רבעון למתמטיקה

ללמוד ולמחקר

בעריכת דב ירדן.

כרך 1

ירושלים, טבת תש״ז, דצמבר 1946

חוברת 3

תכן

עמוד

כתבת המערכת: דב ירדן, מלאכי 20, ירושלים

המחיר 200 מיל

על שמושים אחדים של טריגונומטריה כדורית בפתרון בעיות גאומטריות

חיים חנני

§1. משולשים כדוריים בעלי שטח π.

משפט 1. יהי נתון משולש כדורי $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ על פני כדור היחידה. אם נסמן את קוסינוס הצלע המונחת מול α_i ב a_i, $(i=1,2,3)$ ואת שטח המשולש ב S, יהיה

$$\cos S = \frac{(1+a_1+a_2+a_3)^2}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} - 1.$$

הוכחה. נסמן את זויות המשולש ב α_i. הלאה נסמן $\cos\alpha_i=A_i$, $\sin\alpha_i=\bar{A}_i$, $\sqrt{1-a_i^2}=\bar{a}_i$, $(i=1,2,3)$.

להבא נשתמש בנוסחאות הבאות של הטריגונומטריה הכדורית

$$S=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi \quad , \tag{1}$$

$$A_i=(a_i-a_ja_k)/\bar{a}_j\bar{a}_k \quad , \quad (i=1,2,3). \tag{2}$$

כמו כן נשתמש בסימון מקוצר כדלקמן

$$b_i=a_i-a_ja_k \,, \quad (i=1,2,3); \quad f=1-a_1^2-a_2^2-a_3^2+2a_1a_2a_3 . \tag{3}$$

מ (1) אנו מקבלים

$$\cos S = -\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3-A_1A_2A_3$$

על ידי הצגת נוסחות (2) וקצורים (3) יתקבל מזה

$$\cos S = [f(b_1+b_2+b_3)-b_1b_2b_3]/(\bar{a}_1)^2(\bar{a}_2)^2(\bar{a}_3)^2$$

בהציגנו את הערכים (3) נקבל על ידי סדור מתאים של הנוסחה

$$\cos S=[(1+a_1+a_2+a_3)^2(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)-(1-a_1^2)(1-a_2^2)(1-a_3^2)]/(1-a_1^2)(1-a_2^2)(1-a_3^2)$$

נוכל לצמצם ב $(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)$ השונה מאפס ונקבל

$$\cos S = \frac{(1+a_1+a_2+a_3)^2}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} - 1 .$$

הגדרה. ננהג לאמר, שמשולש כדורי הוא אמתי, אם כל צלעותיו הן קטנות מ π וזויותיו אינן עולות על π. קל לראות ששטחו של משולש כדורי אמתי איננו עולה על מחצית פני הכדור (2π). להבא נדון אך ורק במשולשים כדוריים אמתיים.

משפט 2. בכדי ששטחו של משולש כדורי יהיה שוה לרבע פני הכדור (ז.א. $S=\pi$), נחוץ ומספיק ש $a_1+a_2+a_3=-1$.

הוכחה. המשפט הזה הנו מסקנה ישרה ממשפט 1.

משפט 3. א) אם $a_1+a_2+a_3>-1$, אז $S<\pi$,
ב) ואם $a_1+a_2+a_3<-1$, אז $S>\pi$.

הוכחה. א) נסמן ב $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3$ משולש כדורי (משתנה), שקוסינוסי צלעותיו הם $\bar{a}_i(\kappa)=\kappa a_i$, $(i=1,2,3\ ;\ 0\leq\kappa\leq1)$. את שטחו של המשולש הזה נסמן ב $\bar{S}(\kappa)$.

ממשפט 1 קל לראות ש $\bar{S}(\kappa)$ היא פונקציה רציפה של κ. מלבד זה היות ו

$$\sum_{i=1}^{3}\bar{a}_i(\kappa) = \kappa\sum_{i=1}^{3}a_i > -1 \,, \qquad (0\leq\kappa\leq1),$$

יהיה (לפי משפט 2) $\bar{S}(\kappa)\neq\pi$, $(0\leq\kappa\leq1)$. אבל $\bar{a}_i(0)=0$, $(i=1,2,3)$ ולכן

לפי משפט 1 יהיה $\bar{S}(0)=\frac{\pi}{2}$. וברור הוא, שפונקציה $\bar{S}(K)$ הרציפה בתחום $0\leq K\leq 1$ והמקבלת בתחום זה את הערך $\frac{\pi}{2}$ הקטן מ π, אבל אינה מקבלת את הערך π עצמו, תשאר בכל התחום קטנה מ π, ובכן $\bar{S}(K)<\pi$, $(0\leq K\leq 1)$, ובמיוחד $S=\bar{S}(1)<\pi$.

ב) נסמן ב $\bar{\bar{\alpha}}_1\bar{\bar{\alpha}}_2\bar{\bar{\alpha}}_3$ משולש כדורי (משתנה), שקוסינוסי צלעותיו הם $\bar{\bar{a}}_i(K)=Ka_i-\frac{1}{2}(1-K)$, $(i=1,2,3\ ;0\leq K\leq 1)$ את שטחו של המשולש הזה נסמן ב $\bar{\bar{S}}(K)$.

גם כאן $\bar{\bar{S}}(K)$ היא פונקציה רציפה של K ובגלל

$$\sum_{i=1}^{3}\bar{\bar{a}}_i(K)=K\sum_{i=1}^{3}a_i-1\tfrac{1}{2}(1-K)<\frac{K}{2}-1\tfrac{1}{2}\leq -1 \qquad (0\leq K\leq 1)$$

יהיה לפי משפט 2 $\bar{\bar{S}}(K)\neq\pi$, $(0\leq K\leq 1)$. אבל $\bar{\bar{a}}_i(0)=-\frac{1}{2}$, $(i=1,2,3)$ ולכן לפי משפט 1 יהיה $\bar{\bar{S}}(0)=2\pi>\pi$. בגלל $\bar{\bar{S}}(K)\neq\pi$ ורציפות הפונקציה $\bar{\bar{S}}(K)$ נקבל אפוא $S=\bar{\bar{S}}(1)>\pi$.

קל לראות שהתנאים של המשפט הזה הם גם הכרחיים.

משפט 4. תהיינה α_1, α_2, α_3, α_4 4 נקודות כאלו על פני כדור היחידה, ששטחו של כל אחד מארבעת המשולשים הכדוריים $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$, $(i,j,k=1,2,3,4)$ יהיה שוה ל π (רבע פני הכדור). אז תהיה הצלע $\alpha_i\alpha_j$ שוה לצלע $\alpha_k\alpha_l$, $(i,j,k,l=1,2,3,4)$, וכל ארבעת המשולשים $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$ יהיו חופפים זה את זה.

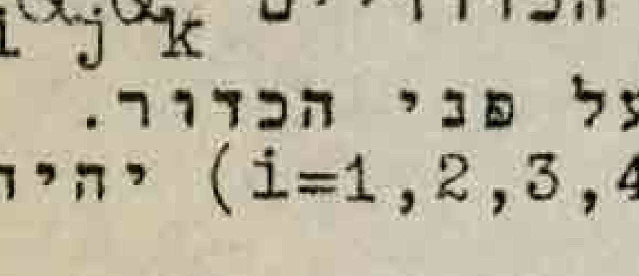
הוכחה. נסמן ב a_{ij} את קוסינוס הצלע $\alpha_i\alpha_j$. לפי משפט 2 יהיה:

$a_{12}+a_{24}+a_{14}=-1$, $a_{24}+a_{34}+a_{23}=-1$, $-a_{12}-a_{23}-a_{13}=1$, $-a_{14}-a_{34}-a_{13}=1$.

על ידי חבור המשואות האלו נקבל $2a_{24}-2a_{13}=0$, או $a_{13}=a_{24}$. באופן דומה נקבל $a_{12}=a_{34}$ ו $a_{14}=a_{23}$. והיות והמדובר כאן הוא במשולשים כדוריים אמתיים בלבד, תהיינה גם הצלעות המתאימות שוות זו לזו. ובכן כל ארבעת המשולשים יהיו שוים בצלעותיהם ועל כן חופפים.

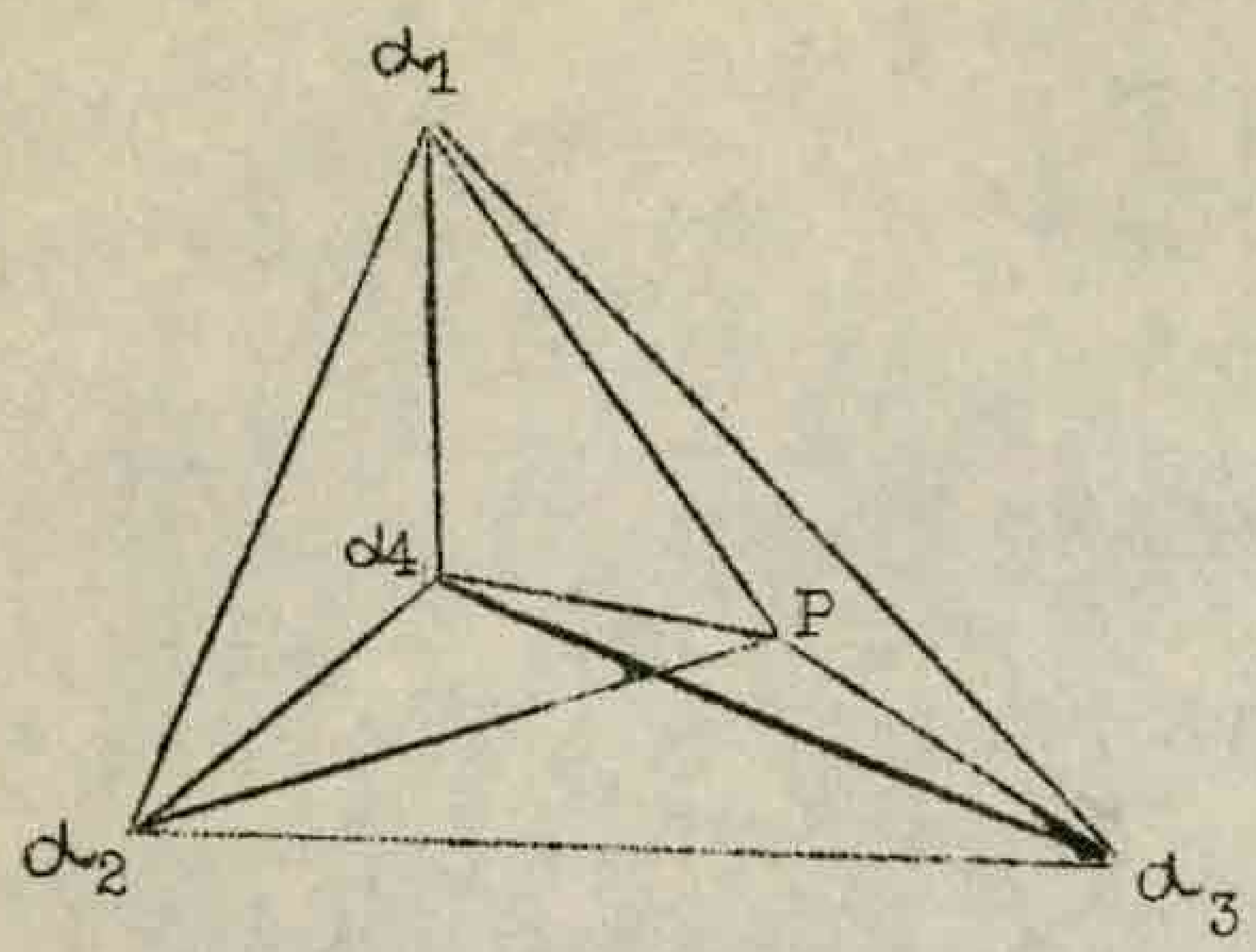
משפט 5. תהיינה α_1, α_2, α_3, α_4 4 נקודות כאלו שונות זו מזו על פני כדור היחידה, ששטחו של כל אחד מארבעת המשולשים הכדוריים $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$ $(i,j,k=1,2,3,4)$ יהיה שוה ל π. ותהיה P נקודה כלשהי על פני הכדור. אז הסכום T של קוסינוסי הקשתות המחברות את P עם α_i, $(i=1,2,3,4)$ יהיה שוה לאפס.

הוכחה. היות והמדובר כאן הוא במשולשים כדוריים אמתיים, אפשר להוכיח, שארבעת המשולשים $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$ $(i,j,k=1,2,3,4)$ מכסים את פני כל הכדור. כי נניח, שאין הדבר כך, אז הקשתות $\alpha_1\alpha_3$ ו $\alpha_2\alpha_4$ (ראה בציור) נחתכות. והיות ובכל אחד מהמשולשים הכדוריים $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ סכום הזויות שוה ל 2π, יהיה סכום זויות המרובע $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ שוה ל 4π. ומכאן בגלל חפיפת ארבעת המשולשים $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$, $(i,j,k=1,2,3,4)$ (ראה משפט 4), כל אחת מזויות המרובע הזה תהיה שוה ל π. נסתכל באחד המשולשים $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$. היות ושטחו (השוה ל π) שונה מ 0 ומ 2π, ואחת מזויותיו שוה ל π, תהיה גם צלעו, המונחת מול הזוית הזאת שוה ל π, והמשולש האמור לא יהיה אמתי לפי הגדרתנו.



היות אם כן והמשולשים $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$ $(i,j,k=1,2,3,4)$ מכסים את פני כל הכדור, תמצא הנקודה P באחד מהמשולשים האלה, נגיד במשולש $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$ (בפנים, או על היקפו).

הודות למשפט 4 נוכל לכתוב:



$\cos(\alpha_1\alpha_4) = \cos(\alpha_2\alpha_3) = a_1$,
$\cos(\alpha_2\alpha_4) = \cos(\alpha_1\alpha_3) = a_2$,
$\cos(\alpha_3\alpha_4) = \cos(\alpha_1\alpha_2) = a_3$;
$\cos(\alpha_1\alpha_3\alpha_4) = \cos(\alpha_2\alpha_4\alpha_3) = A_1$.

מלבד זה נסמן:

$\sqrt{1-a_i^2}=\bar{a}_i$, $(i=1,2,3)$; $\sqrt{1-A_1^2}=\bar{A}_1$;

$\cos(P\alpha_3\alpha_4)=B_1$, $\cos(P\alpha_4\alpha_3)=B_2$;

$\sqrt{1-B_i^2}=\bar{B}_i$, $(i=1,2)$;

$\cos(P\alpha_i)=p_i$, $\sin(P\alpha_i)=\bar{p}_i$, $(i=1,2,3,4)$.

נסתכל במשולש הכדורי $P\alpha_1\alpha_3$. נוסחת הקוסינוסים קובעת:

$$p_1=a_2p_3+\bar{a}_2\bar{p}_3\cos(P\alpha_3\alpha_1).$$

באופן דומה נקבל מהמשולש $P\alpha_2\alpha_4$: $p_2=a_2p_4+\bar{a}_2\bar{p}_4\cos(P\alpha_4\alpha_2)$.

