מהמערכת

שמחנו לקבל תגובות ראשונות לתכן החוברות שהופיעו עד כאן.

מרבית ההערות הן שהחומר בגליונות הוא יותר מדי קשה.

המערכת מוצאת לנכון לציין בקשר לכך את הדברים הבאים:

"גליונות מתמטיקה" אינם מיועדים לשמש כעתון לבדור מתמטי. אמנם בכל חוברת מופיעות שאלות אחדות בעלות אופי של חידות ונשמח גם לפרסם מאמרים בכוון זה, אבל את עיקר תפקידנו אנו רואים בקרוב תורת המתמטיקה לתלמידי בתי ספר תיכוניים ולחובבים. כדי להשיג זאת אנו משתדלים לפרסם מאמרים שיתנו לקורא את המושג במה עוסקת המתמטיקה המודרנית ומהן שיטותיה ואמצעיה.

המערכת שוקדת בשתוף פעולה עם המחברים על הקנית צורה קלה למאמרים, אולם כאשר הברירה היא בין קלות לבין דיוק נבחר בדבר השני.

ה"גליונות" מיועדים לחוג רחב של קוראים השונים בהכנתם ובהתענינותם. תלמיד כתה י"ב שענינו העיקרי במתמטיקה מחפש בחוברה הגליונות דברים שונים לגמרי מתלמיד אשר רק מתחיל להתענין במקצוע זה.

המערכת לא תמנע, איפוא, מלהכליל בעתון יחד עם חומר קל יותר גם מאמרים המציגים נושאים חשובים, אף אם הם יכולים להיות מובנים רק לחלק מהקוראים. אחרים יוכלו לחזור לקריאת מאמר כזה כעבור תקופה מסוימת, כאשר הכנתם לכך תהיה טובה יותר.

נקצה ברצון מקום לכל הבעת דעה בנדון. נבקש מהקוראים אשר מסכימים שדבריהם יודפסו במסגרת זו לציין זאת במכתביהם.

פגישה עם הקוראים

המערכת מתכוננת לארגן פגישות עם קוראי הגליונות.

הפגישה הראשונה תתקיים ביום רביעי 8.3.61
בשעות 21.00 - 18.00 בבית ספר תיכון עירוני א', רח' בכורי העתים 12, תל-אביב.

לפגישה מוזמנים כל קוראי הגליונות מתל-אביב והסביבה.

בתכנית הערב:

מספר הרצאות קצרות (25 - 20 דקות כל אחת) בנושאים מתמטיים שונים, בעיות עם פתרונות, ויכוח והחלפת דעות.

אחרי נסיון ראשון זה אנו מקוים לארגן פגישות דומות גם במקומות אחרים בארץ ובהמשך אף פגישה ארצית.

אנו מקוים שקוראי הגליונות יתפנו בתאריך זה ונוכל ליהנות בצותא מערב מתמטי.

תחרות במתמטיקה מטעם הפקולטה למדעים של הטכניון

כפי שמודיעים לנו תתקיים גם השנה התחרות במתמטיקה מטעם הפקולטה למדעים של הטכניון.

התחרות תתקיים בל"ג בעומר והיא מכוונת לתלמידי הכתות המסיימות בבתי-הספר התיכוניים בארץ.

הפרס לזוכה הוא סטיפנדית למוד בפקולטה למדעים בטכניון בגובה של -.600 ל"י, סטיפנדיה זו הועמדה לרשות המפעל ע"י פרופ' ירמיהו גרוסמן.

התחרות תאורגן במתכונת התחרות שהתקיימה לפני שנה (דו"ח על תחרות זו יחד עם השאלות שהוצגו הופיע ב"גליונות מתמטיקה" מס' 2 עמוד 57).

חוזרים על התחרות וצורתה הארגונית ישלחו בעוד מועד לכל בתי הספר התיכוניים בארץ.

בעיה ופתרונה

ההתרות של שאלות אלה נמצאות בעמוד 104
בטרם תפנה לשם, נסה את כוחך.

1. א). במאמרו של פרופ' ע. ז'בוטינסקי: "המספרים הפתגוריים והמספרים המעוקבים הדומים להם" בעמוד 99 של חוברת זו הוכח שעבור כל m ו- n שלמים שלשת המספרים

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2 \qquad (1)$$

מהוים שלישיה פתגורית, ז.א. מקיימים את המשואה:

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (2)$$

הוכח שכל הפתרונות השלמים היסודיים של המשואה (2),
ז.א. הפתרונות שעבורם x ו- y מספרים זרים זה לזה,
מתקבלים מתוך השויונות (1), כאשר m ו- n מספרים
שלמים.

ב).הוכח שכל פתרון המשואה (2) במספרים שלמים מתקבל ע"י
הכפלת אחד הפתרונות היסודיים הנ"ל במספר שלם מתאים.

2. הוכח: משלש בעל שני חוצי זויות שוים הוא משלש שוה-שוקיים.

המספרים הפיתגוריים

והמספרים המעוקבים הדומים להם *).

ערי ז'בוטינסקי

א. המספרים הפיתגוריים

השויון המפורסם

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad (1)$$

הוא דוגמא אחת לשלישיות הרבות של מספרים שלמים a, b, c
המקיימים את המשואה

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (2)$$

שלישית מספרים כזו נקראת שלישיה פיתגורית (או מספרי פתגורס)
מ-(1) נובע מיד שעבור כל k שלם קיים גם:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

כלומר כל השלישיות

$$a = 3k, \quad b = 4k, \quad c = 5k \qquad (3)$$

הן שלישיות פתגוריות.

אולם ידועות עוד דוגמאות רבות של שלישיות פתגוריות שאינן
מהצורה (3) וגם אינן מתקבלות אחת מהשניה ע"י הכפלה במספר שלם.
לדוגמה

$$5^2 + 12^2 = 13^2 \quad ; \quad 8^2 + 15^2 = 17^2 \qquad (4)$$

יתר על כן, אם נבחר שני מספרים שלמים m ו- n כלשהם הרי
השלישיה

*)מאמר זה פרט לשנויים קלים פורסם ב"דפים למתמטיקה ולפיסיקה"
כרך ב' חוברת א' פברואר 1946.

$$a = m^2 - n^2, \qquad b = 2mn, \qquad c = m^2 + n^2 \tag{5}$$

תהיה שלישיה פתגורית, ובאמת *):

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^2 = (m^2 + n^2)^2 \tag{6}$$

נניח למשל $m = 2,\ n = 1$. מקבלים $a = 3;\ b = 4;\ c = 5$

ז.א. את השלישיה (1). כאשר מניחים $m = 3;\ n = 2$

ו- $m = 4,\ n = 1$

מקבלים את השלישיות שב-(4)

אם נקבע $m=3, n=1$ נקבל את הפתרון $8^2 + 6^2 = 10^2$

ועבור $n = 2$, $m = 4$ את $12^2 + 16^2 = 20^2$. שתי שלישיות אלו שייכות למשפחה (3) (יש להניח ב(3) $k = 2$ ו-$k = 4$).

שלישיות חדשות ממש נקבל, כאשר נבחר בשני מספרים m ו- n זרים זה לזה, שאחד מהם זוגי והשני אי-זוגי. כך למשל עבור $n = 4$, $m = 7$ נקבל

$$33^2 + 56^2 = 65^2 \tag{7}$$

שויון שכבר די קשה היה למצא פשוט ע"י נסיונות.

ב. המספרים המעוקבים.

בדומה לנ"ל מעורר השויון

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \tag{8}$$

את השאלה, האם קיימות מערכות נוספות של ארבעה מספרים המקיימים את המשואה:

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3 \tag{9}$$

מובן, כמו במקרה של השלישיות הפתגוריות, שמ-(8) אפשר לבנות רביעיות כנ"ל לפי:

$$a = 3k,\ b = 4k,\ c = 5k,\ d = 6k \tag{10}$$

אולם גם כאן ידוע שיש אינסוף פתרונות שאינם מתקבלים מ-(10).

---

*) כאן הוכח שכל שלישיה (5) היא פתגורית. מתברר שגם להיפך, כל שלישיה פתגורית נתנת לתאור ע"י (5). ראה בקשר לכך את השאלה מס' 1 במדור "בעיה ופתרונה" שבחוברת זו.

