-3^y+1) \leqslant 0.$$

<u>משפט-עזר 3.</u>

$$4^y > 2y^4 \quad (y \geqslant 6)$$

<u>הוכחה.</u> אם $2y^4-4^y+1 \leqslant 0$, יהיה גם:

$$2(y+1)^4-4^{y+1} = 2y^4+8y^3+12y^2+8y+2-4^{y+1}$$
$$< 2y^4+2y^4+2y^4+2y^4+4-4.4^y = 4(2y^4-4^y+1) \leqslant 0.$$

ב $y \leqslant 7$ מתקבלים משפטי-העזר 2 ו3 מ1 גם ע"י העלאה בחזקת $3/2$ ו2 בהתאמה.

<u>משפט-עזר 4.</u>

$$\sqrt[x]{x} > x(x+1)/2 \quad \sqrt[x+1]{x+1} \quad (x \geqslant 5)$$

<u>הוכחה.</u> על-ידי העלאת שני האגפים לחזקת $x(x+1)$ נעבר לצורה האקויולנטית

$$x^{x+1} > 2(x+1)^x \quad (x \geqslant 5)$$

אי-שויון זה נכון ב $x=5$. די אפוא להוכיחו ב $x \geqslant 6$. ואמנם, הואיל ולפי ההנחה $x \geqslant 2$, יופיעו בפתוח של $(x+1)^x$ לפי בינום ניוטן לפחות 3 אברים, ונקבל:

$$(x+1)^x = x^x + x.x^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}x^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}x^{x-3} +\ldots+ x\ .\ x + 1$$
$$< x^x + x^x + \frac{1}{2}x^x + \frac{1}{4}x^x + \ldots + \frac{1}{2^{x-1}}x^x + \frac{1}{2^x}x^x$$
$$< 3x^x$$
$$2(x+1)^x < 6x^x \leqslant x^{x+1}$$

<u>משפט-עזר 5.</u>

$$x^y > y^x \quad (y>x;(x,y)\neq(0,y),(1,y),(2,3),(2,4))$$

<u>הוכחה.</u> המשפט נכון ב $(x,y)=(2,5),(2,6)$ ולפי משפט-עזר 1 במקרים האחרים שבהם $x=2$. די אפוא להוכיחו ב $x \geqslant 3$. ממשפט-עזר 4, בתשומת-לב לכך כי $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}$, נקבל:

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[7]{7} \ \ldots$$

מכאן

$$\sqrt[x]{x} > \sqrt[y]{y} \quad (y > x \geqslant 3)$$

על-ידי העלאת שני האגפים לחזקת xy נקבל את הטענה.

משפט-עזר 6.

$$x^y > 2y^x \qquad (y > x \geq 5)$$

הוכחה. לפי משפטי-עזר 4 ו 5 יהיה:

$$\sqrt[x]{x} > \sqrt[x(x+1)]{2\sqrt[x+1]{x+1}} > \sqrt[x(x+1)]{2\sqrt[x+2]{x+2}} > \dots > \sqrt[x(x+1)]{2\sqrt[y]{y}} \geq \sqrt[xy]{2\sqrt[y]{y}}$$

על-ידי העלאת קצות השרשרת לחזקת xy נקבל את הטענה.

משפט-עזר 7.

$$2 \leq x < y, \quad y^x < a, \quad x^y < 2a, \quad (x+1)^x\ a, \quad y < 1 + \log_2 a,$$

פרט למקרים הבאים:

a	a	0	0	0	1	1	7	17	28	118	399
x	a+1	x	2	4	x	3	2	3	2	3	4
y	1	x	4	2	0	2	5	4	6	5	5

הוכחה. במקרה $x < y$ יוצא ממשפט-עזר 5 (אם נחליף בו את תפקידי האותיות x ו y) כי $x^y - y^x = a < 0$, מה שיוצא מגדר דיוננו. כן מובילים ל $a < 0$ המקרים $(x,y)=(0,y),(1,y),(2,3)$, באשר $x < y$. במקרים אחרים שבהם $2 \leq x < y$ יוצאים אי-השויונות השני והשלישי ממשפטי-עזר 1,2,3,6, אם נחסר בהם משני האגפים y^x או $a+y^x$ בהתאמה, ואי-השויונות הרביעי והחמשי יוצאים מן השני והשלישי, אם נשים בהם $x+1$ במקום y או 2 במקום x בהתאמה.

משפט 1. הפתרונות היחידים למשואה $x^y - y^x = a$ ב (x,y) שלמים אי-שליליים שונים מ $(a+1,1)$, באשר

a =	0	1	7	17	28	118	399
הם (x,y)=	(x,x),(2,4),(4,2)	(x,0),(3,2)	(2,5)	(3,4)	(2,6)	(3,5)	(4,5)

הוכחה. לפי משפט עזר 7 יהיה, זולת הפתרונות הנ"ל, בהתאמה:

$x \leq$	2	2	3	3
$y \leq$	4	4	6	8

נסוי קל מראה (עין בלוח) שאין מוצאים כאן פתרונות חדשים.

משפט 2. בשביל כל

$$a \neq 0, 1, 7, 17, 28, 118, 399$$

קים, זולת $(x,y)=(a+1,1)$,

$$2 \leq x < y, \quad (x+1)^x < a, \quad 2^y < 2a, \quad y^x < a, \quad x^y < 2a.$$

הוכחה. משפט-עזר 7 ומשפט 1.