אבל $\cos(P\alpha_3\alpha_1)=A_1B_1+\bar{A}_1\bar{B}_1$, ו $\cos(P\alpha_4\alpha_2)=A_1B_2-\bar{A}_1\bar{B}_2$, ובכן

$$p_1=a_2p_3+(A_1B_1+\bar{A}_1\bar{B}_1)\bar{a}_2\bar{p}_3, \quad p_2=a_2p_4+(A_1B_2-\bar{A}_1\bar{B}_2)\bar{a}_2\bar{p}_4. \qquad (1)$$

מלבד זה נקבל מהמשולש $P\alpha_3\alpha_4$:

$$B_1=(p_4-a_3p_3)/\bar{a}_3\bar{p}_3, \quad B_2=(p_3-a_3p_4)/\bar{a}_3\bar{p}_4; \qquad (2)$$

ומהמשולש $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$:

$$A_1=(a_1-a_2a_3)/\bar{a}_2\bar{a}_3. \qquad (3)$$

מהמשולש $P\alpha_3\alpha_4$ נקבל לפי משפט הסינוסים

$$\bar{p}_3\bar{B}_1=\bar{p}_4\bar{B}_2. \qquad (4)$$

נוסף על זה ידוע לנו לפי משפט 2 ש

$$a_1=-1-a_2-a_3. \qquad (5)$$

לפי הגדרת T יהיה $T=p_1+p_2+p_3+p_4$, ולפי (1)

$$T=(1+a_2)(p_3+p_4)+A_1\bar{a}_2(B_1\bar{p}_3+B_2\bar{p}_4)+\bar{A}_1\bar{a}_2(\bar{B}_1\bar{p}_3-\bar{B}_2\bar{p}_4).$$

בגלל (3) ו (4)

$$T=(1+a_2)(p_3+p_4)+\frac{1}{\bar{a}_3}(a_1-a_2a_3)(B_1\bar{p}_3+B_2\bar{p}_4).$$

על ידי הצגת הערכים (2) ו (5), נקבל

$$T=(1+a_2)\left[p_3+p_4-\frac{1}{\bar{a}_3^2}(1+a_3)(p_4-a_3p_3+p_3-a_3p_4)\right]=(1+a_2)(p_3+p_4-p_3-p_4)=0$$

<u>הערה.</u> למשולש כדורי בעל שטח π יש עוד תכונות מעניינות אחרות, כגון:

א) סכום הרבועים של קוסינוסי המדיאנות שלו שוה ל 1.

ב) אמצעי צלעותיו יוצרים משולש שוה-צלעות, שכל אחת מצלעותיו שוה ל $\frac{\pi}{2}$.

§2. משפטים אחדים על ארבעון.

<u>הגדרה.</u> נבהג לאמר שאנו רואים מנקודה O את המשולש ABC בזוית מרחבית S, אם תכולת הפנה שקדקדה ב O ומקצועותיה הן OA, OB ו OC שוה ל S.

<u>משפט 6 *)</u>. סכום המרחקים מנקודה M – שממנה רואים כל אחת מארבע פאות הארבעון $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ בזוית מרחבית π – לארבעת קדקדי הארבעון הוא מינימלי.

---

*) ראה בעיה מס׳ 7 שהוצגה על ידי מר דב ירדן ברבעון למתמטיקה, כרך 1, עמוד 20. ההערה מס׳ 8 של ד״ר תאודור מוצקין ושל המחבר.

הוכחה. נקבע נקודה $Q=M$ כלשהי ונעביר כדור-יחידה שמרכזו ב M. נסמן ב α_i $(i=1,2,3,4)$, ו P בהתאמה, את עקבות הקרנים $M\beta_i$, $(i=1,2,3,4)$ ו MQ על פני הכדור הזה.

נסמן: $\cos(PM\alpha_i)=p_i$, $\sin(PM\alpha_i)=\bar{p}_i$, $(i=1,2,3,4)$.
הלאה נסמן את אורך הקטעים $\overline{MQ}=x$; $\overline{M\beta_i}=s_i$, $\overline{Q\beta_i}=t_i$, $(i=1,2,3,4)$.
סכום הקטעים המחברים את Q עם הנקודות β_i, $(i=1,2,3,4)$ יהיה

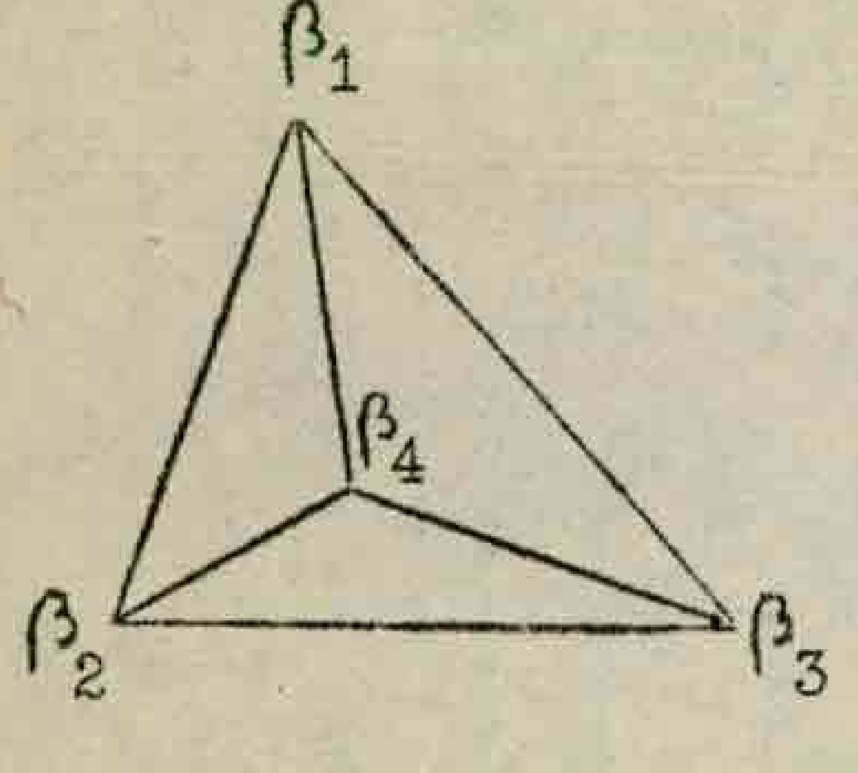
$$f(x)\equiv\sum_{i=1}^{4} t_i = \sum_{i=1}^{4}\sqrt{s_i^2+x^2-2s_i x p_i}.$$

על ידי גזירה לפי x נקבל:

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{4}(x-s_ip_i)/\sqrt{s_i^2+x^2-2s_ixp_i},\quad f''(x)=\sum_{i=1}^{4}s_i^2\bar{p}_i^2/\left(\sqrt{s_i^2+x^2-2s_ixp_i}\right)^3.$$

והיות ולפי משפט 5: $\sum_{i=1}^{4}p_i=0$, יהיה $f'(0)=0$.

אבל $f''(x)>0$ בשביל כל ערכי x ומזה נובע, כי $x=0$ הנו השורש היחידי של המשואה $f'(x)=0$, וכי הפונקציה $f(x)$ מקבלת בשביל $x=0$ (ז.א. כשהנקודה Q מתלכדת עם M) את המינימום (היחידי) שלה.



משפט 7 *). יהי נתון ארבעון $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$. אם נסמן את קוסינוס הזוית דו-הפאית, שמקצועה הוא הצלע $\beta_i\beta_j$ ב A_{ij}, $(i,j=1,2,3,4)$, ואת סינוסה ב $\bar{A}_{ij}$, יתקבל הקשר הבא:

$$\Big(\sum_{3}A_{ij}A_{k\ell}\Big)^2+\sum_{6}A_{ij}^2\bar{A}_{k\ell}^2+2\sum_{4}A_{ij}A_{ik}A_{i\ell}-1=0.$$

הוכחה. נסמן את קוסינוס הזוית השטוחה $(\beta_j\beta_i\beta_k)$ ב a_{jik}, $(i,j,k=1,2,3,4)$ ואת סינוסה ב $\bar{a}_{jik}$. נעביר כדור-יחידה, שמרכזו נמצא בנקודה β_1. מנוסחת הקוסינוסים בשביל משולשים כדוריים נקבל:

$$(1)\begin{cases} a_{312}=(A_{14}+A_{12}A_{13})/\bar{A}_{12}\bar{A}_{13} \\ \text{באותו אופן אם נעביר כדורי-יחידה, שמרכזיהם נמצאים בהתאמה ב } \beta_2 \text{ ו } \beta_3\text{, נקבל} \\ a_{231}=(A_{34}+A_{31}A_{32})/\bar{A}_{31}\bar{A}_{32},\quad a_{123}=(A_{24}+A_{21}A_{23})/\bar{A}_{21}\bar{A}_{23}. \end{cases}$$

להבא נשתמש בסימון מקוצר כדלקמן:

$$(2)\begin{cases} B_i=A_{i4}+A_{ij}A_{ik},\quad D_i=1-A_{jk}^2(=\bar{A}_{jk}^2), \\ F_i=1-A_{ij}^2-A_{ik}^2-A_{i4}^2-2A_{ij}A_{ik}A_{i4};\ (i,j,k=1,2,3), \\ B=B_1B_2B_3,\quad D=D_1D_2D_3,\quad F=F_1F_2F_3. \end{cases}$$

נסתכל במשולש $\beta_1\beta_2\beta_3$. סכום זויותיו שוה ל π ובכן $\cos[\angle(\beta_1\beta_2\beta_3)+\angle(\beta_2\beta_3\beta_1)+\angle(\beta_3\beta_1\beta_2)]=-1$, ומכאן

$$a_{123}a_{231}a_{312}-a_{123}\bar{a}_{231}\bar{a}_{312}-\bar{a}_{123}a_{231}\bar{a}_{312}-\bar{a}_{123}\bar{a}_{231}a_{312}=-1$$

על ידי הצגת נוסחות (1) ושמוש בקצורים (2) יוצא מזה

$$B-B_2\sqrt{F_1F_3}-B_3\sqrt{F_1F_2}-B_1\sqrt{F_2F_3}=-D.$$

מכאן על ידי סדור מתאים של המשואה והעלאתה פעמים ברבוע, נקבל:

---

*) ראה בעיה מס' 6, שהוצגה על ידי ד"ר תאודור מוצקין, ברבעון למתמטיקה, כרך 1, עמוד 20.

$$B^4+D^4+6B^2D^2-8B^2F+4B^3D+4BD^3-8BDF+\sum_3 B_i^4F_j^2F_k^2-(2B^2+2D^2+4BD)\sum_3 B_i^2F_jF_k+$$

$$-2F\sum_3 B_i^2B_j^2F_k = 0$$

קל לראות מ (2), ש $F_i=D_jD_k-B_i^2$,(i=1,2,3). נציג את הערכים האלה במשואה שלנו:

$$D^4+4B^2D^2-4BD^3+4BD^2\sum_3 B_i^2D_i+D^2\sum_3 B_i^4D_i^2-2D^3\sum_3 B_i^2D_i+2D^2\sum_3 B_i^2B_jD_iD_j=0.$$

בשביל $D=0$ מתמלא המשפט שלנו באופן טריביאלי. נוכל אפוא להניח, כי $D\neq 0$ ולצמצם את המשואה ב D^2. על ידי הוצאת שורש נקבל אז:

$$2B-D+\sum_3 B_i^2D_i=0 ,$$

ועל ידי הצגת הערכים (2) נקבל:

$$\sum_6 A_{ij}^2+2\sum_4 A_{ij}A_{ik}A_{i\ell}-\sum_3 A_{ij}^2A_{k\ell}^2+2\sum_3 A_{ik}A_{i\ell}A_{jk}A_{j\ell}-1 = 0$$

או

$$\Big(\sum_3 A_{ij}A_{k\ell}\Big)^2+\sum_6 A_{ij}^2\bar{A}_{k\ell}^2+2\sum_4 A_{ij}A_{ik}A_{i\ell}-1 = 0$$

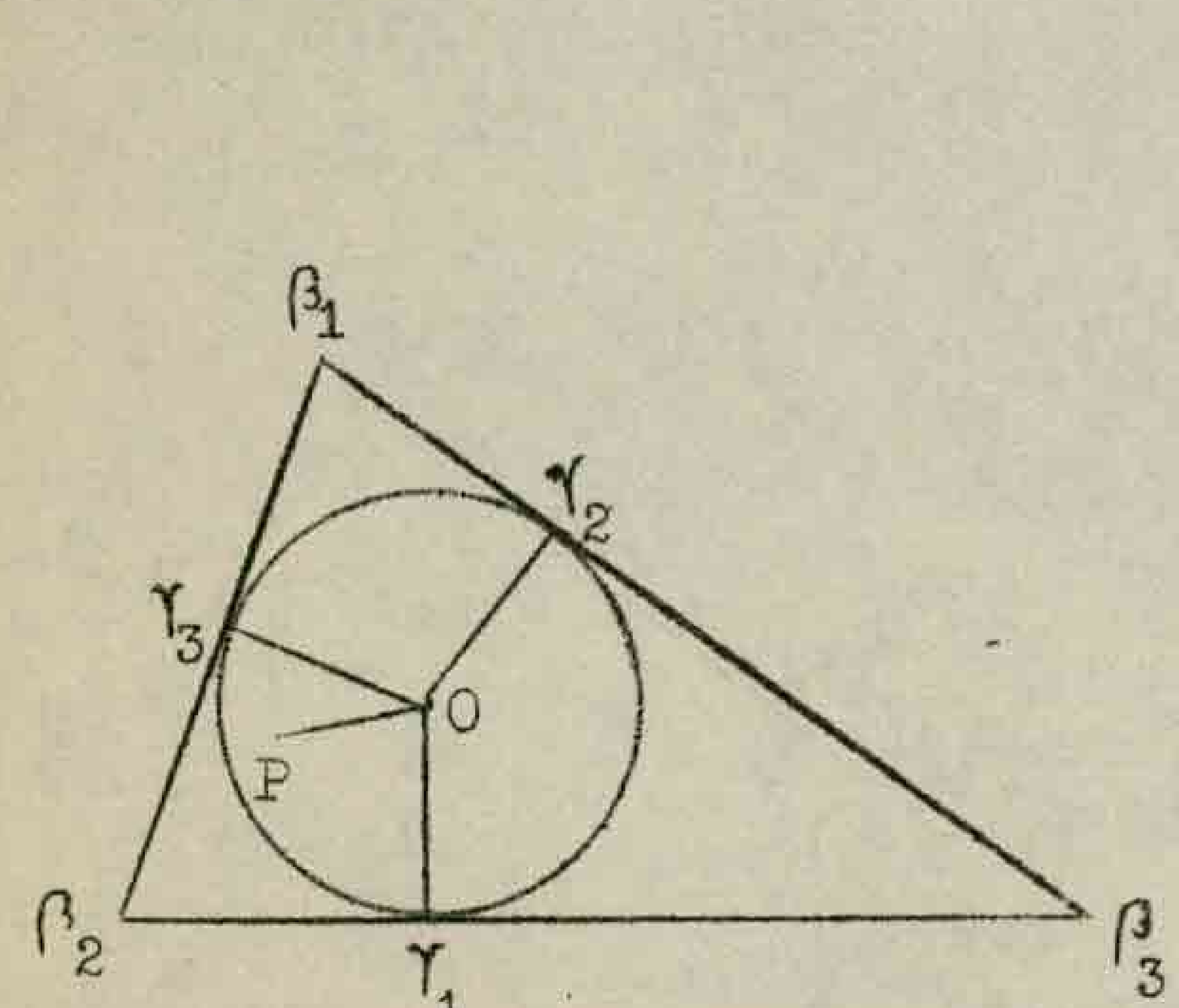
כשנתונות 5 משש הזויות דו-הפאיות של ארבעון אפשר אפוא למצא את הזוית הששית על ידי פתרון משואה רבועית.