לדוגמה:

$$1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3 \quad ; \; (-1)^3 + 9^3 + 10^3 = 12^3 \qquad (11)$$

הדוגמה האחרונה מראה, אגב, על הבדל יסודי בין הבעיה האחרונה לבין זו של מספרי פתגורס.

גם בבעיה הקודמת אפשר היה לתת ערכים שליליים למספרים a,b,c, אך זה לא היה משנה כלום, היות ו- $(-a)^2 = a^2$

במקרה של החזקות השלישיות המצב שונה כי $(-a)^3 = -a^3$

לכן אם נסכים גם לרביעיות עם מספרים שליליים, נגדיל את מספר הפתרונות האפשריים. במקרה זה אפשר גם לנסח את הבעיה באופן הרבה יותר סמטרי:

יש למצוא ארבעה מספרים שלמים (חיוביים, שליליים או 0) A, B, C, D המקיימים את המשואה:

$$A^3 + B^3 + C^3 + D^3 = 0 \qquad (12)$$

הדוגמה (8), למשל, תכתב כעת בצורה הבאה:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + (-6)^3 = 0 \qquad (13)$$

ישנם פתרונות עוד יותר פשוטים כגון: $1^3 + (-1)^3 + 2^3 + (-2)^3 = 0$

או באופן כללי, אם m ו- n הם שני מספרים שלמים, קיים הפתרון

$$m^3 + (-m)^3 + n^3 + (-n)^3 = 0 \qquad (14)$$

פתרונות אלה הנקראים טריביאליים אינם מעניינים ביותר ולא נטפל בהם בהמשך (אגב, לבעיה הפתגורית אין פתרונות טריביאליים ממין זה!).

המתמטיקאי ההודי רמנוג'ן (Ramanujan) מצא נוסחה המאפשרת למצא מספר אינסופי של פתרונות לא טריביאליים, הדומה במדה רבה לנוסחה (5). וזו נוסחת רמנוג'ן:

$$A = 3m^2 - 5mn - 5n^2 \qquad B = 4m^2 + 4mn + 6n^2$$

$$(15)$$

$$C = 5m^2 + 5mn - 3n^2 \qquad D = -6m^2 - 4mn - 4n^2$$

להלן מספר דוגמאות לפתרונות המתקבלים בעזרת נוסחה זו:

$$m = 1;\ n = 0;\quad A = 3;\quad B = 4;\ C = 5;\ D = -6$$

$$m = 2;\ n = 1;\quad A = -3;\quad B = 30;\ C = 27;\ D = -36 \qquad (16)$$

$$m = 3;\ n = -2;\quad A = 37;\quad B = 36;\ C = 3;\ D = -46$$

בדוגמה הראשונה קבלנו את המספרים שב-(13). את הרביעיה השניה אפשר היה לקבל ע"י הכפלה ב-3 של המספרים שבדוגמה השניה של (1). את הרביעיה השלישית המקיימת את השויון

$$3^3 + 36^3 + 37^3 = 46^3$$

לגמרי לא קל לנחש.

את נכונות הנוסחה (15) לא קשה לבדוק באופן ישיר בדומה לבדיקה (6) ונמליץ בפני הקוראים לבצע בדיקה זו. *)

ג. איך מוצאים נוסחות כגון זו של רמנוג'ן.

בהרבה יותר מענינת מהוכחת הנוסחה היא השאלה איך הגיע אליה רמנוג'ן. אינני יודע איך הוא עשה זאת, אך נסיתי להתחקות על צעדיו האפשריים ואנסה בהמשך להסביר איך לדעתי הגיע רמנוג'ן לתוצאותו.

נניח שאנו מכירים שני פתרונות שונים של הבעיה:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + d^3 &= 0 \\ a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 + d_1^3 &= 0 \end{aligned} \qquad (18)$$

נחפש שני מספרים x ו- y כך שהמערכת

$$A = xa + ya_1 \quad ,\ B = xb + yb_1\ ;\ C = xc + yc_1\ ; D=xd+yd_1 \qquad (19)$$

תהוה גם היא פתרון של המשואה (12).

נעלה את המספרים (19) בחזקה שלישית נחבר את התוצאות ונשוה את הסכום ל-0, מקבלים:

$$\begin{aligned} &x^3(a^3+b^3+c^3+d^3) + 3x^2y(a^2a_1 + b^2b_1 + c^2c_1 + d^2d_1) + \\ &+3xy^2(aa_1^2 + bb_1^2 + cc_1^2 + dd_1^2) + y^3(a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 + d_1^3) = 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

*) מן הראוי לציין שבנגוד לנוסחה (5), שכאמור, נתנה את כל השלישיות הפתגוריות היסודיות, הנוסחה (15) לא מכסה את כל הפתרונות של (12).

הסכומים המכפילים את x^3 ו- y^3 ב(20) שוים לפי (18) ל-0.
מ-(20) מקבלים, איפוא:

$$3xy\left[x(a^2a_1 + b^2b_1 + c^2c_1 + d^2d_1) + y(aa_1^2 + bb_1^2 + cc_1^2 + dd_1^2)\right] = 0 \qquad (21)$$

משואה זו אפשר בודאי לספק, אם קובעים:

$$\begin{aligned} x &= -(aa_1^2 + bb_1^2 + cc_1^2 + dd_1^2) ; \\ y &= a^2a_1 + b^2b_1 + c^2c_1 + d^2d_1 \end{aligned} \qquad (22)$$

כאשר מציבים ערכים אלה של x ו- y ל-(19) מקבלים רביעיה חדשה A, B, C, D המהוה פתרון.

כמו במקומות רבים אחרים בתורת המספרים, כך גם כאן תכסיס בלתי צפוי שכנראה השתמש בו רמנוג׳ן לפתרון הבעיה.

נבחר עבור הפתרון $a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 + d_1^3 = 0$
את הפתרון הטריביאלי (14):

$$m^3 + (-m)^3 + n^3 + (-n)^3 = 0$$

במלים אחרות נניח:

$$a_1 = m, \; b_1 = -m, \; c_1 = n, \; d_1 = -n \qquad (23)$$

נציב ערכים אלה לתוך (22). מקבלים:

$$\begin{aligned} x &= -(am^2 + bm^2 + cn^2 + dn^2) \\ y &= a^2m - b^2m + c^2n - d^2n \end{aligned} \qquad (24)$$

נציב ערכים אלה של x ו- y לבטויים שב-(19).
מקבלים:

$$\begin{aligned} A &= c(a+c)m^2 + (d-b)(d+b)mn + a(d+b)n^2 \\ B &= b(a+c)m^2 + (c-a)(a+c)mn + d(d+b)n^2 \\ C &= a(a+c)m^2 + (b-d)(d+b)mn + c(d+b)n^2 \\ D &= d(a+c)m^2 + (a-c)(a+c)mn + b(d+b)n^2 \end{aligned} \qquad (25)$$

כעת נציב במקום a, b, c, d ערכים הלקוחים מפתרון לא טריביאלי כלשהו ונקבל אין-סוף נוסחות, כגון נוסחת (14) של רמנוג'ן.

לדוגמה, אם נקבע $a = 3, b = 5, c = 4, d = -6$

נקבל:

$$\begin{aligned} A &= 28\,m^2 + 11\,mn - 3n^2 \\ B &= 35\,m^2 + 7\,mn + 6n^2 \\ C &= 21\,m^2 - 11\,mn + 4n^2 \\ D &= -42m^2 - 7\,mn - 5n^2 \end{aligned} \qquad (26)$$

נמליץ לקורא למצא בדרך זו את הנוסחה (14) של רמנוג'ן. לשם כך יהיה דרוש טריק נוסף: במקום מסוים יהיה צורך להחליף את m ב-$m/2$.

בעיה ופתרונה - פתרונות

את הבעיות ראה בעמוד 98

1. נתחיל את פתרון הבעיה מחלקה השני.

יהיו x_1 , y_1 , z_1 שלשה מספרים שלמים המקיימים $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$

אם x_1 ו- y_1 אינם זרים זה לזה יש להם מחלק משותף מכסימלי, נגיד d .