לוח ערכי $x^y - y^x = a$

y \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	-1	-1	0	1	0	-7	-28	-79	-192
3	-1	-2	-1	0	-17	-118	-513	-1844	-6049
4	-1	-3	0	17	0	-399	-2800	-13983	-61440
5	-1	-4	7	118	399	0	-7849	-61318	-357857
6	-1	-5	28	513	2800	7849	0	-162287	-1417472
7	-1	-6	79	1844	13983	61318	162287	0	-3667649
8	-1	-7	192	6049	61440	357857	1417472	3667649	0

40 a הקטנים ביותר

-1	79	513	3952	16188	61440	255583	1038576
0	118	924	6049	18954	65280	261820	1048176
7	192	1844	7849	32543	130783	357857	1417472
17	399	1927	8023	58049	162287	523927	1592126
28	431	2800	13983	61318	175816	529713	1894076

האם $1^{20}+\dots+5^{20}$ ראשוני?

תאודור מוצקין

שאלה זו היא מקרה אחד של השאלה: האם $S=1^n+\dots+(x-1)^n=S_n(x)$ ראשוני?[1] נניח $0<n$ ו$2<x$. אז $S\geq S_1(x)>x$.[2] - יהי p ראשוני. ידוע ש$p|S_n(p)$,[3] אם $p-1\nmid n$.[4] לכן[5] גם A) אצל $p|x-1$ וB) אצל $p|x$ יהיה $p|S_n(x)$, אם $p-1\nmid n$. אצל S ראשוני יהיה איפוא $p-1|n$ ולכן $2|n$,[6] ו$S\geq S_2(x)>2x-1$.[7] לפי $2x-1$ יהיה $a^n\equiv(2x-1-a)^n$ ומכאן $2S\equiv S_n(2x-1)$. לכן[8] גם C) אצל $p|2x-1$ יהיה $p|S$, אם $p-1\nmid n$. - אם $p-1|n$, יהיה לפי p כל מחובר $a^n\equiv1$, זולת אצל $p|a$.[9] לכן D) אז $p|S$, אם $x\equiv1+k(p+1)$ לפי p^2, כאשר $k=0,1,\dots,p-1$.[10] E) אצל $p^2|x-1,x,2x-1$ שום n אינו בא בחשבון.[11] - אצל $x=3$ כידוע ראשוני S, אם $n=1,2,4,8,16$ ואצל $n<1024$ רק אז.[12] אולי בכלל אין עוד S ראשוני.[13] הראשון בספק הוא $S_{20}(6)=96\,470\,431\,101\,379$, הנזכר בכותרת, כי לפי הטבלה צריך אצל $x<37$ להיות $n\geq40$,[13] ואצל $p=x-1,x,2x-1$ ו$x\geq38$ יהיה[15] $n\geq x-2\geq36$, ואם $x-1,x,2x-1$ מתפרקים, יהיו[16] לn לפחות 6 מחלקים מהצורה $p-1$, מה שקים בראשונה אצל $n=36$.

x	n	
3[2,7,12]	4	C
6	20	AC
7	–	5^2C
11	60	ABC
15	–	13^2AB
22	210	BC
26	–	5^2B
30	812	AC
31	60	C
34	2640	ABC
35	528	ABC

1 הS מסתדרים בטבלה המתחילה

n\x	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4
1	0	1	3	6	10
2	0	1	5	14	30
3	0	1	9	36	100
4	0	1	17	98	354

2 זולת $n=1,x=S=3$.

3 | קרא "מחלק של", $\nmid$ קרא "איננו מחלק של"; $a\equiv b$ (לפי c) קרא "a חופף b" (כלומר $c|a-b$), $\not\equiv$ קרא "איננו חופף"; $a,b|$ קרא "מחלק" של a או b; ודומה אצל $a,b=$ ו $\equiv a,b$.

4 לפי פרמה $1,2,\dots,p-1$ הם שרשי $y^{p-1}-1\equiv0$. לפי ניוטן $S_1+a_1\equiv0, S_2+a_1S_1+a_2\equiv0,\dots$, ואצלנו $a_1,a_2,\dots,a_{p-2}\equiv0$ ולכן גם $S_1,S_2,\dots S_{p-2}\equiv0$. לפי פרמה $S_{n+p-1}\equiv S_n$. - בהוכחה אחרת מסתמכים על קיום "שרש קדום" z, שאצלו $z^m\equiv1$ רק אם $p-1|m$. אז $S_n\equiv z^n+z^{2n}+\dots$ חופף לכפולה של סכום r שרשי $n^r-1\equiv0$ עם $r\neq1$, כלומר ל0.

5 ובגלל $(a+p)^n\equiv a^n$ לפי p.

6 כי x או $x-1$ מתחלקים ב p אי-זוגי. - הוכחה אחרת: אם $2\nmid x$ ו$2\nmid n$, יהיה $a^n\equiv-(x-a)^n$ לפי x ולכן $x|S_n(x),S_n(x+1)$.

7 זולת $n=2,x=3,S=5$.

8 ולפי B. אצל C מניחים $2|n$.

9 לפי פרמה (ר' 4).

10 להוכחת D ספור את המחוברים $a^n\equiv1$.

11 לפי A,B,C וD. בפרט $2|S$ אצל $4\nmid x-1,x$.

12 המספרים S אצל $x=3$ הם "מספרי פרמה".

13 זולת המקרים הנזכרים.

14 פה רשומים הנמוקים המספיקים או לקביעת המחלק של n או (בהזכרת מקרה של D) לקביעת אי-האפשרות. על ה x החסרים חל E.

15 לפי A,B,C.

16 לפי A,B,C ו E.