משפט 8 *). הארבעון קטן סכום-שטחי-הפאות נתון הנפח הוא ארבעון משוכלל.

נוכיח את המשפט הזה בצעדים אחדים.

א) מכל הארבעונים בעלי בסיס משותף וגובה שוה, קטן סכום-שטחי-הפאות הוא הארבעון, שעקבת גבהו על הבסיס היא מרכז המעגל החסום בבסיס.

הוכחה. יהי $\beta_1\beta_2\beta_3$ בסיס הארבעון, O - מרכז המעגל החסום בו, $O\gamma_i=r$ נצבים המורדים מ O לצלעות $\beta_j\beta_k$, (i,j,k=1,2,3), H - גובה הארבעון, ו P - עקבת הגובה על הבסיס.



נסמן את אורך הקטעים $\overline{OP}=x$; $\beta_j\beta_k=d_i$,(i,j,k=1,2,3). הלאה נסמן $\cos(\gamma_jO\gamma_k)=b_i$, $\sin\beta_i=\sin(\gamma_jO\gamma_k)=\bar{b}_i$, $\cos(PO\gamma_i)=c_i$, $\sin(PO\gamma_i)=\bar{c}_i$.(i,j,k=1,2,3)

סכום השטחים f(x) של הפאות (מלבד הבסיס) יהיה

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} d_i\sqrt{H^2+(r-xc_i)^2} .$$

על ידי גזירה לפי x נקבל

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{3} -d_ic_i(r-xc_i)/\sqrt{H^2+(r-xc_i)^2} ,\quad f''(x)=\sum_{i=1}^{3} d_ic_i^2H^2/\Big(\sqrt{H^2+(r-xc_i)^2}\Big)^3$$

---

*) ראה הערה מס' 9 שהובאה על ידי מר דב ירדן ברבעון למתמטיקה, כרך 1, עמוד 20.

בשביל $x=0$ נקבל $f'(0)=\frac{-r}{\sqrt{H^2+r^2}}\sum_{i=1}^{3} d_ic_i$. אבל לפי משפט הסינוסים אנו יכולים לכתוב $d_i=k\bar{b}_i$, $(i=1,2,3)$ (באשר k הוא גודל קבוע) ונקבל $f'(0)=\frac{-rk}{\sqrt{H^2+r^2}}\sum_{i=1}^{3}\bar{b}_ic_i$. ואולם

$$\sum_{i=1}^{3}\bar{b}_ic_i=\bar{b}_1c_1+\bar{b}_2c_2+\bar{b}_3c_3=\bar{b}_1(b_2c_3+\bar{b}_2\bar{c}_3)+\bar{b}_2(b_1c_3-\bar{b}_1\bar{c}_3)-(\bar{b}_1b_2+b_1\bar{b}_2)c_3=0$$

ובכן $f'(0)=0$.

אבל $f''(x)>0$ בשביל כל ערכי x ומזה נובע כי $x=0$ הנו השורש היחידי של המשוואה $f'(x)=0$ וכי הפונקציה $f(x)$ מקבלת בשביל $x=0$ את המינימום (היחידי) שלה. ברור שאז עקבת הגובה של הארבעון על בסיסו היא נקודה O.

ב) מכל הארבעונים בעלי אותו שטח הבסיס ואותו גובה, בסיסו של הארבעון קטן-סכום-שטחי-הפאות יהיה משולש שוה-צלעות.

הוכחה. בגלל א) אנו יכולים להצטמצם בארבעונים, שעקבת גבהם היא מרכז המעגל החסום בבסיס. נסמן ב s את שטח הבסיס וב p את היקפו. סכום השטחים $f(p)$ של הפאות (מלבד הבסיס) יהיה $f(p)=\frac{p}{2}\sqrt{H^2+r^2}$. אבל $r=\frac{2s}{p}$, ובכן $f(p)=\frac{1}{2}\sqrt{H^2p^2+4s^2}$, במקום ש H ו s הם קבועים ו p הוא משתנה.

רואים מזה, כי $f(p)$ יקבל את ערכו הקטן ביותר כש p יהיה מינימום, וזה יקרה (לפי משפט ידוע מפלנימטריה) כשמשולש הבסיס יהיה שוה-צלעות.

ג) הארבעון קטן סכום-שטחי-הפאות נתון הנפח הוא ארבעון משוכלל.

הוכחה. בגלל א) ו ב) אנו יכולים להצטמצם בארבעונים שבסיסם הוא משולש שוה-צלעות ושעקבת גבהם היא מרכז המעגל החסום בבסיס.

יהי נתון ארבעון משוכלל בעל צלע d. קל לראות שגבהו יהיה $H=\frac{d\sqrt{6}}{3}$ ונפחו $V=\frac{d^3\sqrt{2}}{12}$. נסתכל בארבעון אחר בעל אותו הנפח V, אך בעל גובה $H'=\frac{d\sqrt{6}}{3}y$. צלע בסיסו יהיה כמובן $d'=\frac{d}{\sqrt{y}}$, וסכום השטחים $f(y)$ של פאותיו (והבסיס בכללן) יהיה $f(y)=\frac{3d}{2\sqrt{y}}\sqrt{\frac{2}{3}d^2y^2+\frac{1}{12y}d^2}+\frac{\sqrt{3}d^2}{4y}$, או בצורה יותר פשוטה $f(y)=\frac{\sqrt{3}d^2}{4y}(\sqrt{8y^3+1}+1)$.

על ידי גזירה לפי y נקבל

$$f'(y)=\frac{\sqrt{3}d^2}{4}\left[-\frac{1}{y^2}(\sqrt{8y^3+1}+1)+12y/\sqrt{8y^3+1}\right],\quad f''(y)=\frac{\sqrt{3}d^2}{4}\left[\frac{2}{y^3}(\sqrt{8y^3+1}+1)-144y^3/(\sqrt{8y^3+1})^3\right].$$

למשואה $f'(y)=0$ יש רק שורש אחד: $y=1$. קל לראות כי $f''(1)=\frac{2\sqrt{3}d^2}{3}>0$,

ובכן סכום השטחים $f(y)$ מקבל את ערכו המינימלי בשביל $y=1$, ז.א. כשהארבעון הוא משוכלל.

שמושים לתורת המשוואת הדיפרנציאלית הליניארית

שמשון עמיצור

משפטים רבים בתורת הפונקציות נובעים אך ורק משתי התכונות היסודיות של הגזירה והן: 1) $(a+b)'=a'+b'$, 2) $(ab)'=a'b+ab'$. משפטים אלו קימים גם בשדות כלליים בעלי "גזירה" המקימת 1) ו 2). נוכיח הכללה של משפט ידוע על הפתרונות של משואה דיפרנציאלית ליניארית המוגנית ונביא שני שמושים חשובים למשפט זה. שמוש ראשון בקשר לקבוצת כל האברים הקומוטטיביים עם אבר מסוים בשדה. ובשמוש שני נקבע את המבנה של כל השדות הצקליים מעל שדה לאו דוקא קומוטטיבי.

חלק א. סעיף 1. <u>מבוא.</u>

מתורת המטריצות נצטט:

משפט עזר 1 *): תהי A מטריצה מסדר $n.m$ בשדה F (לאו דוקא קומוטטיבי), אז מספר השורות המכסימלי של A שהן בלתי תלויות משמאל ב F שוה למספר עמודי A שהם בלתי תלויים מימין ב F. ואפשר לבחר r שורות (עמודים) בלתי תלויות משמאל (מימין) שכל שורה (עמוד) של המטריצה A היא תלות ליניארית שמאלית (ימנית) של r השורות (העמודים) הנבחרות. r זה איננו משתנה כאשר מרחיבים את השדה F לשדה $\bar{F}$ המכיל את F.

ב F נסמן שדה כללי (לאו דוקא קומוטטיבי). אם ב T נסמן הומומורפיזם של החבורה לגבי החבור של F, יסמן a^T תמונת a ע"י ההומומורפיזם T.

אברי השדה F יוצרים חבורה לגבי החבור. כל ההומומורפיזמים של חבורה זו יוצרים חוג $E(F)$ לפי ההגדרות: אם S,T שני הומומורפיזמים, אז $S+T$ מגדר בהתאמה $a^{S+T}=a^S+a^T$, והכפל ST ע"י $a^{ST}=(a^S)^T$ **).

בין ההומומורפיזמים של F נציין את הבאים:

1) משפט עזר 2: א) יהי $a\epsilon F$ ההתאמה לכל x ב F: $x \longrightarrow xa$ הוא הומומורפיזם של F שנסמנו ב a_R וכל האברים $\{a_R\}$ יוצרים שדה F_R בחוג $E(F)$ האיזומורפי ל F. בהתאמה $a \longleftrightarrow a_R$

ב) ההתאמה $x \longrightarrow ax$ לכל $x\epsilon F$ הוא הומומורפיזם של F שיסומן ב a_L, וקבוצת כל ה $\{a_L\}$ יוצרים שדה F_L ב $E(F)$ האנטי איזומורפי ל F.

ג) $a_R=a_L$ אז ורק אז אם a שיך למרכז של F. ולכל $a_R\epsilon F_R$: $b_L\epsilon F_L$

$$a_R \cdot b_L=b_L \cdot a_R$$

2) כל האוטומורפיזמים של השדה F הם גם הומומורפיזמים של החבורה לגבי החבור, ושיכים לכן ל $E(F)$.

3) יהי T אוטומורפיזם של F. ההומומורפיזם D של החבורה לגבי החבור F יקרא <u>T-גזירה ימנית</u> אם לכל a השיך ל F מתאים אבר יחיד a^D וההתאמה מקימת:

1. $(a+b)^D=a^D+b^D$ 2. $(ab)^D=a^T.b^D+a^D.b$

אשר a^T היא תמונת a באוטומורפיזם T. a^D יקרא הנגזרת של a.

אם במקום 2 קים '2 $(ab)^D=a.b^D+a^D.b^T$ יקרא D <u>T-גזירה שמאלית</u>. כש T היא האוטומורפיזם האידנטי, כל T-גזירה היא גם ימנית וגם שמאלית. להבא נצטמצם רק ל T-גזירות ימניות ויאמר בקצור T-גזירה.

משפט עזר 3: תהי D T-גזירה. אז קבוצת כל אברי F אשר $a^D=0$ יוצרים שדה חלקי G של F. G נקרא <u>שדה הקונסטנטות של D</u>.

נביא כמה דוגמאות של גזירה:

הגזירה הידועה בתורת הפונקציות היא E-גזירה ימנית ושמאלית. E-האוטומורפיזם האידנטי. וכמו כן:

משפט עזר 4: לכל a קבוע ב F, לכל $x\epsilon F$ נתאים $x^D=ax-xa$, אז ההתאמה D היא E-גזירה. ושדה הקונסטנטות של D הוא השדה F_a של כל האברים הקומוטטיביים עם a.

- -

*) van der Waerden: Moderne Algebra I

**) עובדה זו ושלשת משפטי העזר 2-4 נמצאים ב:
Jacobson: Theory of Rings

בנקל רואים כי בחוג $E(F)$ אפשר להציג את הגזירה D בצורה $D=a_L-a_R$ [1] וכיון ש a_L קומוטטיבי עם a_R לכן a_L קומוטטיבי עם D בחוג ההומומורפיזם $E(F)$.

משפט עזר 5: יהי T אוטומורפיזם של F. אז ההתאמה D: לכל $a\in F$ $a^D=a^T-a$ היא T-גזירה ימנית ושמאלית, ושדה הקונסטנטות של גזירה זו הוא השדה שאבריו נשארים אינוריאנטים ע"י האוטומורפיזם T.

כי $(a+b)^D=(a+b)^T-(a+b)=(a^T-a)+(b^T-b)=a^D+b^D$.

$$(ab)^D=(ab)^T-ab=a^Tb^T-ab^T+ab^T-ab=(a^T-a)b^T+a(b^T-b)=a.b^D+a^Db^T$$

$$(ab)^D=(ab)^T-ab=a^Tb^T-a^Tb+a^Tb-ab=a^T(b^T-b)+(a^T-a)b=a^Tb^D+a^Db^T$$

$a^D=0$ אז ורק אז אם $a^T=a$. (בחוג $E(F)$ ברור כי $D=T-E$.)

סעיף 2: משואות דיפרנציאליות.

מעתה יהא T אוטומורפיזם קבוע של F ו D תהא T-גזירה ימנית ונשתמש בסימנים הידועים $a^{(o)}=a$, $a'=a^D$ ו $a^{(n)}=(a^{(n-1)})'$.

הגדרה: למשואה מהצורה: [2] $a_nz^{(n)}+a_{n-1}z^{(n-1)}+...+a_oz^{(o)}=0$ שבה $a_i\in F$ ו $a_n\neq 0$ קוראים משואה דיפרנציאלית ליניארית הומוגנית ימנית (מד"י), ל n קוראים המעלה של [2]. $y\in F$ יקרא פתרון של [2] כאשר המשואה מתקימת בהצבה $y^{(i)}=z^{(i)}$, $i\geq 0$.

משפט 1: כל הפתרונות של [2] יוצרים מודול ימני מעל שדה הקונסטנטות C בעל ממד $\leq n$.

צריך להוכיח כי 1. אם y פתרון ו $c\in G$ אז yc גם כן פתרון.

2. אם y_1 ו y_2 שני פתרונות אז y_1-y_2 גם כן פתרון.

3. כל $n+1$ פתרונות תלויים מימין מעל C.

ואמנם: אם $c\in G$ אז $c'=0$ לכן $(yc)'=y^Tc'+y'c=y'c$.

ובדרך כלל $(yc)^{(i)}=y^{(i)}.c$ לכל $i\geq 0$.

לכן
$$\sum_{i=0}^{n}a_i(yc)^{(i)}=\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}c=0.c=0$$

ז"א yc גם כן פתרון.