אזי $x_1 = xd \;; \quad y_1 = yd$

ו- $(xd)^2 + (yd)^2 = z_1^2$

מכאן $z_1^2 = d^2(x^2 + y^2)$, כלומר z_1^2 מתחלק ב- d^2 ומכאן נובע ש- z_1 מתחלק ב- d , כלומר $z_1 = zd$.

יחד עם זה קיים $x^2 + y^2 = z^2$ והשלישיה הפתגורית x_1, y_1, z_1 מתקבלת מהשלישיה x, y, z ע"י הכפלה ב- d . המספרים x ו- y זרים זה לזה כדרוש.

נראה כעת שבכל פתרון x,y,z של (2) *) שבו x ו- y מספרים זרים זה לזה חייב אחד המספרים x או y להיות זוגי.

*) (1) ו-(2) מסמנים את הנוסחות המתאימות שבתכן הבעיה עמ' 98

x ו-y לא יכולים להיות בבירור זוגיים בבת אחת (הם זרים זה לזה!). נניח ששניהם אי־זוגיים: $x = 2h + 1,\ y = 2k + 1$

אזי $x^2 + y^2 = 4h^2 + 4h + 1 + 4k^2 + 4k + 1 = 4(h^2+h+k^2+k) + 2$

סכום רבועים זה הוא מספר זוגי שאינו מתחלק ב-4. (חלוקתו ב-4 התן שארית 2). אבל מספר זוגי שהוא רבוע שלם מוכרח להתחלק ב-4 (אם a^2 זוגי, ו- a שלם, גם a זוגי ומכאן שב- a^2 מופיע הגורם 2 לפחות פעמיים). הסכום הנ"ל $x^2 + y^2$ לא יכול, איפוא, להיות רבוע שלם. כמסקנה מקבלים שכאשר x ו- y זרים זה לזה, אחד משני המספרים, נגיד y, מוכרח להיות זוגי.

נעבור כעת להוכחת החלק הראשון של השאלה.

נניח, איפוא, $x^2 + y^2 = z^2$. מכאן:

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z-x)(z+x) \qquad (3)$$

כאמור, x^2 אי־זוגי ו- y^2 זוגי. ברור מכאן ש- z^2 ואתו גם z מוכרחים להיות אי־זוגיים. מזה נובע ש- $z-x$ ו- $z+x$ הם שני מספרים זוגיים ואפשר לסמן:

$$z + x = 2a,\ z - x = 2b$$

מכאן

$$x = a - b;\quad z = a + b$$

נוכיח ש- a ו-b מספרים זרים זה לזה. ובאמת, נניח של- a ו- b מחלק משותף $g > 1$. אזי גם x וגם z מתחלקים ב- g ו- $y^2 = z^2 - x^2$ מתחלק ב- g^2 . אבל אז גם y מתחלק ב- g בנגוד להנחה ש-x ו- y זרים זה לזה.

הנחנו ש- y זוגי, כלומר $y = 2c$. השויון (3) מקבל את הצורה: $4c^2 = 2a.2b$, כלומר $c^2 = ab$.

כפי שהוכח a ו- b זרים זה לזה ומכפלתם רבוע שלם. מזה נובע מיד שגם a ו- b כל אחד לחוד מוכרח להיות רבוע שלם. (ובאמת, כל גורם ראשוני של c מופיע ב- c^2 מספר זוגי של פעמים, וכיון שגורם כזה יכול להופיע רק באחד משני המספרים הזרים זה לזה a ו- b , הרי כל גורם מופיע ב- a וב- b מספר זוגי של פעמים ומספרים אלה הם רבועים שלמים).

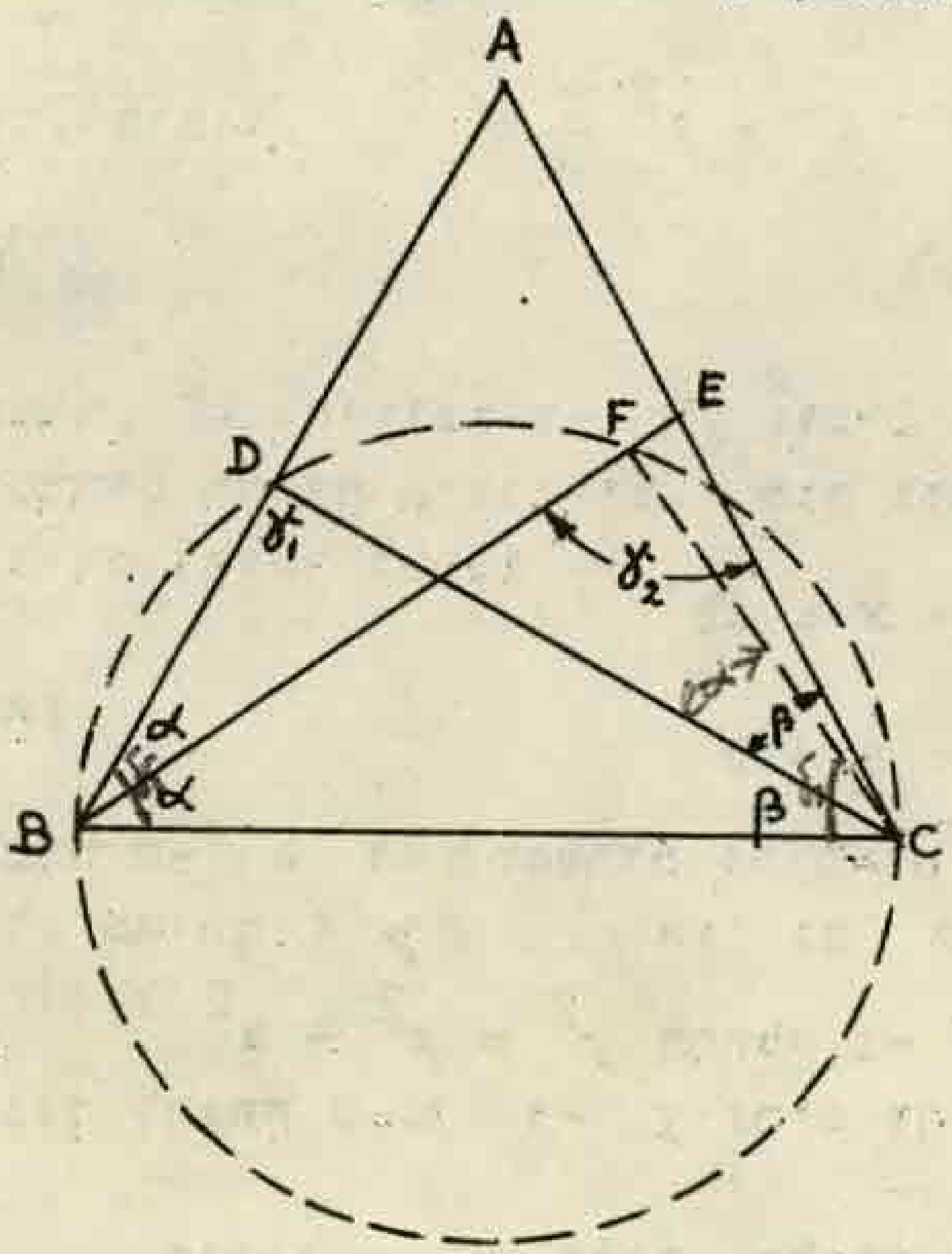
נסמן, איפוא $a = m^2$ ו $b = n^2$. ומכאן:

$$x=a-b=m^2- n^2;y=2c=2\sqrt{ab} = 2mn;\ z = a + b = m^2+n^2$$

ואלה בדיוק השויונות (1).

אגב, מהדיון הנ"ל נובע שכדי לקבל שלישיה פתגורית יסודית יש לבחור בתור m ו- n מספרים זרים זה לזה ולא אי-זוגיים בבת אחת (אחרת $x^2 = m^2 - n^2$ יהיה זוגי). מכאן נובע ישר ש- $y = 2mn$ מתחלק ב-4 ז.א. במשלש ישר זוית ששלש צלעותיו מספרים שלמים אחד הנצבים מתחלק ב-4. (אם זה נכון עבור שלישיה יסודית זה גם נכון עבור כל שלישיה פיתגורית). נשאיר לקוראים להוכיח שלזוגות שונים m ו- n כנ"ל מתאימות גם שלישיות פתגוריות יסודיות x, y, z שונות.

2. הנה פתרון נוסף לבעיה זו המוצע ע"י ש. פרשט, חיפה.



נתון: $BE = CD$

צ.ל.: $\alpha = \beta$

הוכחה: ראה ציור.

נניח $\beta > \alpha$. קיים:

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \alpha$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \beta$$

מכאן: $\gamma_1 > \gamma_2$. נעביר מעגל חוסם למשלש ΔBCD הנקודה E מוכרחה להיות מחוץ למעגל כי $\gamma_1 > \gamma_2$ ו- γ_1 היא זוית היקפית הנשענת עם γ_2 על אותה הקשת.

תהי F נקודת חתוך המעגל עם חוצה הזויה BE . $\sphericalangle DCF = \alpha$ (כי שתיהן נשענות על אותה הקשת DF). השויון האחרון יחד עם $\beta > \alpha$ נותן: $\sphericalangle FCB > \sphericalangle DBC$

ומכאן $BF > DC$ (בין שתי זויות היקפיות חדות לזוית קטנה יותר מתאים מיתר קצר יותר). אבל BF הוא חלק של BE , כך שקבלנו $BE > CD$ שסותר את הנתון. באופן דומה נגיע לסתירה אם נניח $\alpha < \beta$. נשארת האפשרות היחידה $\alpha = \beta$, כלומר המשלש הנתון הוא שוה-שוקיים.

- - - -

גלגלי שיניים

גלגל שיניים בעל 8 שינים מסתובב סביב גלגל שיניים בעל 24 שיניים (שני הגלגלים משולבים). כמה סבובים סביב צירו יעשה הגלגל הקטן תוך כדי סבוב מלא סביב הגדול?

על העתקים של מעגל לתוך עצמו

מ. רייכבך

מבוא. במתמטיקה המודרנית נודעת חשיבות רבה למושגים: העתק, העתק רציף, קבוצה סגורה, קבוצה קשירה.

מטרת מאמר זה היא להסביר באמצעות דוגמאות פשוטות את משמעות המושגים הנ"ל ולהוכיח משפט מסוים כדי להדגים את השמוש בהם.

I. העתקים והעתקים רציפים.

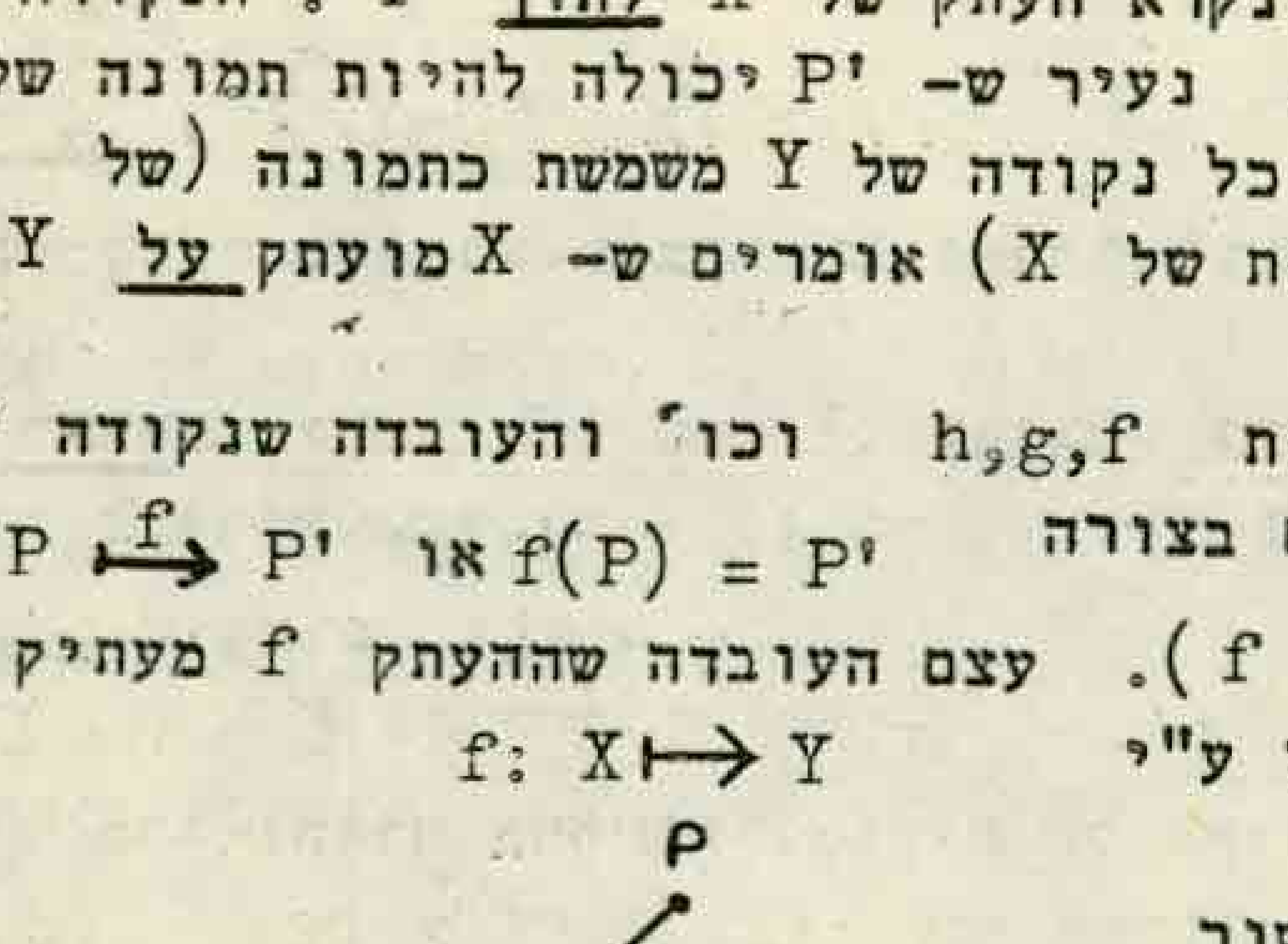
תהינה X ו- Y שתי קבוצות רצוניות שאבריהן יקראו נקודות. את העובדה שהנקודה P שייכת ל- X, למשל, נרשום בצורה $P \in X$. באותו אפן $P' \in Y$ מסמן שהנקודה P' שייכת ל- Y.

במאמר זה נגביל את עצמנו לקבוצות X ו- Y של נקודות במישור. יחד עם זה נציין שבמושגים שיוגדרו אפשר בלי שום שנויים להשתמש גם עבור קבוצות נקודות במרחב או קבוצות כלשהן אחרות.

הגדרת העתק. חוק המתאים לכל נקודה P מתוך X נקודה P' של Y התלויה בדרך כלל ב- P נקרא העתק של X לתוך Y. הנקודה P' נקראת התמונה של הנקודה P. נעיר ש- P' יכולה להיות תמונה של נקודות שונות. אם כל נקודה של Y משמשת כתמונה (של נקודה אחת או של נקודות אחדות של X) אומרים ש- X מועתק על Y.

העתקים יסומנו באותיות h, g, f וכו' והעובדה שנקודה P' היא תמונה של הנקודה P תרשם בצורה $f(P) = P'$ או $P \xmapsto{f} P'$ (במלים: P מועתק על P' ע"י f). עצם העובדה שההעתק f מעתיק את X לתוך (או על) Y תסומן ע"י $f: X \mapsto Y$

דוגמה 1: מערכת קוטבית במישור קושרת לכל נקודה P במישור זוג מספרים: r - מרחק הנקודה P מנקודה קבועה O הנקראת הקטב; θ - הזוית (הנמדדת נגד כוון השעון) בין כוון הציר הקטבי OX לבין הקטע המחבר O עם P. (ראה ציור מס' 1).



ציור מס.1

לפי ההגדרה $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq r < \infty$.

כך לדוגמה השעורים הקטביים של הנקודה A בציור הנ"ל הם $A(1;0)$ (כלומר $r=1$, $\theta = 0$). נגדיר כעת העתק f של המישור לתוך עצמו באופן הבא: אם $OA \not\ni P$ (P אינה שייכת לקטע OA) הרי $f(P) = A$; אם $OA \ni P$: $f(P) = P$.