קל להוכיח כי $(y_1-y_2)^{(i)}=y_1^{(i)}-y_2^{(i)}$,

לכן
$$\sum_{i=0}^{n}a_i(y_1-y_2)^{(i)}=\sum_{i=0}^{n}a_iy_1^{(i)}-\sum_{i=0}^{n}a_iy_2^{(i)}=0-0=0.$$

לכן y_1-y_2 גם כן פתרון.

יהיו $y_1,y_2,...y_{n+1}$ $n+1$ פתרונות של [2]. נסתכל במטריצה:

$$[3]\quad \begin{pmatrix} y_1^{(0)} & y_2^{(0)} & \cdots & y_{n+1}^{(0)} \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdots & y_{n+1}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_{n+1}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$n+1$ שורות המטריצה תלויות משמאל כי $\sum_{i=0}^{n}a_iy_j^{(i)}=0$ לכל $1\leq j\leq n+1$ ו $a_n\neq 0$

לכן גם $n+1$ העמודים תלויים מימין (משפט עזר 1) ואפשר לבחור k עמודים בלתי תלויים שכל עמוד אחר של Y הוא תלות ימנית של עמודים אלו. מבלי להגביל את הכלליות נניח כי k העמודים הראשונים הם בלתי תלויים, והעמוד האחרון הוא תלות ימנית שלהם. לכן קיימים $b_1,...b_k$ אשר

[4] $y^{(j)}_{n+1}=\sum_{i=1}^{k} y_i^{(j)} b_i$. $0\leqslant j\leqslant n$ [4] קיים גם כאשר $j=n+1$,

כי מ [2] נובע של $1\leqslant i\leqslant n+1$ [4'] $y_i^{(n)}=\sum_{j=0}^{n-1} -a_n^{-1}a_j\cdot y^{(j)}$

וע"י גזירה ובעזרת [4'] נקבל:

$$y_i^{(n+1)}=-\sum_{j=0}^{n-1}\left((-a_n^{-1}a_j)^T y_i^{(j+1)}+(-a_n^{-1}\cdot a_j)'y_i^{(j)}\right)=\sum_{i=0}^{n-1} c_j y_i^{(j)}$$

ובעזרת [4] $$y_{n+1}^{(n+1)}=\sum_{j=0}^{n-1}c_j y_{n+1}^{(j)}=\sum_{j=0}^{n-1}c_j\sum_{i=1}^{k}y_i^{(j)}b_i=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{n-1}c_jy_i^{(j)}\right)b_i=\sum_{i=1}^{k}y_i^{(n+1)}b_i$$

ע"י גזירה של [4] ובעזרת [4] נקבל:

$$y_{n+1}^{(j+1)}=\sum_{i=1}^k y_i^{(j)T}b_i'+\sum_{i=1}^k y_i^{(j+1)}b_i$$

לכן $0\leqslant j\leqslant n$ $$0=\sum_{i=1}^k y_i^{(j)T}b_i'=\sum_{i=1}^k \left(y_i^{(j)}b_i'^{T^{-1}}\right)^T=0$$

לכן $\sum_{i=1}^k y_i^{(j)}b_i'^{T^{-1}}=0$. אבל k השורות הראשונות בלתי תלויות, לכן

$b_i'^{T^{-1}}=0$. לכן $b_i'=0$ וז"א b_i שיכים ל C. לכן מ [4] נובע

ש $y_{n+1}=\sum_{i=1}^k y_ib_i$ וז"א n+1 הפתרונות תלויים מימין מעל C.

משפט 2. יהי M מודול ימני ממםד n מעל C. אז קימת משואה דיפרנצ' לינאר' ימנית ב F ממעלה n אשר אברי M ורק אברי M פתרונות שלה.

כי יהיו $y_1,y_2,\dots y_n$ בסיס של המודול M. נסתכל במטריצה

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)} & y_2^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

היא בעלת n עמודים ו n+1 שורות, המספר המכסימלי של עמודים בלתי תלויים מימין הוא לכל היותר n, ולכן לפי משפט עזר 1 n+1 השורות הן תלויות משמאל ז"א קיימים $a_1,\dots a_n$, שלא כלם אפס אשר

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_j^{(i)}=0 \quad j=1,2,\dots,n ,$$

וכמו בהוכחת משפט 1 נקבל שכל אברי M הם פתרונות של המשואה $\sum_{i=0}^{n} a_i z^{(i)}=0$.

משואה זו מעלתה היא n, כי לו היה למשואה מעלה קטנה מ n היו פתרונותיה יוצרים מודול שממדו קטן מ n, מה שלא יתכן. ולו היו למשואה זו פתרונות שאינם ב M היתה מערכת הפתרונות שלה יוצרת מודול המכיל את M ולכן ממדו גדול ממםד M השוה ל n, מה שלא יתכן לפי משפט 1.

הערה: אם הגזירה D היא T-גזירה שמאלית אז המשפטים 1 ו 2 יהיו נכונים לגבי משואות דיפרנציאליות ליניאריות הומוגניות שמאליות מהצורה $\sum_{i=0}^{n} z^{(i)}a_i=0$ והפתרונות הם מודול שמאלי מעל שדה הקונסטנטות.

(המשך יבוא)

הוכחה חדשה למשפט הקרוב של WEIERSTRASS

ראובן שרם

ברצוני להביא בזאת הוכחה חדשה למשפט הקרוב (אפרוקסימציה) של Weierstrass. אמנם אין מחקר זה מכיל תוצאות מתמטיות חדשות. כמו כן, כפי שראיתי לצערי רק אחרי בצועו, השתמשתי בשיטות דומות לאלה שכבר השתמשו בהן לאותה מטרה. בכל זאת החלטתי להביאו במקום זה, ביחוד בגלל הפשטות וההסתכלותיות הרבה המונחות ביסודו. השתדלתי להדגיש בעיקר את הקשר בין חלקי ההוכחה השונים ולא לתת את השלד המתמטי בלבד.

וזהו המשפט שברצוני להוכיח: לגבי כל פונקציה ממשית $f(x)$ המגדרת ברוח סגור וסופי של מספרים ממשיים, $I\equiv(a,b)$, ורציפה בתוכו ולגבי כל מספר חיובי ε קיים לפחות פולינום (קרוב) אחד $p(x)$, $p(x)=p(x,\varepsilon,{}_{x\in I}f_I)$ בעל מקדמים ממשיים המקיים $|p(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ בשביל כל x מתוך I.

.§1

נבחר בדרך של קונסטרוקציה להוכחת המשפט. נבנה פולינום p שנוכיח אודותיו שהוא מקיים את אי-השויון הדרוש. ברור שפולינום זה יהיה תלוי בערכי $f(x)$ בחלק מנקודות I, אחרת היה יכל אותו הפולינום לשמש קרוב לשתי פונקציות השונות זו מזו באפן רצוי ואין הדבר אפשרי. בנסוח המשפט מופיע p כפונקציה של ערכי f בכל I, דהיינו כפונקציונל. לשמחתנו יש באפשרותנו להפוך את הוכחת הקיום של פונקציונל זה להוכחת הקיום של פונקציה התלויה במספר סופי של משתנים בלבד, אם גם מספר המשתנים האלה איננו חסום.

מספיק, לשם קביעת p כזה, לדעת את f בנקודות כאלה אשר הקיצוניות בהן שוות ל a ול b בהתאמה ואשר אין הואריציה של הפונקציה בין שתי נקודות עוקבות עולה על $\varepsilon/3$; כי אם הנקודות הן $x_1=a,x_2,\dots,x_{n+1}=b$ אז פולינום המקיים $|p(x)-f(x_i)|\leq\frac{2}{3}\varepsilon$ בשביל $x_i\leq x\leq x_{i+1}$ כאשר $i=1,\dots,n+1$ יקיים גם את אי השויון

$$(1)\qquad x\in I\qquad |p(x)-f(x)|\leq\varepsilon\ .$$

אולם לשם קביעת ה x_i, $i=1,\dots,n+1$, מספיק להניח את קיומה של הפונקציה $\delta(\varepsilon)$ המקיימת

$$x,y\in I,\qquad |f(x)-f(y)|<\varepsilon/3 \Leftarrow |x-y|<\delta(\varepsilon)\ .$$

כי אם נגדיר $\left[\frac{b-a}{\delta(\varepsilon)}+1\right]=n$, $\frac{b-a}{n}=h$, הרי הנקודות $x_i=a+(i-1)h$, $i=1,\dots,n+1$, הן בעלות התכונה הדרושה.

p יהיה תלוי אפוא בפונקציונל $\delta(\varepsilon)$ ובמספר סופי של ערכי $f(x)$ אשר מקומם נקבע ע"י $\delta(\varepsilon)$. לגבי הרכחתנו ההבדל בין שני הפונקציונלים הוא שקיומו של δ ידוע מהמשפט על הרציפות במדה שוה של פונקציה רציפה ברוח סגור בו בזמן שעובדת הקיום של $p(x,\varepsilon,f)$ היא נושא המאמר.

.§2

ההסתכלות בעובדות האחרונות מראה לנו גם את הדרך לבניית p למעשה. נכניס תחלה את הסמונים הבאים: $x_0=a-h$, $x_{n+2}=b+h$, $f(x_0)$ הוא מספר כלשהו המקיים $|f(x_0)-f(a)|\leq\varepsilon/3$; $i=1,\dots,n+2$, $I_i=\langle x_{i-1},x_i\rangle$ (סכום רוחים פתוחים). $I'=\sum_{i=2}^{n+1}I_i$. (צרוף שני הרוחים החיצוניים איננו מפריע להבנת הדרך שננקוט בה והסבה לצרוף תובן להלן).

בולטת לעין היא העובדה שבתוך כל I_i, $i=2,\dots,n+1$, קיים פולינום של קרוב ל $f(x)$ והוא הקבוע $f(x_{i-1})$. כך באים אנו באפן טבעי להכנסת "פונקצית המדרגות" $F(x)$ המגדרת ב I' ע"י

$$x\in I_i\qquad 2\leq i\leq n+1\qquad \Leftarrow\qquad F(x)=f(x_{i-1})\ .$$

בחפשנו פולינום לכל I באים אנחנו, שוב באפן טבעי, לתאר את ה $F(x)$ בצורה

$$F(x)=\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i)\delta_{i+1}(x) \qquad \delta_i(x)=\begin{cases}0 & x\in I_j \quad j\neq i\\ 1 & x\in I_i\end{cases} \tag{2}$$

אולם עתה הפסיד $F(x)$ את תכונתו להיות פולינום. יתכן שמטרתנו תושג עדיין אם נותר על תאור $F(x)$ עצמו כפולינום, מה שאינו אפשרי, ונחפש במקום זה קרוב לפונקציות $\delta_i(x)$, $i=1,\dots,n+2$, המופיעות בתאור $F(x)$ לפי (2). הפולינומים העקריים הידועים לנו כפולינומים של קרוב לפונקציות מסוימות נתונות מראש הם סכומים חלקיים של טורי חזקות. כדאי על כן שנחפש קרוב ל $\delta_i(x)$ ג"כ ע"י פולינומים כאלה, או לפחות פולינומים קרובים להם לפי מבניהם. (פתוח לטור חזקות אינו בא בחשבון בגלל אי-רציפות ה $\delta_i(x)$ ב I.)

לשם כך מוטב לתת תחלה צורה "אנליטית" ל $\delta_i(x)$, פונקציה השוה ל 1 בשביל קבוצת ערכים אחת של משתניה ול 0 בשביל קבוצה אחרת. אם נזניח לרגע את האפי המיוחד של קבוצות אלה, יקל עלינו למצא פונקציה כזאת. הסימנים השונים של $|y|$ בשביל $y>0$ ו $y<0$ (אם y יסמן משתנה כלשהו) מביאים אותנו מיד לידי הפונקציה $y/|y|$ המקבלת רק שני ערכים שונים לארך כל ציר ה y-ים ומכאן מיד ל $1-\frac{y}{|y|}$ ו $\frac{1}{2}(1-\frac{y}{|y|})$ אשר האחרונה מהן שוה ל 1 בשביל $y<0$ ול 0 בשביל $y>0$, כדרוש. נשאר רק למצא פונקציה אשר ערכיה חיובים בשביל $x\notin I_i$ ושליליים בשביל $x\in I_i$ ולהציב אותה במקום y בבטוי האחרון. הפונקציה $t_i=t_i(x)=(x-x_{i-1})(x-x_i)$ מספקת דרישות אלה. לכן

$$F(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i)\left(1-\frac{t_{i+1}}{|t_{i+1}|}\right) \qquad x\in I'.$$

עכשיו הפתוח של $F(x)$ לגבול של פולינומים ב I' הוא פשוט כי אם y הוא שוב משתנה כלשהו

$$\frac{y}{|y|}=\frac{y}{\sqrt{y^2}}=\frac{y}{t\sqrt{1+(\frac{y^2}{t^2}-1)}}=\frac{y}{t}\left[1+(\frac{y^2}{t^2}-1)\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{y}{t}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\left(\frac{y^2}{t^2}-1\right)^{\nu}\underset{\mathrm{Def}}{\equiv}s(y)=$$

$$=\lim_{m\to\infty} s_m(y) \qquad y\neq 0 \qquad t>\max_{i=1,\dots,n+2}\ \max_{a\le x\le b}|t_i|$$

כאשר $s_m(y)$ מסמן את הסכום החלקי ה m-י של $s(y)$. לכן

$$F(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i)\left[1-s(t_{i+1})\right]\underset{\mathrm{Def}}{\equiv}S(x)=\lim_{m\to\infty}S_m(x)$$

כאשר $S_m(x)$ מתקבל מ $S(x)$ ע"י הצבת סכומים חלקיים במקום הטורים האין-סופיים המופיעים בו.

§3.

השאלה הקובעת היא עכשיו: האם קיים m_0 טבעי כך ש $|F(x)-S_{m_0}(x)|\le\frac{2}{3}\varepsilon$ בשביל $x\in I'$. המקשה על מתן התשובה היא העובדה שאין ה $S(t_i)$, $i=1,\dots,n+2$, השוים ל $t_i(x)/|t_i(x)|$ מתכנסים במדה שוה ב I' היות ו $t_i(x)/|t_i(x)|$, $i=1,\dots,n+2$, פונקציה בלתי רציפה שם (בגלל הכיל I נקודות 0 של t_i, $i=1,\dots,n+2$).