במלים אחרות הקטע OA מועתק על עצמו באופן זהותי (ז.א. כל אחת מנקודותיו נשארת במקומה) וכל שאר נקודות המישור מועתקות על A .

<u>דוגמה 2</u>: נקבע בתור X את קבוצת כל הנקודות ששעוריהן הקטביים מקיימים

$$0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

כלומר את העגול שמרכזו בקטב ורדיוסו 1 (כולל השפה). בתור קבוצה Y נבחר את העגול שמרכזו בקטב ורדיוסו 2 (כולל השפה). העתק g של X <u>על</u> Y יוגדר ע"י

$$P(r;\theta) \xmapsto{g} P'(2r;\theta)$$

כל נקודה P של X עוברת לנקודה 'P של Y הנמצאת על הרדיוס OP (O הקטב) אבל מרוחקת פי שנים ממרכז העגולים.

<u>דוגמה 3</u>. X ו- Y כמו בדוגמה 2.

$P(r;\theta) \xmapsto{h} P'(\frac{3}{2} r;\theta)$ הוא העתק של X <u>לתוך</u> Y .

<u>דוגמה 4</u>. X ו- Y כנ"ל $P(r;\theta) \xmapsto{K} P'(r;\theta)$

זהו העתק זהותי-הוא מעביר כל נקודה לעצמה.

<u>העתק רציף</u>. יהיו X ו- Y קבוצות נקודות במישור. אם P ו- Q הן שתי נקודות במישור נסמן ב- $d(P;Q)$ את המרחק בין P ל- Q .

תהי נתונה סדרה אינסופית של נקודות $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$

אם $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n, P) = 0$ אומרים שהסדרה P_n שואפת ל- P וכותבים $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$.

לדוגמה סדרת הנקודות בעלות הקואורדינטות הקטביות

$$(1-\frac{1}{2}; 0), (1-\frac{1}{3}; 0), \ldots, (1 - \frac{1}{n+1}; 0), \ldots$$

שואפת לנקודה $(1;0)$.

במלים אחרות אפשר להגיד שסדרת הנקודות $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ שואפת ל- P אם עבור כל מספר חיובי וקטן כרצוננו ε ימצא n כזה שהחל מ- n זה והלאה המרחקים $d(P_n, P)$ יהיו קטנים מ- ε *).

<u>הגדרה.</u> העתק $f: X \longmapsto Y$ יקרא רציף <u>בנקודה</u> $X \ni P$ אם מהתנאי $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ $(X \ni P_n)$ נובע $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P)$.

במלים אחרות ההעתק f הוא רציף בנקודה $X \ni P$ אם כל סדרת נקודות מתוך X השואפת ל- P מועתקת לסדרת נקודות ב- Y השואפת לתמונתה $f(P)$ של P.

העתק שהוא רציף <u>בכל</u> נקודה $X \ni P$ נקרא העתק רציף. ההעתק שבדוגמה 1 אינו רציף. ובאמת, נקח סדרת נקודות במישור מחוץ לקטע OA השואפות לקטב O. כל נקודות אלה מועתקות לנקודה A, בו בזמן שהקטב O מועתק לעצמו. כלומר התמונה של גבול סדרת נקודות ב- X אינה מזדהה עם הגבול של סדרת התמונות ב- Y.

מצד שני לא קשה לראות שההעתקים שבדוגמות 3,2 ו-4 הם רציפים.

<u>II. קבוצות סגורות.</u>

תהי X קבוצה כלשהי ו- S תתקבוצה (קבוצה חלקית) של X. נעיר שגם את X עצמה אפשר לראות כתתקבוצה של עצמה.

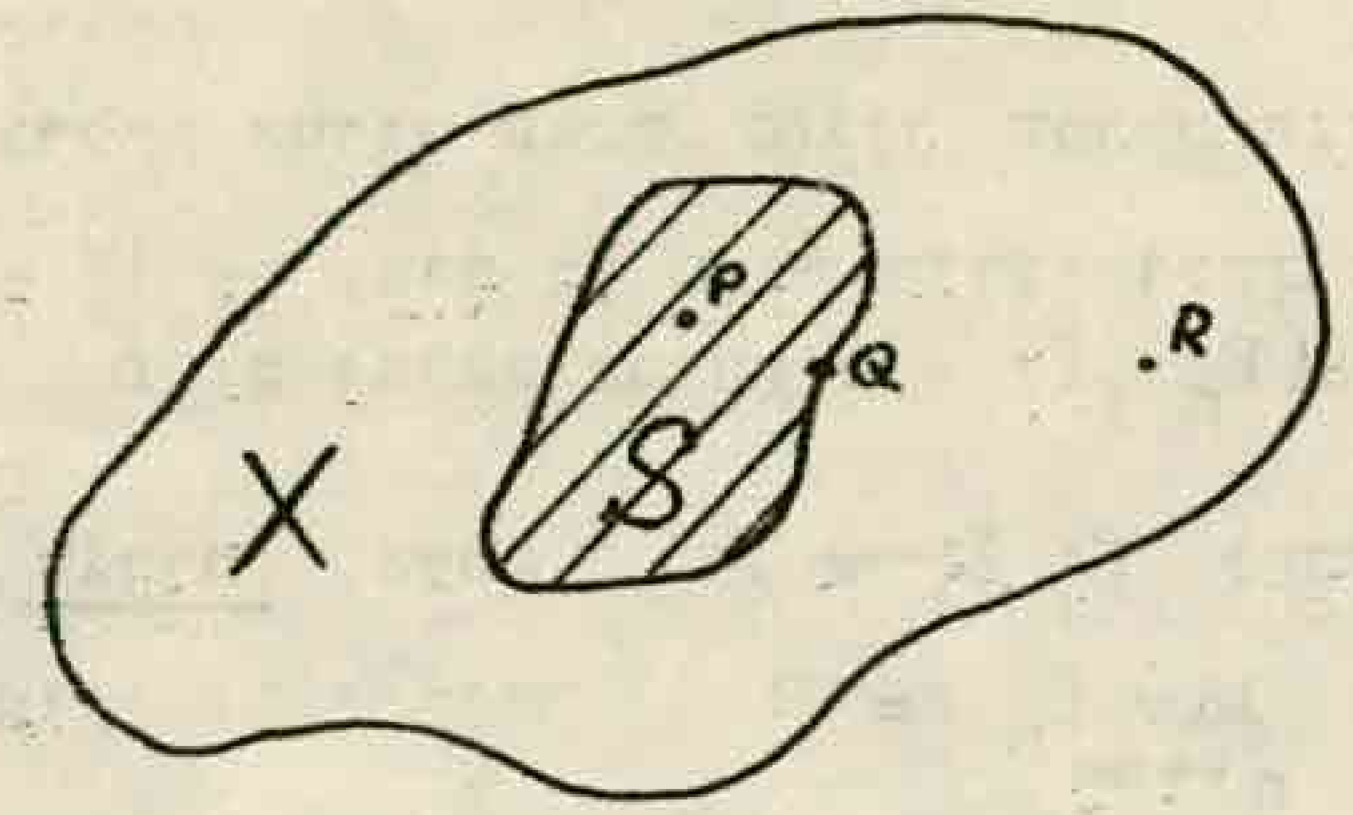
נקודה $X \ni P$ נקראת <u>נקודה גבולית של S</u>. אם קיימת <u>ב- S</u> סדרת נקודות $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ (כל P_n, כאמור, שייך ל- S) כזו ש- $\lim_{n\to\infty} P_n = P$.

נדגיש שהנקודה P בעצמה אינה חיבת (אם כי יכולה) להשתייך ל- S. מה שדרוש הוא רק שב- S תמצא לפחות סדרה אחת של נקודות שגבולה P.