לעומת זאת יש באפשרותנו להשיג קרוב ע"י $S_{m_0}(x)$ מתאים בתוך קבוצה חלקית של I' שמדתה קרובה ל b-a ככל הרצוי. נוציא מתוך I' רוחים ברוחב 2α סביב הנקודות x_i כמרכזים $(0<\alpha<h/2)$. קבוצת המספרים הנשארת תקרא I'_α - המוצאת I'^{α}. ב I'_α יש חסם מלרע חיובי לכל ה $|t_i|$, $i=1,\dots,n+2$ - $\frac{1}{2}h\alpha$ - כפי שחשבון פשוט מראה. לכן ברור שבחירה מתאימה של m_0 תגרור אחריה

$$|r_{m_0}(y)|\underset{\mathrm{Def}}{\equiv}|s(y)-s_{m_0}(y)|\le\frac{\varepsilon}{M(n+2)} \qquad |y|\ge\frac{1}{2}h\alpha$$

אם $M=\max|f(x)|+\frac{\varepsilon}{3}$ ולכן קיים ב I'_α, אשר בו באמת $|t_i|\ge\frac{1}{2}h\alpha$ כמותנה

באי-השויון האחרון -

$$|R_{m_0}(x)| \underset{Def}{\equiv} |f(x)-S_{m_0}(x)| \leq |f(x)-F(x)| + |F(x)-S_{m_0}(x)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2}\Big|\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i)r_{m_0}(t_{i+1})\Big| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n+1} |f(x_i)|\,|r_{m_0}(t_{i+1})| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{M}{2}\sum_{i=0}^{n+1} |r_{m_0}(t_{i+1})| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{M}{2}(n+2)\,\frac{\varepsilon}{M(n+2)} = \frac{5}{6}\varepsilon$$

כדרוש. את α יש עדיין באפשרותנו לקבוע. m_0 יהיה תלוי בו.

ב I^{α} יותר קשה להוכיח ש $|R_{m_0}(x)| \leq \varepsilon$ אם רק α מקבל ערך מתאים.

חלק מן ההוכחה משותף עם החשבון האחרון. נניח שאותו x שלגביו ברצוננו להוכיח את אי-השויון הדרוש מקיים $1 \leq j \leq n+1$ $|x-x_j| < \alpha$. אז

$$|t_i| \geq \frac{3}{2}h\alpha \qquad i=1,\dots,n+2 \qquad i \neq j, j+1$$

ולכן במקרה זה

$$|R_{m_0}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2}\Big|\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i)r_{m_0}(t_{i+1})\Big| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j-1,j}}^{n+1} |f(x_i)|\,|r_{m_0}(t_{i+1})| +$$

$$+\frac{1}{2}|f(x_{j-1})r_{m_0}(t_j)+f(x_j)r_{m_0}(t_{j+1})| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2}Mn\frac{\varepsilon}{M(n+2)} + \frac{1}{2}\Big|\overline{\sum}\Big| = \frac{5n+4}{6n+12}\varepsilon + \frac{1}{2}\Big|\overline{\sum}\Big|$$

$$\overline{\sum} = f(x_{j-1})r_{m_0}(t_j)+f(x_j)r_{m_0}(t_{j+1}).$$

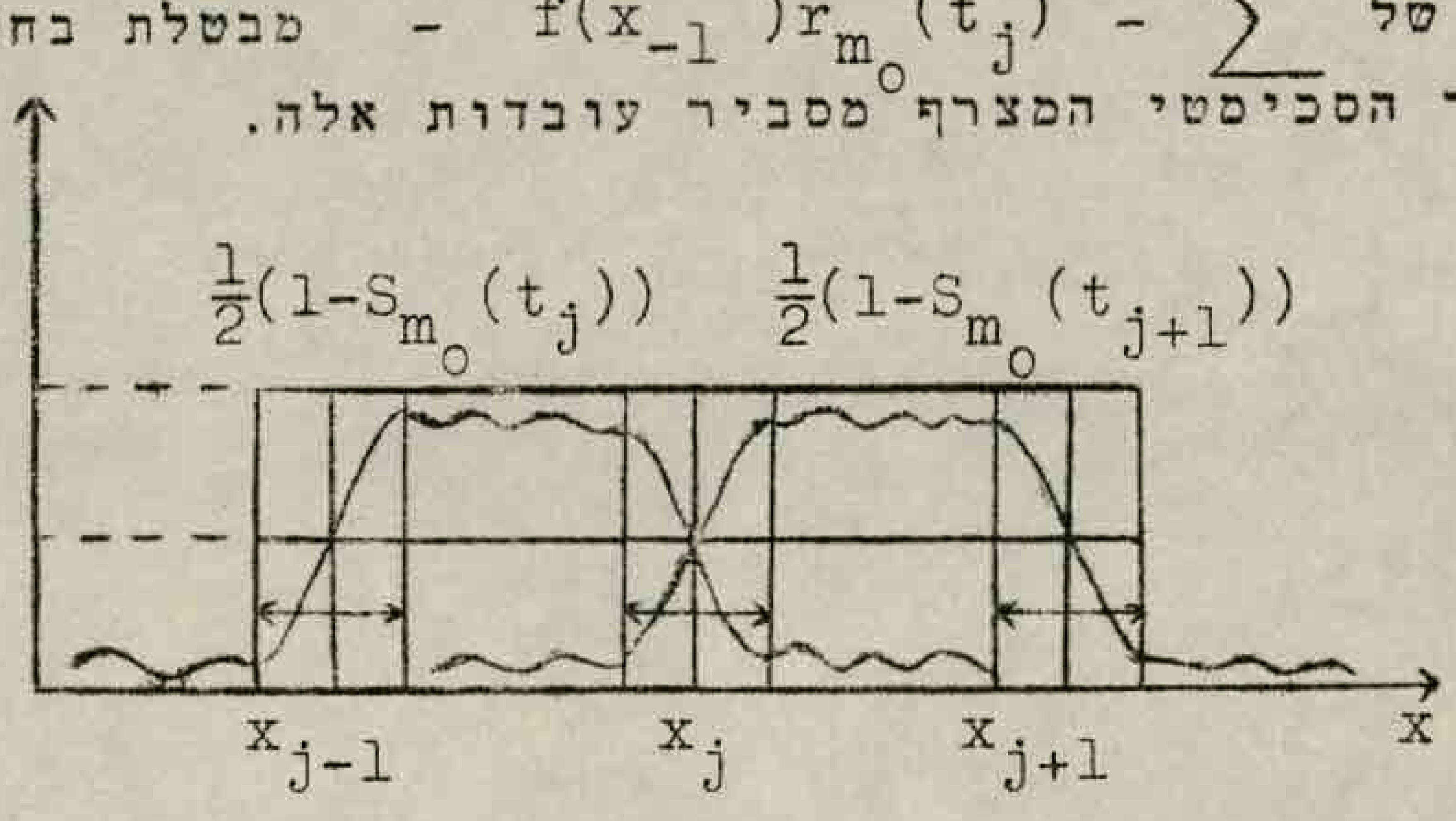
ההערכה האחרונה מאפשרת לנו לבדוק באפן נפרד את ההשפעה על $R_{m_0}(x)$ של אותם הטורים האין סופיים המופיעים בחשבונותינו אשר אינם מתכנסים במדה שוה סביב x_j. כפי שהיא מראה, מספיק להוכיח שבשביל α מתאים $\big|\overline{\sum}\big| \leq \frac{n+8}{3n+6}\varepsilon$.

העובדות הבאות מחזקות את האמון בהתמלאות הדרישה הזאת ומתוות לנו את הדרך לאשורה:

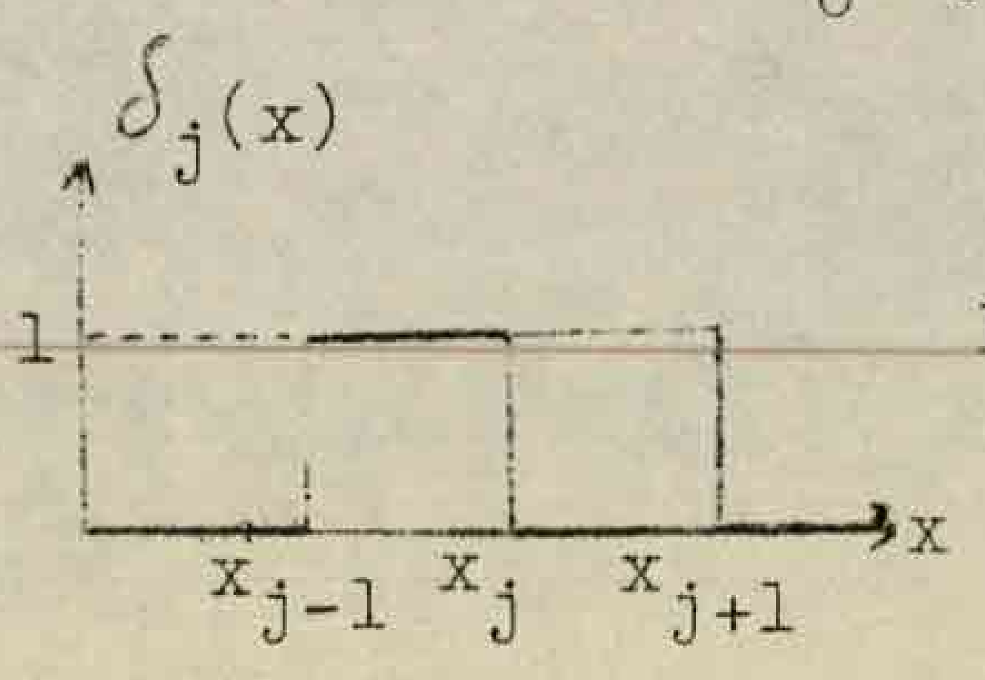
(a) $r_{m_0}(y)$ היא פונקציה בלתי זוגית, ז"א $\frac{y_1}{y_2} \neq -1 \wedge r_{m_0}(y_1)+r_{m_0}(y_2)=0$.

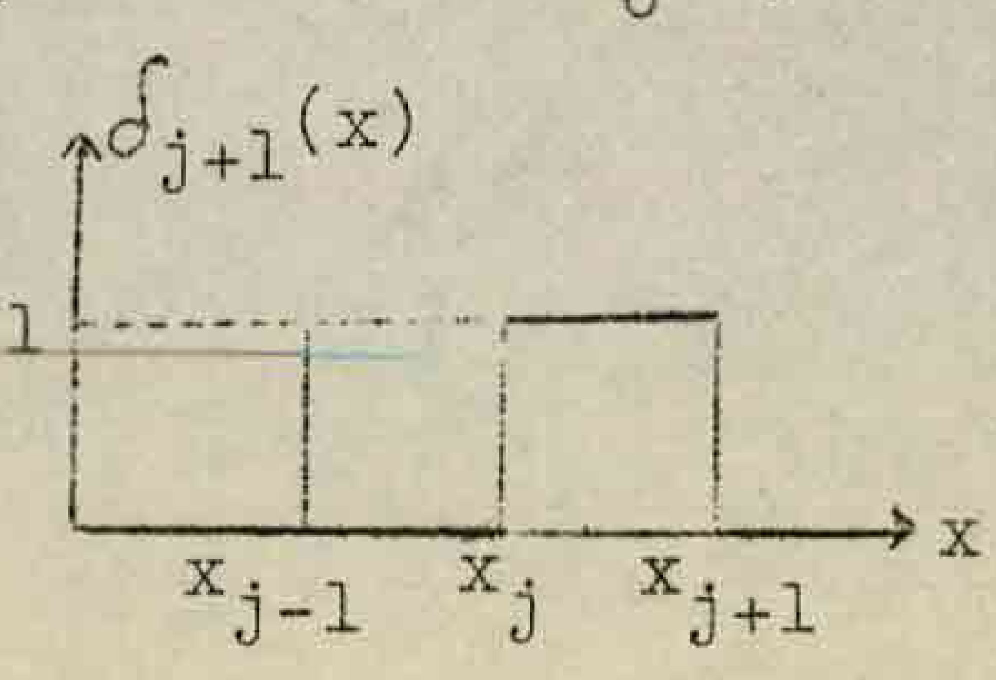
(b) $\lim\limits_{x\to x_j} \frac{t_{j+1}}{t_j} = -1$. (c) $|f(x_j)-f(x_{j-1})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. (d) $|r_{m_0}(t_j)| \leq 1$.

ז"א שיתכן שהשגיאה הגדולה באפן יחסי הנוצרת ע"י אי-ההתכנסות במדה שוה של האבר הראשון של $\overline{\sum}$ - $f(x_{-1})r_{m_0}(t_j)$ - מבטלת בחלקה ע"י קיום האבר השני. הציור הסכימטי המצרף מסביר עובדות אלה.



הציור הסכמטי מראה שמחוץ לרוחים ברוחב 2α סביב ה x_i יהיו ערכי הפולינומים $\delta_j(x)$ ו $\delta_{j+1}(x)$ קרובים ל $\frac{1}{2}(1-S_{m_0}(t_j))$ ו $\frac{1}{2}(1-S_{n_0}(t_{j+1}))$ בהתאמה.





ב x_j סכום הפולינומים הנזכרים הוא בדיוק 1 כי

$s_{m_0}[t_j(x_j)]=s_{m_0}[t_{j+1}(x_j)]=0$. ב $|x-x_j|<\alpha$ מראה הציור הסכמטי שיתכן שסכום שני הפולינומים אף הוא קרוב ל 1, כדרוש. ההוכחה המדויקת תאשר עובדה זאת.

ארבע העובדות שמניתי, המופיעות גם בהוכחה המדויקת, מסבירות את הצרך בהגדרת $f(x_0)$, $\delta_1(x)$, $\delta_{n+2}(x)$ ובהכנסתם לחשבון. בהעדרם היה (b), למשל, חסר מובן בגלל אי קיום t_1.

§4.