---

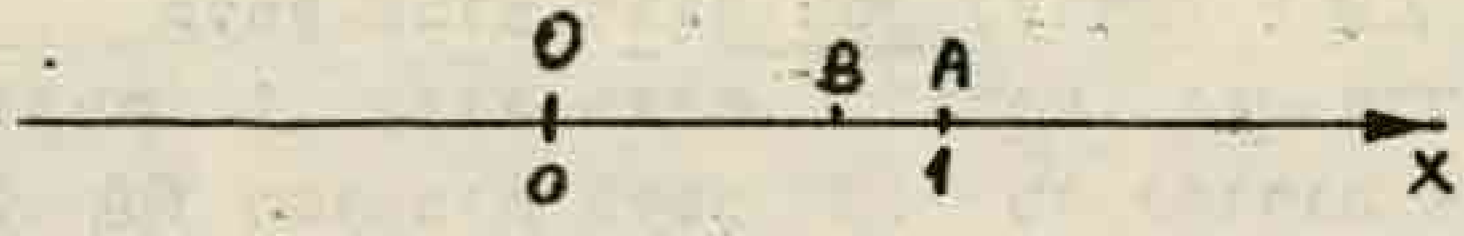
*) הערת המערכת: מושג הרציפות, נדון במאמרים אחדים בחוברות מס' 1 ומס' 2 של "גליונות מתמטיקה".

בציור מס' 2 כל הנקודות הפנימיות של S וגם אלה על השפה (גם כאשר שפה זו לא שייכת ל- S) הן נקודות גבוליות של הקבוצה S. לעומת זאת הנקודה R איננה גבולית של S. (הנקודה R היא בבירור נקודה גבולית של X.)



ציור מס. 2

דוגמה 5. תהי X הקבוצה $[0,1]$ ז.א. הקטע OA כולל הקצוות (ציור מס' 3). בתור S נקבע את הקטע $[0;1)$ ז.א. אוהו הקטע OA בלי הנקודה A. הנקודה A היא בכל זאת נקודה גבולית של S. למשל סדרת הנקודות $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ שכלן שייכות ל- S שואפת בבירור ל- A.



ציור מס. 3

דוגמה 6. $X = [0;1]$ כנ"ל ו- S היא קבוצת המספרים הרציונליים בקטע זה. (נזכיר: מספר רציונלי הוא מספר הנתן לתאור בצורת שבר $\frac{p}{q}$ p ו- q שלמים ו- $q \neq 0$ וכל שבר כזה אפשר כידוע להפוך לשבר עשרוני סופי או שבר עשרוני אינסופי מחזורי.. קל להראות שלמשל $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי.)

כל נקודה של X היא נקודה גבולית של S כי כל נקודה בקטע $[0;1]$ אפשר לקבל כגבול של סדרת נקודות רציונליות. למשל הנקודה $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ איננה רציונלית וקיים $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} P_n$ כאשר P_n היא מחצית הערך של השבר העשרוני הסופי המקרב את $\sqrt{2}$ בדיוק עד n מקומות אחרי הפסיק:

$$P_o = \tfrac{1}{2}\cdot 1 = \tfrac{1}{2}; \quad P_1 = \tfrac{1}{2}\cdot 1.4 = 0.7; \quad P_2 = \tfrac{1}{2}\cdot 1.41 = 0.705;$$

$$P_3 = \tfrac{1}{2}\cdot 1.414 = 0.707; \; \ldots\ldots$$

אם במקרה זה נקבע בתור S את כל המספרים הרציונליים שבקטע $[0;\frac{1}{2}]$

הרי כל נקודה של קטע זה היא נקודה גבולית של S וכל נקודה של X שאינה שייכת לקטע זה איננה נקודה גבולית של S .

<u>הגדרה</u>. תתקבוצה S של X תקרא <u>סגורה ב- X</u> , אם היא מכילה את כל הנקודות הגבוליות של עצמה הנמצאות ב- X .

כך למשל הקבוצה S המוגדרת בדוגמה 5 אינה סגורה ב- X , כי היא לא מכילה את הנקודה 1 המשמשת כנקודה גבולית של S ושייכת ל- X . באותו אופן גם הקבוצה S שבדוגמא 6 איננה סגורה ב- X .

כל קבוצה X סגורה תמיד בתוך עצמה.

<u>דוגמה 7.</u> אם X היא הקטע $[0;1]$ ו- S הקטע $[0;\frac{1}{2}]$ (עם הקצוות) הרי S קבוצה סגורה ב- X.

<u>דוגמה 8.</u> אם X היא הקטע $[0;1)$ (ז.א. בלי הנקודה 1) ו- S הקטע $[\frac{1}{2};1)$ אזי S סגורה ב- X . לעומת זאת הקבוצה 'S המורכבת מנקודות הקטע $[0;\frac{1}{2})$ אינה סגורה ב-X , כי $\frac{1}{2}$ היא נקודה גבולית של 'S ואינה שייכת ל- 'S (אבל כן שייכת ל- X).

<u>דוגמה 9.</u> תהא X מורכבת מנקודות היקף המעגל בעל רדיוס 1 ומרכז בראשית. בתור קבוצה S נקבע את רבע המעגל המורכב מהנקודות בעלות הקואורדינטות הקטביות $r = 1$ ו- $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. (יחד עם הקצוות). S היא קבוצה סגורה ב- X .

לעומת זאת הקבוצה 'S המורכבת מהנקודות $P(r;\theta)$ כאשר $r = 1$ ו- $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (בלי קצה אחד) אינה סגורה ב- X .

<u>הערת המערכת:</u> החלק השני של מאמר זה יפורסם בחוברת מס' 5.

<u>פתרון בעיות של התחרות המתמדת.</u>

להלן פתרונות השאלות ת.16 - ת.30 של התחרות המתמדת.

ליד בעיות אחדות צוין שמו של פותר שפתרונו לבעיה המתאימה מובא בהמשך. אין מכאן להסיק שלא היו פותרים אחרים אשר שלחו פתרונות דומים.

<u>ת. 16</u> היוצא מן התחנה א רואה את כל הרכבות שיצאו מתחנה ב שעתיים לפני צאתו עד שעתיים אחר צאתו. בסה"כ הוא רואה 9 רכבות (מביאים בחשבון גם את הזמן 0 ש' והזמן 4 ש').

ת. 17 א. הראשון שם את המטבע שלו במרכז השלחן. בכל צעד אחר הוא שם מטבע במקום סימטרי, ביחס למרכז, למקום אשר בו יריבו הניח מטבע.

ב. כל שולחן שיש לו מרכז סימטריה טוב לאיסטרטגיה זו.

ת. 18 (תשובתו של צבי דרזנר).
יהיו המספרים $a+1$, a, $a-1$. אזי סכום השברים הוא:

$$\frac{a+1}{a} + \frac{a}{a+1} + \frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} + \frac{a}{a-1} + \frac{a-1}{a} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{a}\right)+\left(1-\frac{1}{a+1}\right)+\left(1+\frac{2}{a-1}\right)+\left(1-\frac{2}{a+1}\right)+\left(1+\frac{1}{a-1}\right)+$$

$$+\left(1-\frac{1}{a}\right) = 6 - \frac{3}{a+1} + \frac{3}{a-1} = 6 + \frac{6}{(a+1)(a-1)}$$

כדי שהסכום יהיה מספר טבעי חייב a להיות 2 והמספרים הם 1, 2, 3.

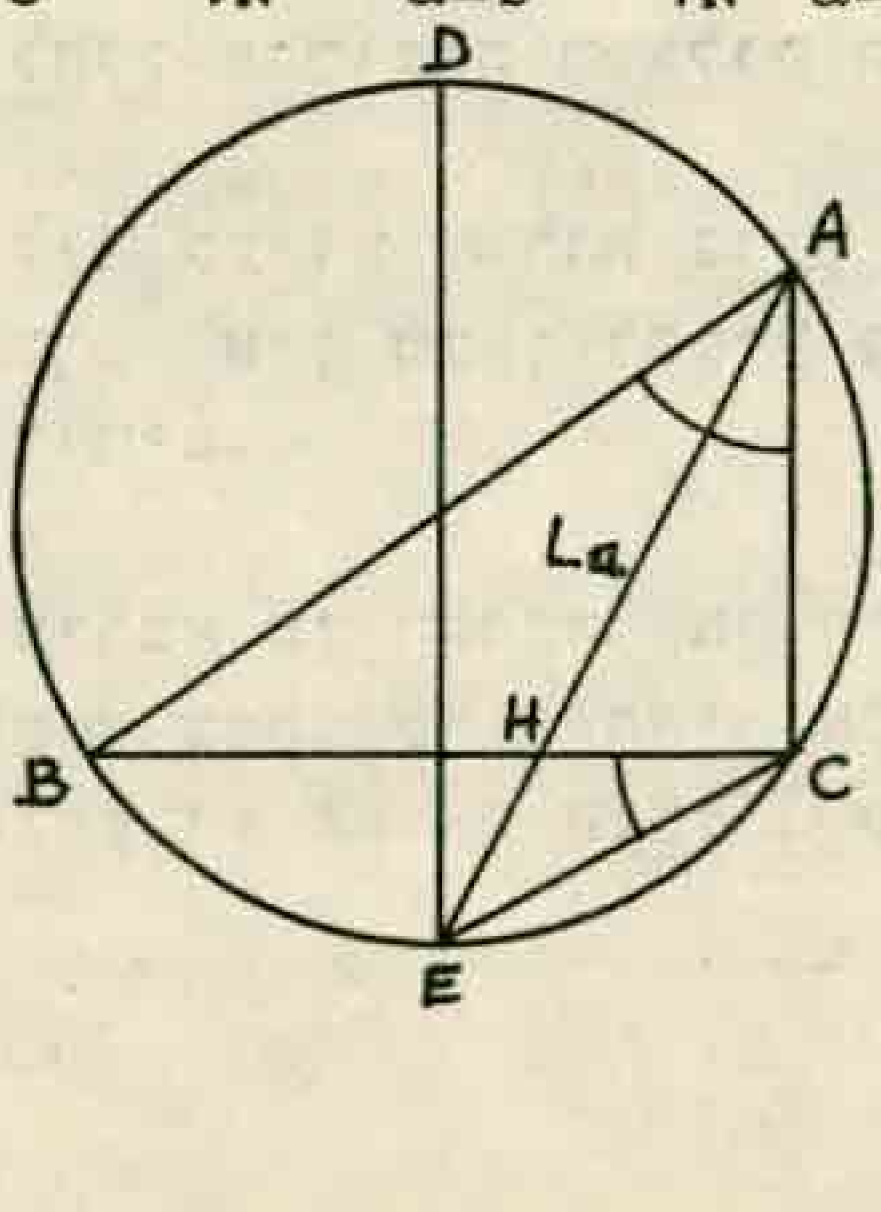
ת. 19 (תשובתו של אילן קוזמא).
לכל דלת יש שני צדדים. מספר הצדדים של כל הדלתות הוא זוגי. מספר הצדדים הפונים פנימה הוא זוגי שכן בכל חדר יש מספר זוגי של דלתות (נתון), לכן מספר הצדדים הפונים החוצה גם הוא זוגי. מספר זה הוא מספר הדלתות החיצוניות.

ת. 20 עם הבאתו של האגף השמאלי למכנה משותף מקבלים במונה:

$$(a-b)(1+bc)(1+ac) + (b-c)(1+ab)(1+ac) + (c-a)(1+ab)(1+bc) =$$

$$= a^2c - ac^2 + c^2b - b^2c + ab^2 - a^2b = (a-c)(b-a)(b-c)$$

בטוי זה מתאפס אם ורק אם $a=c$ או $a=b$ או $b=c$.



ת. 21 מקצים קטע $BC = a$ נתון (ראה ציור). על a כעל מיתר בונים מעגל כך שהקשת שלו $\overset{\frown}{BDAC}$ היא המקום הגיאומטרי של נקודות שמהן רואים את BC בזוית A הנתונה.

DE הוא קטר מאונך ל- BC . נעביר את הקטע EC.

$$\triangle EHC \sim \triangle EAC$$

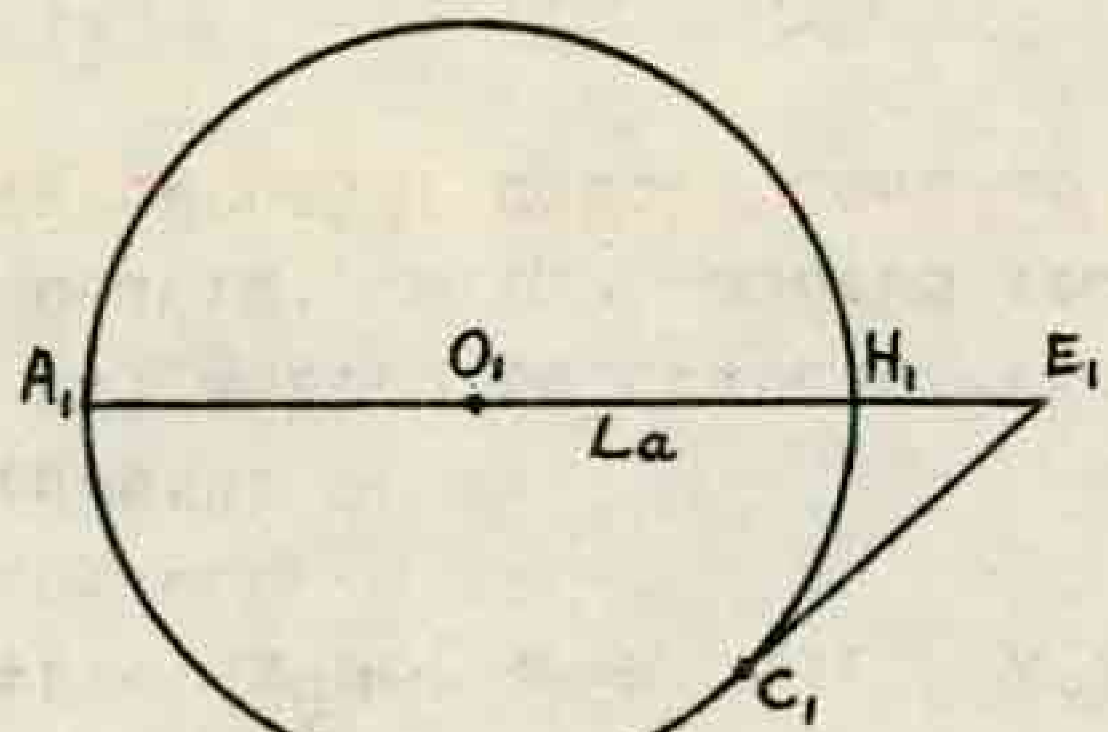
(כי $\angle AEC$ משותפת ו- $\angle ECH = \angle EAC$

כי הן נשענות על קשתות שוות $\overset{\frown}{BE}$ ו- $\overset{\frown}{EC}$).

מכאן
$$\frac{EC}{EH} = \frac{AE}{EC}$$

כלומר
$$EC^2 = EH \cdot AE = EH(L_a + EH)$$

EC הוא קטע שנבנה בציור הנ"ל. את EH נבנה באופן הבא:
בונים מעגל שקטרו L_a.
בנקודה C_1 כלשהי על
המעגל בונים משיק
ומקצים עליו קטע
$C_1E_1 = CE$
דרך E_1 ומרכז
המעגל O_1 מעבירים
ישר E_1A_1.
נוכיח כעת ש- $EH = E_1H_1$.



לפי התכונה הידועה
של משיק:
$$A_1E_1 \cdot H_1E_1 = C_1E_1^2$$

כלומר
$$C_1E_1^2 = (L_a + H_1E_1)\, H_1E_1$$

וזהו בדיוק השויון שמקיים הקטע EH. מכאן $E_1H_1 = EH$
עם קביעת הקטע EH חוזרים לציור הראשון ובונים את המשלש המבוקש באופן ישיר.

ת. 22 כל קוביה מכסה משבצת שחורה ומשבצת לבנה. 31 קוביות מכסות 31 משבצות לבנות ו-31 שחורות. מוכרחות להשאר: משבצת לבנה ומשבצת שחורה. מאחר ושתי המשבצות הקיצוניות של אלכסון הן בעלות אותו צבע, לא ייתכן הכסוי המבוקש.

ת. 23 (תשובתו של דניאל לובזנס).
הוכחה בעזרת אינדוקציה. המשפט נכון אם יש במפה רק ישר אחד. נניח שהמשפט נכון עבור מפה שיש בה n ישרים. נוסיף ישר אחד. הוא מחלק את המישור לשני חלקים. לא נשנה את שני הצבעים בצידו האחד של הישר ונהפוך את הצבעים בצידו השני.

המפה המתקבלת נוצרת ע"י $n+1$ ישרים ועונה על הדרישות.