(1) כדי לבצע בשלמות את ההוכחה לקיום אי-השויון $\left|\sum\right| \leqslant \frac{n+8}{3n+6}\varepsilon$ בשביל $x \in I'^{\alpha}$ עם α מתאים, יש לחשב תחלה את m_0 המקיים

$$|r_{m_0}(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M(n+2)} \qquad \text{בשביל} \qquad |y| \geqslant \tfrac{1}{2}h\alpha \,.$$

קיימים אי-השויונות הבאים:

$$|r_m(y)| = \left|\frac{y}{t}\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\left(\frac{y^2}{t^2}-1\right)^{\nu}\right| \leqslant \frac{|y|}{t}\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\left|\frac{y^2}{t^2}-1\right|^{\nu} \leqslant \frac{t^2\left(1-\frac{y^2}{t^2}\right)^{m+1}}{y^2} \leqslant \frac{4t^2\left(1-\frac{h^2\alpha^2}{4t^2}\right)^{m+1}}{h^2\alpha^2}$$

בשביל $|y| \geqslant \frac{1}{2}h\alpha$. מכאן:

$$m_0 = \left[\lg \frac{\varepsilon h^2\alpha^2}{4t^2M(n+2)} \Big/ \lg\left(1-\frac{h^2\alpha^2}{4t^2}\right)\right].$$

(2) כדי להוכיח ש $\left|\sum\right| \leqslant \frac{n+8}{3n+6}\varepsilon$ נערוך את ההערכה כך שהעובדות (a) - (d) תובאנה בחשבון:

$$\left|\sum\right| = |f(x_{j-1})r_{m_0}(t_j)+f(x_{j-1})r_{m_0}(t_{j+1})+f(x_j)r_{m_0}(t_{j+1})-f(x_{j-1})r_{m_0}(t_{j+1})| \leqslant$$
$$\leqslant M|r_{m_0}(t_j)+r_{m_0}(t_{j+1})|+|r_{m_0}(t_{j+1})|\,|f(x_j)-f(x_{j-1})| \leqslant M|\sigma| + \frac{\varepsilon}{3}$$

בגלל $|r_{m_0}(t_j)| \leqslant 1$. מספיק להראות $|\sigma| \leqslant \frac{2}{n+2}\varepsilon$

בגלל $\operatorname{sgn} t_j \neq \operatorname{sgn} t_{j+1}$ בשביל $|x-x_j|<\alpha$ יהיה

$$|\sigma| = \left|\frac{t_j}{|t_j|} - s_{m_0}(t_j) + \frac{t_{j+1}}{|t_{j+1}|} - s_{m_0}(t_{j+1})\right| = |s_{m_0}(t_j) + s_{m_0}(t_{j+1})|.$$

אם נכניס את u ע"י $x=x_j+u$ נקבל: $t_j+t_{j+1}=2u^2$. מכאן

$$|\sigma| = |S_{m_0}(t_j)+S_{m_0}(-t_j+2u^2)| = |S_{m_0}(t_j)+S_{m_0}(-t_j)+2u^2S'_{m_0}(-t_j+2\theta u^2)| =$$
$$= 2u^2|s'_{m_0}(-t_j+2\theta u^2)| \qquad 0<\theta<1$$

בגלל אי-זוגיות $s_{m_0}(y)$. התחשבות בערכו של $s'_{m_0}(y)$ ובאי-השויונות

$$|u|<\alpha,\quad \left|\frac{y^2}{t^2}-1\right|<1,\quad \left|\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\right| < \frac{9}{8\sqrt{\nu}},\quad \sum_{\nu=1}^{m}\sqrt{\nu} \leqslant \frac{16}{3}m^{\frac{3}{2}},$$

$\sum_{\nu=2}^{m}\frac{1}{\sqrt{\nu}}<2\sqrt{m}$ $m>1$ ולבסוף $|y|=|-t_j+2\theta u^2| \leqslant \frac{5}{2}h\alpha$ נותנת $|\sigma| \leqslant \frac{18}{t}\alpha^2\sqrt{m_0}+300\frac{h^2}{t^3}\alpha^4m_0^{\frac{3}{2}}$.

בגלל התלות המיוחדת של m_0 ב α שואף הבטוי האחרון ל 0 עם α ויתקיים $|\sigma| \leqslant 2/(n+2)\varepsilon$ בשביל α קטן למדי.

בזאת הוכח שאי-השויון $|R_{m_0}(x)| \leqslant \varepsilon$ יהיה קיים גם ב I'^{α} בתנאי ש α קטן במדה מספקת. לגבי הנקודות x_i, $i=1,\ldots,n+1$, הוא נובע מרציפות $S_{m_0}(x)$ ו $f(x)$ ב I.

דב ירדן

סדרת פבונצ׳י מגדרת על-ידי: $(n>2)$ $u_1=u_2=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$. בשם ציון-ההופעה $a(p)$ של מספר ראשוני p קוראים לציון האבר הראשון המתחלק ב p. $a(p)$ הוא מחלק של $p-1$, אם $p\equiv \pm1\ (10)$, ושל $p+1$, אם $p\equiv \pm3\ (10)$.

סדרת פבונצ׳י מחזורית מודולו כל מספר ראשוני p. אם נציין ב $A(p)$ את ארך המחזור הקטן ביותר לפי $p>2$, קימים בהתאמה הקשרים הבאים:

$$a(p) \equiv 2 \qquad 0 \qquad \pm1 \quad (\mathrm{mod}\ 4)$$
$$A(p) = a(p) \quad 2a(p) \quad 4a(p).$$

בפרוק $p\mp1$ משורטטים המספרים שיש להשמיטם כדי לקבל את פרוק $a(p)$.

p	פרוק p∓1	a(p)	p	פרוק p∓1	a(p)	p	פרוק p∓1	a(p)	p	פרוק p∓1	a(p)
2	3	3	283	$2^2\cdot 71$	284	661	$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$	55	1087	$2^6\cdot 17$	64
3	2^2	4	293	$2\cdot 3\cdot 7^2$	147	673	$2\cdot 337$	337	1091	$2\cdot 5\cdot 109$	1090
5	5	5	307	$2^2\cdot 7\cdot 11$	44	677	$2\cdot 3\cdot 113$	113	1093	$2\cdot 547$	547
7	2^3	8	311	$2\cdot 5\cdot 31$	310	683	$2^2\cdot 3^2\cdot 19$	684	1097	$2\cdot 3\cdot 3\cdot 61$	183
11	$2\cdot 5$	10	313	$2\cdot 157$	157	691	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 23$	138	1103	$2^4\cdot 3\cdot 23$	48
13	$2\cdot 7$	7	317	$2\cdot 3\cdot 53$	159	701	$2^2\cdot 5^2\cdot 7$	175	1109	$2\cdot 2\cdot 277$	554
17	$2\cdot 3^2$	9	331	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$	110	709	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 59$	118	1117	$2\cdot 13\cdot 43$	559
19	$2\cdot 3^2$	18	337	$2\cdot 13^2$	169	719	$2\cdot 359$	718	1123	$2^2\cdot 281$	1124
23	$2^3\cdot 3$	24	347	$2^2\cdot 3\cdot 29$	116	727	$2^3\cdot 7\cdot 13$	728	1129	$2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 47$	564
29	$2\cdot 2\cdot 7$	14	349	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 29$	174	733	$2\cdot 367$	367	1151	$2\cdot 5\cdot 5\cdot 23$	230
31	$2\cdot 3\cdot 5$	30	353	$2\cdot 3\cdot 59$	59	739	$2\cdot 3^2\cdot 41$	738	1153	$2\cdot 577$	577
37	$2\cdot 19$	19	359	$2\cdot 179$	358	743	$2^3\cdot 3\cdot 31$	248	1163	$2^2\cdot 3\cdot 97$	1164
41	$2\cdot 2^2\cdot 5$	20	367	$2^4\cdot 23$	368	751	$2\cdot 3\cdot 5^3$	750	1171	$2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13$	1170
43	$2^2\cdot 11$	44	373	$2\cdot 11\cdot 17$	187	757	$2\cdot 379$	379	1181	$2^2\cdot 5\cdot 59$	295
47	$2^4\cdot 3$	16	379	$2\cdot 3^3\cdot 7$	378	761	$2^3\cdot 5\cdot 19$	95	1187	$2^2\cdot 3^3\cdot 11$	1188
53	$2\cdot 3^3$	27	383	$2^7\cdot 3$	384	769	$2^3\cdot 2^5\cdot 3$	96	1193	$2\cdot 3\cdot 199$	597
59	$2\cdot 29$	58	389	$2^2\cdot 97$	97	773	$2\cdot 3^2\cdot 43$	387	1201	$2\cdot 2^3\cdot 3\cdot 5^2$	600
61	$2^2\cdot 3\cdot 5$	15	397	$2\cdot 199$	199	787	$2^2\cdot 197$	788	1213	$2\cdot 607$	607
67	$2^2\cdot 17$	68	401	$2^2\cdot 2^2\cdot 5^2$	100	797	$2\cdot 3\cdot 7\cdot 19$	57	1217	$2\cdot 3\cdot 7\cdot 29$	203
71	$2\cdot 5\cdot 7$	70	409	$2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 17$	204	809	$2^2\cdot 2\cdot 101$	202	1223	$2^3\cdot 3\cdot 3\cdot 17$	408
73	$2\cdot 37$	37	419	$2\cdot 11\cdot 19$	418	811	$2\cdot 3\cdot 3^3\cdot 5$	270	1229	$2\cdot 2\cdot 307$	614
79	$2\cdot 3\cdot 13$	78	421	$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$	21	821	$2^2\cdot 5\cdot 41$	205	1231	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 41$	1230
83	$2^2\cdot 3\cdot 7$	84	431	$2\cdot 5\cdot 43$	430	823	$2^3\cdot 103$	824	1237	$2\cdot 619$	619
89	$2^3\cdot 11$	11	433	$2\cdot 7\cdot 31$	217	827	$2^2\cdot 3^2\cdot 23$	828	1249	$2^2\cdot 2^3\cdot 3\cdot 13$	312
97	$2\cdot 7^2$	49	439	$2\cdot 3\cdot 73$	438	829	$2^2\cdot 3\cdot 3\cdot 23$	69	1259	$2\cdot 17\cdot 37$	1258
101	$2\cdot 2\cdot 5^2$	50	443	$2^2\cdot 3\cdot 37$	444	839	$2\cdot 419$	838	1277	$2\cdot 3\cdot 3\cdot 71$	213
103	$2^3\cdot 13$	104	449	$2\cdot 2^5\cdot 7$	224	853	$2\cdot 7\cdot 61$	427	1279	$2\cdot 3^2\cdot 71$	1278
107	$2^2\cdot 3\cdot 3^2$	36	457	$2\cdot 229$	229	857	$2\cdot 3\cdot 11\cdot 13$	429	1283	$2^2\cdot 3\cdot 107$	1284
109	$2^2\cdot 3^3$	27	461	$2\cdot 2\cdot 5\cdot 23$	46	859	$2\cdot 3\cdot 11\cdot 13$	78	1289	$2^2\cdot 2\cdot 7\cdot 23$	322
113	$2\cdot 3\cdot 19$	19	463	$2^4\cdot 29$	464	863	$2^5\cdot 3^3$	864	1291	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 43$	430
127	2^7	128	367	$2^2\cdot 3^2\cdot 13$	468	877	$2\cdot 439$	439	1297	$2\cdot 11\cdot 59$	649
131	$2\cdot 5\cdot 13$	130	479	$2\cdot 239$	478	881	$2\cdot 2^3\cdot 5\cdot 11$	88	1301	$2^2\cdot 5^2\cdot 13$	325
137	$2\cdot 3\cdot 23$	69	487	$2^3\cdot 61$	488	883	$2^2\cdot 13\cdot 17$	884	1303	$2^3\cdot 163$	1304
139	$2\cdot 3\cdot 23$	46	491	$2\cdot 5\cdot 7^2$	490	887	$2^3\cdot 3\cdot 37$	888	1307	$2^2\cdot 3\cdot 109$	436
149	$2^2\cdot 37$	37	499	$2\cdot 3\cdot 83$	498	907	$2^2\cdot 227$	908	1319	$2\cdot 659$	1318
151	$2\cdot 3\cdot 5^2$	50	503	$2^3\cdot 3^2\cdot 7$	504	911	$2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$	70	1321	$2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$	660
157	$2\cdot 79$	79	509	$2\cdot 2\cdot 127$	254	919	$2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 17$	102	1327	$2^4\cdot 83$	1328
163	$2^2\cdot 41$	164	521	$2^2\cdot 2\cdot 5\cdot 13$	26	929	$2\cdot 2^4\cdot 29$	464	1361	$2^2\cdot 2^2\cdot 5\cdot 17$	340
167	$2^3\cdot 3\cdot 7$	168	523	$2^2\cdot 131$	524	937	$2\cdot 7\cdot 67$	469	1367	$2^3\cdot 3^2\cdot 19$	1368
173	$2\cdot 3\cdot 29$	87	541	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 3^2\cdot 5$	90	941	$2\cdot 2\cdot 5\cdot 47$	470	1373	$2\cdot 3\cdot 229$	687
179	$2\cdot 89$	178	547	$2^2\cdot 137$	948	947	$2^2\cdot 3\cdot 79$	948	1381	$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 23$	115
181	$2\cdot 2\cdot 3^2\cdot 5$	90	557	$2\cdot 3^2\cdot 31$	31	953	$2\cdot 3^2\cdot 53$	53	1399	$2\cdot 3\cdot 233$	1398
191	$2\cdot 5\cdot 19$	190	563	$2^2\cdot 3\cdot 47$	188	967	$2^3\cdot 11\cdot 11$	88	1409	$2^2\cdot 2^5\cdot 11$	352
193	$2\cdot 97$	97	569	$2\cdot 2^2\cdot 71$	284	971	$2\cdot 5\cdot 97$	970	1423	$2^4\cdot 89$	1424
197	$2\cdot 3^2\cdot 11$	99	571	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 19$	570	977	$2\cdot 3\cdot 163$	163	1427	$2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 17$	84
199	$2\cdot 3^2\cdot 11$	22	577	$2\cdot 17^2$	289	983	$2^3\cdot 3\cdot 41$	984	1429	$22\cdot 3\cdot 7\cdot 17$	714
211	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$	42	587	$2^2\cdot 3\cdot 7^2$	588	991	$2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$	198	1433	$2\cdot 3\cdot 239$	717
223	$2^5\cdot 7$	224	593	$2\cdot 3^3\cdot 11$	297	997	$2\cdot 499$	499	1439	$2\cdot 719$	1438
227	$2^2\cdot 3\cdot 19$	228	599	$2\cdot 13\cdot 23$	598	1009	$2^3\cdot 2\cdot 3^2\cdot 7$	126	1447	$2^3\cdot 181$	1448
229	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 19$	114	601	$2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5^2$	300	1013	$2\cdot 3\cdot 13^2$	507	1451	$2\cdot 5^2\cdot 29$	1450
233	$2\cdot 3^2\cdot 13$	13	607	$2^5\cdot 19$	608	1019	$2\cdot 509$	1018	1453	$2\cdot 727$	727
239	$2\cdot 7\cdot 17$	238	613	$2\cdot 307$	307	1021	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 17$	510	1459	$2\cdot 3^6$	1458
241	$2\cdot 2^3\cdot 3\cdot 5$	120	617	$2\cdot 3\cdot 103$	309	1031	$2\cdot 5\cdot 103$	1030	1471	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2$	490
251	$2\cdot 5^3$	250	619	$2\cdot 3\cdot 103$	206	1033	$2\cdot 11\cdot 47$	517	1481	$2\cdot 2^2\cdot 5\cdot 37$	740
257	$2\cdot 3\cdot 43$	129	631	$2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$	630	1039	$2\cdot 3\cdot 173$	1038	1483	$2^2\cdot 7\cdot 53$	212
263	$2^3\cdot 3\cdot 11$	88	641	$2\cdot 2^6\cdot 5$	320	1049	$2\cdot 2^2\cdot 131$	524	1487	$2^4\cdot 3\cdot 31$	1488
269	$2^2\cdot 67$	67	643	$2^2\cdot 7\cdot 23$	644	1051	$2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7$	1050	1489	$2\cdot 2^3\cdot 3\cdot 31$	744
271	$2\cdot 3^3\cdot 5$	270	647	$2^3\cdot 3^4$	648	1061	$2\cdot 2\cdot 5\cdot 53$	530	1493	$2\cdot 3^2\cdot 83$	747
277	$2\cdot 139$	139	653	$2\cdot 3\cdot 109$	327	1063	$2^3\cdot 7\cdot 19$	1064	1499	$2\cdot 7\cdot 107$	1498
281	$2\cdot 2^2\cdot 5\cdot 7$	28	659	$2\cdot 7\cdot 47$	658	1069	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 89$	534	1511	$2\cdot 5\cdot 151$	302

נוסחות-נסיגה לינאריות הומוגניות ואינהומוגניות

דב ירדן

משפט 1. לסדרה (u_n), המקימת נוסחת-נסיגה לינארית הומוגנית

$$a_0u_n+a_1u_{n-1}+\dots+a_{s-1}u_{n-s+1}+a_su_{n-s}=0, \quad a_0a_s\neq0 \tag{1}$$

מסדר s ולא מסדר קטן מ s, יש גם נוסחת-נסיגה לינארית אינהומוגנית

$$b_0u_n+b_1u_{n-1}+\dots+b_{s-1}u_{n-s+1}+c=0, \quad b_0b_{s-1}\neq0 \tag{2}$$

מסדר $s-1$ וב $c\neq0$, אם ורק אם

$$a_0+\dots+a_s=0.$$

אם נסמן

$$B=\begin{vmatrix} u_n & u_{n-1} & \dots & u_{n-s+1}\\ u_{n+1} & u_n & \dots & u_{n-s+2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{n+s-2} & u_{n+s-3} & \dots & u_{n-1}\\ u_{n+s-1} & u_{n+s-2} & \dots & u_n \end{vmatrix}$$

וב B_i את הדטרמיננטה מסדר s המתקבלת מ B אם מחליפים בה את אברי העמודה ה i באברים 1, יהיה:

$$b_0=B_1,\ \dots,\ b_{s-1}=B_s,\ c=-B.$$

הוכחה. בכדי שתתקים מערכת $s+1$ המשואות ההומוגניות

$$\begin{aligned} &b_0u_n+b_1u_{n-1}+\dots+b_{s-1}u_{n-s+1}+c=0\\ &b_0u_{n+1}+b_1u_n+\dots+b_{s-1}u_{n-s+2}+c=0\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &b_0u_{n+s-1}+b_1u_{n+s-2}+\dots+b_{s-1}u_n+c=0\\ &b_0u_{n+s}+b_1u_{n+s-1}+\dots+b_{s-1}u_{n+1}+c=0 \end{aligned}$$

ב $s+1$ הנעלמים $b_0,\dots,b_{s-1},c$ וב $c\neq0$, צריכה המטריצה של המערכת להיות מדרגה לא-גדולה מ s, זאת-אומרת, צריך להיות

$$0=\begin{vmatrix} u_n & u_{n-1} & \dots & u_{n-s+1} & 1\\ u_{n+1} & u_n & \dots & u_{n-s+2} & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{n+s-1} & u_{n+s-2} & \dots & u_n & 1\\ u_{n+s} & u_{n+s-1} & \dots & u_{n+1} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_n & u_{n-1} & u_{n-s+1} & 1\\ u_{n+1} & u_n & u_{n-s+2} & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{n+s-1} & u_{n+s-2} & u_n & 1\\ 0 & 0 & 0 & a_0+\dots+a_s \end{vmatrix}=$$

$$=B(a_0+\dots+a_s).$$

הדטרמיננטה השניה מתקבלת מן הראשונה לפי (1), אם מכפלים את שורותיה מלמטה למעלה ב

$$a_0,\ \dots,\ a_s$$

בהתאמה, ומחברים את השורות המכופלות לשורה המכופלת התחתונה. הואיל ול (u_n) אין, לפי ההנחה, נוסחת-נסיגה לינארית הומוגנית מסדר קטן יותר, יהיה, לפי משפט Perrin (Comptes Rendus Paris 119,1894,900-3; השוה: Dickson, History of the theory of numbers I ,410), $B\neq0$. מכאן $a_0+\dots+a_s=0$, ודרגת המטריצה של המערכת היא בדיוק s. מכאן נובע משפטנו.

משפט 2. לכל סדרה (u_n), המקימת נוסחת-נסיגה לינארית (2) מסדר $s-1$ יש גם נוסחת-נסיגה לינארית הומוגנית (1) מסדר s, באשר

$$a_i=b_i-b_{i-1}, \quad b_{-1}=b_s=0.$$

הוכחה.

$$a_0u_n+a_1u_{n-1}+\dots+a_{s-1}u_{n-s+1}+a_su_{n-s}=$$

$$(b_0-b_{-1})u_n+(b_1-b_0)u_{n-1}+\dots+(b_{s-1}-b_{s-2})u_{n-s+1}-b_{s-1}u_{n-s}=$$

$$(b_0u_n+b_1u_{n-1}+\dots+b_{s-1}u_{n-s+1}+c)-(b_0u_{n-1}+\dots+b_{s-2}u_{n-s+1}+b_{s-1}u_{n-s}+c)=0-0=0;$$

$$a_0=b_0\neq0; \quad a_s=-b_{s-1}\neq0.$$

משפט 3. לכל סדרה המקימת נוסחת-נסיגה לינארית הומוגנית מסדר s יש גם נוסחת-נסיגה לינארית הומוגנית מכל סדר גבה מ s.

הוכחה. משפט 2 ב $c=0$.

משפט 4. כל סדרה (u_n), המקימת נוסחת-נסיגה לינארית הומוגנית (1) מסדר s וכן את נוסחת-הנסיגה הלינארית הבאה

$$c_0u_n+c_1u_{n-1}+\dots+c_{s-1}u_{n-s+1}+a_su_{n-s}-c=0,\qquad c_0a_s\neq0 \qquad (3)$$

מסדר s, מקימת גם נוסחת-נסיגה לינארית (2) מסדר s-1 אם $b_0b_{s-1}\neq0$, ומסדר קטן מ s-1 אם $b_0b_{s-1}=0$, באשר

$$b_i=a_i-c_i\ .$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}&b_0u_n+\dots+b_{s-1}u_{n-s+1}+c=\\&(a_0-c_0)u_n+\dots+(a_{s-1}-c_{s-1})u_{n-s+1}+c_0u_n+\dots+c_{s-1}u_{n-s+1}+a_su_{n-s}=\\&a_0u_n+\dots+a_su_{n-s}=0.\end{aligned}$$

משפט 5. סדרה (u_n), המקימת נוסחת-נסיגה לינארית הומוגנית (1) מסדר s ולא מסדר קטן מ s, ב $a_0+\dots+a_s\neq0$, אינה מקימת שום נוסחת-נסיגה לינארית אינהומוגנית משום סדר שהוא.

הוכחה. לפי משפט 1 אין (u_n) מקימת נוסחת-נסיגה לינארית אינהומוגנית מסדר s-1, ולפי משפט 2 לא מסדר קטן מ s-1. נניח ש (u_n) מקימת נוסחת-נסיגה לינארית אינהומוגנית מסדר $t>s$ ולא מסדר קטן מ t. לפי משפט 3 מקימת (u_n) גם נוסחת-נסיגה לינארית הומוגנית מסדר t. לכן, לפי משפט 4, מקימת (u_n) נוסחת-נסיגה לינארית אינהומוגנית מסדר t-1, בנגוד להנחתנו.

הערה למאמרו של דב ירדן
"נוסחות-נסיגה לינאריות הומוגניות ואינהומוגניות"

תאודור מוצקין

אם נתונה סידרה $u_0,u_1,\dots$ המקיימת את נוסחת (1) במאמר הנזכר, אז המכפלה הפורמלית של

$$u=u_0+u_1x+u_2x^2+\dots$$

ושל

$$a=a_0+a_1x+\dots+a_sx^s$$

היא רב-איבר

$$f=f_0+\dots+f_{s-1}x^{s-1}$$

שמעלתו קטנה מ s. הרי ש $u=f/a$ היא פונקציה רציונלית, שמעלת מונה קטנה ממעלת מכנה, ושמכנה איננו מתאפס באפס ($a_0\neq0$); ולכל פונקציה כזו מתאימה סידרה כנ"ל. ע"י הרחבת השבר f/a מקבלים נוסחת-נסיגה מכל סדר גדול מ s.

אם נתונה סידרה $u_0,u_1,\dots$ המקיימת את נוסחת (2), אז המכפלה של u ושל

$$b=b_0+\dots+b_{s-1}x^{s-1}$$

צורתה

$$g-cx^{s-1}/(1-g)=g_0+\dots+g_{s-2}x^{s-2}-cx^{s-1}-cx^s-cx^{s+1}-\dots$$

הרי ש

$$u=\frac{g(1-x)-cx^{s-1}}{b(1-x)}$$

היא שוב פונקציה רציונלית כמו קודם (והמקדמים של $b(1-x)$ נותנים את נוסחת-הנסיגה ההומוגנית), רק שהמכנה מתאפס ב $x=1$ והמונה (אם $c\neq0$) לא. התנאי

$$a_0+a_1+\dots+a_s=0$$

מספיק איפוא לקיום נוסחת-נסיגה אינהומוגנית רק אם s הוא הסדר האמתי (שאין להקטינו), כפי שבאמת הוכח במאמרו של דב ירדן (ואז, אם הוא מתקיים, יש נוסחת-נסיגה גם מכל סדר יותר גבה, ואם לא, משום סדר), והדוגמה $1,-1,1,-1,\dots$ בעלת הסקלה ההומוגנית $1,0,-1$ עם סכום 0, אך בלי סקלה אינהומוגנית (כאן $u=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$) תוכיח.

על מערכת אכסיומות של ב. גרמנסקי לבסוס תורת המספרים הטבעיים

קורט בינג

(המשך מעמוד 28)

III

כדי להוכיח שאת מערכת האכסיומות Γ אפשר לגזור ממערכת האכסיומות Π, אנו יוצאים מהמערכת Π. לשם הוכחה ישמשו, מלבד האכסיומות של Π עצמן, כמה משפטים שהם מסקנות מ Π. כולם יצוטטו לפי L 8) הסביא גם את ההוכחות של המשפטים.

כמו ב L, x' יציין את העוקב 9) של איבר x של P 10).

<u>הגדרה 10.</u> יהיה $x,y \in P$. היחס ySx יתקיים אז ורק אז, אם $y=x'$ או $x=y'$.

<u>הערה.</u> תוצאה מידית מהגדרה 10 היא:

(VII) $x'Sx \; ; \; xSx'$.

<u>משפט 16.</u> הקבוצה P שהיא עצם ראשוני של Π ומקיימת את Π, מקיימת גם את Γ. אם נציב ב Γ במקום הקבוצה G את הקבוצה P, במקום העצם 1 את האיבר 1 של P, ובמקום היחס R את היחס S המוגדר ב P, האכסיומות של Γ נהפכות למסקנות מן Π.

<u>הוכחה.</u>

1. $1 \in P$.

טענה זו נכונה לפי אכסיומה 1 של Π (11).

2. אם $1 \in P$, אז יש בדיוק איבר אחד u של P כך שקיים: $uS1$.
כי לפי אכסיומה 2 (11) ישנו איבר u של P עם $u=1'$; לכן, לפי הגדרה 10, $uS1$. אם, להפך, $yS1$, אז, לפי אכסיומה 3 (11), $y' \neq 1$. לכן, לפי הגדרה 10, $y=1'$, ומזה נובע, לפי אכסיומה 2 (11), ש $y=u$.

3. אם $x \in P$, $x \neq 1$, אז ישנם בדיוק שני איברים u,v של P כך שקיים: $uSx \; ; \; vSx$.

כי יהיה x איבר של P השונה מן 1. אז קיים על סמך אכסיומה 2 (11):

(1) יש בדיוק איבר אחד u של P כך ש $u=x'$.

לפי משפט 3 (12) ואכסיומה 4 (11) נכון גם:

(2) יש בדיוק איבר אחד v של P כך ש $x=v'$.

לפי הגדרה 10, u הנזכר ב (1) מקיים את הנוסחה uSx, ו v הנזכר ב (2) מקיים את הנוסחה vSx.

קיים גם $u \neq v$, כי לפי משפט 7 (13), משפט 6 (13) ומשפט 4 (14) קיים:

(3) $(x')'=(x+1)'=x+1'=1'+x \neq x$;

מזה והגדרת u ו v על ידי (1) ו (2) נובע:

(4) $u' \neq v'$,

ולכן, לפי אכסיומה 2 (11), $u \neq v$.

לבסוף, אם ySx, נובע מהגדרה 10 שאו $y=x'$ או $x=y'$. במקרה הראשון נובע מן (1) ש $y=u$; במקרה השני נובע מן (2) $y=v$.

4. מן ySx נובע $x \neq y$.
כי אם ySx, קיים או $y=x'$ או $x=y'$. לפי משפט 2 (15), קיים במקרה הראשון $y=x' \neq x$ ובמקרה השני $x=y' \neq y$.

5. מן ySx נובע xSy.
כי המגדיר של היחס S (הגדרה 10) הוא סימטרי במקומות היחס.

---

8) ראה הערה 2), ע' 21.
9) L, ע' 2, אכסיומה 2.
10) ראה הערה 3), ע' 21.
11) L, ע' 2.
12) L, ע' 3.
13) L, ע' 6.
14) L, ע' 4.
15) L, ע' 3.

6. אם A ו B הן קבוצות חלקיות לא-ריקות של P המקיימות $A.B=0$, $A+B=P$, אז ישנם איברים x ו y של P כך שקיימים: $x\varepsilon A$; $y\varepsilon B$; ySx או xSy.

כי קיים אחד המקרים $1\varepsilon A$, $1\varepsilon B$.

יהיה $1\varepsilon A$. היות ו A היא קבוצה חלקית אמיתית של P, נובע מאכסיומה 5 (16) ו $1\varepsilon A$ שישנו איבר x של A כך שקיים $x' \text{ non}\varepsilon A$. לכן $x'\varepsilon B$. לפי הגדרה 10, (VII), קיים $x'Sx$. נשים $x'=y$, אז ל x ו y ישנן כל התכונות הדרושות.

אם $1\varepsilon B$, יוצא כמו במקרה הקודם, הקיום של איברים $\bar{x}$ ו $\bar{y}$ של P כך ש $\bar{x}\varepsilon B$, $\bar{y}\varepsilon A$, $\bar{y}S\bar{x}$. אם נשים $\bar{y}=x$, $\bar{x}=y$, אז גם במקרה זה x ו y הן בעלות כל התכונות הדרושות.

IV

מן המשפטים 15 ו 16 נובע שמערכת האכסיומות Γ היא אקוּיוולנטית למערכת האכסיומות Π.
ממשפט 15 לבד נובע שגם המערכת Γ יכולה לבסס את תורת המספרים הטבעיים;
ממשפט 16 לבד נובע שאם המערכת Π היא חפה מסתירה, אז גם Γ היא חפה מסתירה.

יש עוד לענות על השאלה האם כל אכסיומה של Γ היא בלתי תלויה בשאר האכסיומות של Γ. כדי להוכיח אי-תלות זו, יהיה מספיק להראות, שלכל אכסיומה i מתוך Γ אפשר לבנות מערכת של עצמים יסודיים G_i, 1_i ו R_i (17) בעלי התכונות הבאות: אם מציבים ב Γ, במקום G, 1 ו R, את G_i, 1_i ו R_i, אז הם מקיימים, על סמך מערכת אכסיומות חפה מסתירה Δ_i, את כל האכסיומות של Γ מלבד i, יחד עם השלילה של i. - בתור Δ_i בודאי תספיק בכל המקרים, תורת החבורה האדיטיבית של המספרים השלמים; ואנו מניחים שתורה זו היא חפה מסתירה. G_i, 1_i ו R_i יצויינו בכל מקרה על ידי G, 1 ו R, כי לא תהיה אפשרות של טעות.

<u>משפט 17.</u> האכסיומה 1 של Γ היא בלתי תלויה בשאר האכסיומות של Γ.

<u>הוכחה.</u> נבחר כ G את קבוצת המספרים 2, 3, 4, כ 1 את המספר 1 וכ R את היחס הבא:

<u>הגדרה 11.</u> yRx יתקיים אז ורק אז אם $x,y\varepsilon G$ ו $x\neq y$. - אז ברור ש G, 1 ו R מקיימים את האכסיומות 2 (קיום ריק), 4 ו 5. מתקיימת גם האכסיומה 3, כי לכל איבר x של G ישנם בדיוק שני איברים של G השונים מן x. נכונה האכסיומה 6, כי אם A ו B מקיימים את התנאים של אכסיומה 6, אז יש איבר x ב A ואיבר y ב B, ו $x\neq y$. לבסוף, ברור שקיימת השלילה של אכסיומה 1.

<u>משפט 18.</u> האכסיומה 2 של Γ היא בלתי תלויה בשאר האכסיומות של Γ.

<u>הוכחה.</u> נבחר כ G את קבוצת המספרים 1, 2, 3, כ 1 את המספר 1, וכ R את היחס המוגדר בהגדרה 11. ברור שנכונה אז האכסיומה 1, וגם האכסיומה 3. באותו אפן כמו בהוכחה הקודמת רואים שמתקיימות האכסיומות 4, 5 ו 6. קיימת גם השלילה של אכסיומה 2, כי $1\varepsilon G$, ו 2 ו 3 הם שני איברים שונים זה מזה של G העומדים ביחס R עם 1.

<u>משפט 19.</u> האכסיומה 3 של Γ היא בלתי תלויה בשאר האכסיומות של Γ.

<u>הוכחה.</u> נבחר כ G את קבוצת המספרים 1 ו 2, כ 1 את המספר 1, וכ R את היחס המוגדר בהגדרה 11. אז ברור שקיימות האכסיומות 1, 2, 4, 5, 6. קיימת גם השלילה של אכסיומה 3, כי $2\varepsilon G$, $1\neq 2$, ויש בדיוק איבר אחד של G השונה מ 2.

<u>משפט 20.</u> האכסיומה 4 של Γ היא בלתי תלויה בשאר האכסיומות של Γ.

<u>הוכחה.</u> נבחר כ G את החבורה האדיטיבית של מחלקות הקונגרואנציה mod 2, כ 1 את המחלקה $\bar{1}$ המכילה את המספר 1, וכ R את היחס הבא:

<u>הגדרה 12.</u> yRx יתקיים אז ורק אז אם: $x,y\varepsilon G$; $y+y=x$ או $x+x=y$. - אז ברור שקיימת אכסיומה 1. קיימת האכסיומה 2, כי אם $x=\bar{1}$, אז $\bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$, לכן $\bar{0}R\bar{1}$. אבל $\bar{1}+\bar{1}\neq\bar{1}$, לכן $\bar{1} \text{ non } R\bar{1}$. קיימת אכסיומה 3, כי אם $x\varepsilon G$, $x\neq 1$, אז $x=\bar{0}$. היות וקיים: $\bar{0}+\bar{0}=\bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$, נכון גם $\bar{0}R\bar{0}$ וגם $\bar{1}R\bar{0}$. קיימת אכסיומה 5, כי בהגדרה 12 המגדיר של היחס R הוא סימטרי במקומות היחס. קיימת האכסיומה 6, כי אם A ו B מקיימים את התנאים של אכסיומה 6, אז האיבר היחידי y של B הוא שונה מן האיבר היחידי x של A, ואז, לפי הוכחת

---

16) L, ע' 2.
17) השוה מערכת האכסיומות Γ, ע' 21.

האכסיומה 2 ולפי אכסיומה 5, קיים yRx.

לבסוף, קיימת השלילה של אכסיומה 4, כי $\bar{0}R\bar{0}$ ו $\bar{0}=\bar{0}$.

<u>משפט 21.</u> האכסיומה 5 של Γ היא בלתי תלויה בשאר האכסיומות של Γ.

<u>הוכחה.</u> נבחר כ G את קבוצת המספרים 1, 2, 3, כ 1 את המספר 1, וכ R את היחס הבא:

<u>הגדרה 13.</u> yRx יתקיים אז ורק אז אם $x,y\in G$ וקיים אחד המקרים הבאים:

(1) ;x=1 y=2 .
(2) ;x=2 y=3 או y=1 .
(3) ;x=3 y=1 או y=2 .

אז נכונה האכסיומה 1.

מהגדרה 13 נובע, שקיימות האכסיומות 2, 3 ו 4.

קיימת האכסיומה 6, כי אם A ו B מקיימים את התנאים של אכסיומה 6, אז או A או B מכיל בדיוק איבר אחד. אם A מכיל בדיוק איבר אחד, x , אז על סמך האכסיומות 2 ו 3 יש $y\in G$ עם yRx, ולפי אכסיומה 4, yRx גורר אחריו $x\neq y$. לכן $y\in B$. x ו y הן בעלות התכונות הבאות:

(4) $x\in A$; $y\in B$; yRx . 18)

אם B מכיל בדיוק איבר אחד, y , אז יש, לפי הגדרה 13, איבר x של G כך ש yRx, ולפי אכסיומה 4, $x\neq y$. לכן $x\in A$, ו x ו y מקיימים את (4) גם במקרה זה.

לבסוף, קיימת השלילה של אכסיומה 5, כי לפי הגדרה 13, (3), (1) ו (2), נכון גם 1R3 וגם 3 non R1.

<u>משפט 22.</u> האכסיומה 6 של Γ היא בלתי תלויה בשאר האכסיומות של Γ.

<u>הוכחה.</u> נבחר כ G את הקבוצה המכילה את המספרים החיוביים האי-זוגיים ואת המספרים השלמים הזוגיים: $G=\{+1,+3,\ldots,\ldots,-2,0,+2,\ldots\}$
נבחר כ 1 את המספר 1+, וכ R את היחס הבא:

<u>הגדרה 14.</u> yRx יתקיים אז ורק אז, אם $x,y\in G$ ו $|y-x|=2$.

– בתנאים אלה תתקיים האכסיומה 1.

חשבונות פשוטים מראים שקיימות גם האכסיומות 2, 3, 4 ו 5.

קיימת השלילה של אכסיומה 6. כי תהיה A קבוצת המספרים החיוביים האי-זוגיים, ו B קבוצת המספרים השלמים הזוגיים. אז A ו B מקיימים את כל התנאים של אכסיומה 6. מצד שני, אם $x,y\in G$, $x\in A$, $y\in B$, אז $|y-x|$ הוא אי-זוגי, לכן y non Rx, ולפי אכסיומה 5 גם x non Ry.

המשפטים 17–22 נותנים כתוצאה:

<u>משפט 23.</u> האכסיומות 1–6 אשר העצמים הראשוניים שב Γ, G, 1 ו R, מקיימים אותן, הן בלתי תלויות זו בזו.

<u>הערה למשפט 23.</u> במקום האכסיומה 6 שב Γ אפשר לדרוש אכסיומה 6^* יותר חריפה, היינו את הקיום של משפט 1 (19). מקבלים כך מערכת אכסיומות חדשה Γ^*. האכסיומה 6^* נובעת מן האכסיומות 5 ו 6 (20), והיא גוררת אחריה את האכסיומה 6; ויש לשאול אם במערכת Γ^* ישנה כבר אכסיומה (למשל האכסיומה 5) הנובעת משאר האכסיומות של Γ^*. התשובה היא שלילית; קיים המשפט הבא:

<u>משפט 24.</u> האכסיומות 1, 2, 3, 4, 5, 6^* אשר העצמים הראשוניים שב Γ^* (21), G, 1 ו R, מקיימים אותן, הן בלתי תלויות זו בזו.

<u>הוכחה.</u> א) אם i היא אחת האכסיומות 1–4 של Γ^*, אז ברור שהיא בלתי תלויה ביתר האכסיומות של Γ^*. כי לפי משפט 23, i היא בלתי תלויה באכסיומות של Γ השונות מן i, ומהן מקבלים את האכסיומות של Γ^* השונות מן i על ידי כך שמחליפים את האכסיומות 5 ו 6 של Γ בתוצאות שלהן, היינו האכסיומות 5 ו 6^* (21).

ב) ברור גם שהאכסיומה 6^* היא בלתי תלויה באכסיומות 1–5 של Γ^*. כי לפי משפט 23, האכסיומה 6 היא בלתי תלויה באכסיומות 1–5 של Γ^*, ולפי ההערה למשפט 23, אכסיומה 6 היא תוצאה של אכסיומה 6^*.

- -

18) העובדה שקיים yRx, ולא רק: yRx או xRy, מאפשרת את ההוכחה של טענה יותר חזקה מאשר אי-תלות המערכת Γ. ראה משפט 24.
19) ראה ע' 22.
20) ראה משפט 1, ע' 22.
21) ראה הערה למשפט 23.

ג) לבסוף, גם האכסיומה 5 של Γ^* היא בלתי תלויה בשאר האכסיומות של Γ^*. כי לפי ההוכחה של משפט 21, העצמים G, 1 ו R המוגדרים שם מקיימים את האכסיומות 1-4 של Γ^*. לפי נוסחה (4) של אותה הוכחה, הם מקיימים גם את האכסיומה 6^* של Γ^*; והם מקיימים את השלילה של אכסיומה 5.

המספרים $an+b$ בעלי מחלק ראשוני מאותה צורה

זבולון שוכמן

ידידי, מר דב ירדן, הציג ברבעון למתמטיקה כרך 1 עמוד 20 את הבעיה הבאה:

ידוע כי לכל מספר טבעי > 1 מצורת n, $2n-1$, $3n-1$, $4n-1$, $6n-1$ (n טבעי) יש לפחות מחלק ראשוני אחד מאותה צורה. האין אלה כל הצורות הלינאריות בעלות תכונה זו?

התשובה היא חיובית: אין צורות לינאריות $an+b$ אחרות, מחוץ לנזכרות, בעלות התכונה הנדרשת. בהוכחה נוכל להניח כי a, b, n הם מספרים טבעיים ו $b<a$. מן הדרישה שמחלק ראשוני של $an+b$ יהיה מאותה צורה נובע גם כי $(a,b)=1$.

נברר קדם את המקרה כאשר $b<a-1$, ולכן $a>2$. אז $-b\not\equiv b(a)$, כי מ $-b\equiv b(a)$ יוצא $a|2b$. אך $(a,b)=1$, לכן $a|2$, מה שלא יתכן. נקח עתה מספר ראשוני p מהסדרה $an-b$, וכזה ישנו, כי $(a,b)=1$, וכן מספר ראשוני q מהסדרה $an-1$. pq הוא מהצורה $an+b$, אולם לא p ולא q הם מהצורה $an+b$.

נשאר עוד המקרה $b=a-1$. כאשר a הוא 2, 3, 4 או 6 מקבלים צורות לינאריות המנויות בבעיה. בכל מקרה אחר נוכל לבחור במספר ראשוני p הקטן מ $a-1$ וזר ל a. מספר כזה קים כי a מכיל או גורם ראשוני הגדול מ 3, או את הגורם 3 בחזקה גבהה מ 1, או את הגורם 2 בחזקה גבהה מ 2, או $a=12$.

$\varphi(12)=4$, ובכל יתר המקרים יהיה, אם $a=p_1^{\alpha_1}\dots$ הוא התאור הקנוני של a, $\varphi(a)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\dots>3$. פרוש הדבר, שבין 1 ו $a-1$ יש עוד מספר זר ל a, וגורם ראשוני שלו p ימלא את דרישתנו*). ועתה נתבונן בקונגרואנציה $px\equiv-1\ (a)$. יש לה פתרון ב x, כי $(a,p)=1$. יהא הפתרון r, ויהא $0<r<a$. ברור כי $r\not\equiv-1\ (a)$. אחרת היתה הקונגרואנציה נותנת $a|p-1$, בעוד ש $p<a$. כן ברור כי $(a,r)=1$. ועתה נקח מספר ראשוני q די גדול מהצורה $an+r$, ונתבונן במכפלה pq. נקבל: $pq=p(an+r)\equiv pr\equiv-1\ (a)$. אבל גם p וגם q אינם מצורה זאת.

- -

*) מספר p זה הוצע על-ידי דב ירדן. לכתחלה לקחתי כ p את המספר הראשוני הגדול ביותר הקטן מ $a-1$. אז קים $(a,p)=1$. כי מ $(a,p)>1$ יוצא $p|a$ ומכאן $a\geq 2p$. אבל p זה, לפי הגדרתו ולפי ההנחה ש $a>6$, לפחות 5, ולפי משפט ברטרן-צ'בישב בין p ו $a-2$ (הגדול או שוה ל $2p-2$) יהיה מספר ראשוני הגדול מ p, מה שמתנגד להגדרת p.

בעירת, תצפירת ותשערות

(המשך מעמוד 20)

11. תהיינה A_0, B_0, C_0, D_0 4 נקודות במישור; ביחד תקראנה הרביעיה Q_0. תהי D_1 התמונה ההפכית של D_0 לגבי המעגל M דרך A_0, B_0, C_0 (כלומר נקֻודת-החתוך של כל מעגלים דרך D_0, המאונכים ל M), ותֻגדרנה A_1, B_1, C_1 באפן דומה: התקבלה רביעיה חדשה Q_1. מ Q_1 אפשר לקבל Q_2, וכו'. באיזו מדה מֻגדר Q_{-1}? איך מתנהג Q_n כש n גדל? ת' מוצקין

12. בתוך משולש מישורי ABC נמצאות נקודות X ו Y כך שהמשולשים ABX, AXY, AYC והמרובע $BXYC$ הם שוי-שטח. מצא את הקשר בין X ו Y.
ת' מוצקין

13. מהו תנאי נחוץ ומספיק לקיום ארבעון בעל שטחי פאות נתונים? האם מספיק שכל שטח יהיה קטן מסכום האחרים? ד' ירדן

14. השערה. הארבעון קטן-סכום-ארכי-המקצעות נתון הנפח הוא ארבעון משוכלל. ד' ירדן

15. מהו מספר-המינימום של ארבעונים, שלהם אפשר לפרק פאון נתון? ד' ירדן