ת. 24 יהיו A ו- B שני רמזורים שכנים.
לפי הנהוך מכונית היוצאת מ- A כאשר הוא מואר באור ירוק ונוסעה במהירות 60 ק"מ/שעה מגיעה אל B באור ירוק. אם מכונית זו תחזור מ- B ל- A באותה מהירות, תגיע שוב ל- A באור ירוק ואם תהפוך את כוונה שנית תגיע אל B מחדש באור ירוק. מכונית אחרת, היוצאת יחד עם הראשונה מ- A ל- B במהירות של $60/3 = 20$ ק"מ/שעה תגיע ל- B יחד עם המכונית הראשונה (בסבוב השני שלה). לכן גם היא תפגוש את B באור ירוק וממילא תעבור באור ירוק בשאר הרמזורים.

באותו אופן מוצאים כי מתאימה גם מהירות בת $60/5 = 12$ ק"מ/שעה ובאופן כללי מהירות בת $\frac{60}{2n+1}$ ק"מ/שעה(n טבעי).

ת. 25 נניח כי השחקן המפסיק משחק שם את הכדור בכיסו ועוזב את התחרות. היו n שחקנים ונשאר אחד (האלוף). מכאן שהלכו $n-1$ שחקנים עם הכדורים, ולכן היה צורך ב- $n-1$ כדורים.

ת. 26 נסמן $a = \log_y x$ אזי $\frac{1}{a} = \log_x y$

ולכן $a - \frac{1}{a} = \frac{8}{3}$. ההמשך ישיר.

ת. 27 $m^3 - 3m^2 + 4 \geqslant 0$ $\qquad$ $m + \frac{4}{m^2} \geqslant 3$

נפרק את האגף השמאלי לגורמים:

$$m^3 + m^2 - 4m^2 + 4 = m^2(m+1) - 4(m-1)(m+1) =$$
$$= (m+1)(m^2 - 4m + 4) = (m+1)(m-2)^2$$

בטוי זה גדול מ-0 עבור m חיובי. (עבור $m = 2$ הוא שוה לאפס).

ת. 28 (תשובתו של עודד קריב). כתב ז' שלחה לתחרות n תלמידים. כתה ח' שלחה $10n$ תלמידים. מספר המשתתפים היה, איפוא, $11n$ ולכן מספר המשחקים $\frac{11n(11n-1)}{2}$. סך הכל של הנקודות הוא כמספר המשחקים. מזה קבלו תלמידי כתה ז' את החלק ה- $\frac{2}{11} = \frac{1}{5.5}$ ז.א. $n(11n-1)$ נקודות.
אולם מכסימום הנקודות שיכלו להשיג תלמידי כתה ז' הוא
(המשך בע' 128)

שדות אלגבריים סופיים

שמואל אביטל

1. אם נשאל אדם בשעה 10 מה תהיה השעה כעבור 3 שעות נקבל תשובה, כי השעה תהיה 1 אם כי $10 + 3 = 13$; וכן אם נשאלו בשעה 3 מה היתה השעה לפני 6 שעות נקבל תשובה, כי השעה היתה 9 בו בזמן ש- $3 - 6 = -3$. הסיבה לכך היא, כי אנו סופרים את השעות עד 12 ואח"כ מתחילים את הספירה מחדש. לפי חשבון זה המספרים 13 ו-1 הם "שקולים" וכן "שקולים" המספרים -3 ו-9. באופן כללי כל שני מספרים שלמים שהפרשם מתחלק ב-12 "שקולים" אחד לשני. במקום "שקול" נשתמש במונח המקובל במתימטיקה **קונגרואנטי.**

הגדרה: שני מספרים שלמים a ו- b נקראים **קונגרואנטיים** לפי מספר טבעי נתון m (או כפי שאומרים מודולו m), אם הפרשם מתחלק ב- m. ("מתחלק" פרושו: מתחלק בלי שאריה).

בסימון: $a \equiv b(m) \Leftrightarrow m/a-b$

הסבר הסימנים: $m/a-b$ ההפרש $a - b$ מתחלק ב- m. $a \equiv b(m)$ a קונגרואנט ל- b לפי m

$\Leftrightarrow$ אם ורק אם, כלומר הרשום מכל צד נובע מן הרשום בצד השני.

דוגמאות: $17 \equiv 5\ (4)$ כי $17 - 5 = 12$ ו-$4/12$ (12 מתחלק ב-4)

$22 \equiv -3\ (5)$ כי $22 - (-3) = 25$ ו-$5/25$

$14 \equiv 0\ (7)$ כי $7/14$

לרלציה (קשר) של קונגרואנציה בין מספרים יש תכונות דומות לרלציות השויון בין מספרים:

1. רפלקסיביות: כל מספר קונגרואנטי לעצמו $a \equiv a(m)$
כי $a-a = 0$ ו- $m/0$ עבור כל m

2. סימטריות: $a \equiv b(m) \Leftrightarrow b \equiv a(m)$

כי אם $m/a - b$ הרי גם $m/b - a$ ולהיפך. (אם למשל $26 \equiv 6(4)$, כי 20 מתחלק ב-4, גם $6 \equiv 20\ (4)$ כי גם $4/-20$).

3. טרנסיטיביות: אם $a \equiv b(m)$ וגם $b \equiv c(m) \Longrightarrow a \equiv c(m)$

לדוגמה: $24 \equiv 3(7)$ $3 \equiv -4(7) \Longrightarrow 24 \equiv -4(7)$,
ובאמת $7/28$

<u>הוכחה:</u> $a \equiv b(m) \Leftrightarrow m/a-b \Leftarrow a - b = mk_1$, k_1 מספר שלם.

$b \equiv c(m) \Leftrightarrow m/b-c \Leftarrow b - c = mk_2$, k_2 מספר שלם.

נחבר שני השויונות האחרונים ונקבל $a - c = m(k_1 + k_2)$

ז"א $m/a - c \Leftrightarrow a \equiv c(m)$

גם המשפט הבא מבטא תכונות יחס הקונגרואנציה הדומות לאלו של השויון:

<u>משפט 1:</u> א. עם הוספת מספר שלם לשני מספרים הקונגרואנטיים לפי m מקבלים שני סכומים שאף הם קונגרואנטיים לפי m.

ב. אם כופלים שני מספרים קונגרואנטיים לפי m במספר שלם כלשהו מקבלים שתי מכפלות שהן גם כן קונגרונטיות לפי m

בסימון: א) $a \equiv b(m) \Leftrightarrow a + t \equiv b + t(m)$

ב) $a \equiv b(m) \Leftrightarrow at \equiv bt(m)$

הוכחה: א) $a \equiv b(m) \Leftarrow a-b = km \Leftarrow (a+t) - (b+t) = km$

ולכן $a + t \equiv b + t(m)$

ב) $a \equiv b(m) \Leftarrow a-b = km$; נכפול ב- t שני האגפים.

נקבל: $at - bt = (kt)m \Leftarrow at \equiv bt(m)$

לדוגמה: $13 \equiv 7(6) \Leftarrow 18 \equiv 12\ (6)$, הוספנו 5 לשני אגפי הקונגרואנציה

וכן $13 \equiv 7(6) \Leftarrow -2 . 13 \equiv -2.7\ (6)$;

ובאמת $-26 \equiv -14(6)$ $(6 / -26 + 14)$

2. יהא $m = 2$; כל המספרים הזוגיים (חיוביים, אפס ושליליים) קונגרואנטיים אחד לשני לפי 2; וכן גם כל המספרים האיזוגיים קונ- גרואנטיים אחד לשני לפי 2. אף מספר זוגי אינו קונגרואנטי לאף מספר אידוגי לפי 2. בסך הכל התחלקו כל המספרים השלמים לשתי מחלקות זרות (זוגיים ואיזוגיים) - כך שכל המספרים באותה מחלקה קונגרואנטיים בינם לבין עצמם לפי 2 ואין אף מספר משותף לשתי המחלקות.

באופן דומה קשר הקונגרואנטיות לפי $m = 5$ יחלק את כל המספרים השלמים ל-5 מחלקות:

1) המספרים ...15;10;5;0;5-;10-.... (באופן כללי 5 k)

2) " ...11;6 ;1;4-; 9- .... (באופן כללי 5 k+ 1)

3) המספרים .... 12; 7; 2; 3-; 8- (באופן כללי 2 + $5k$)
4) " .... 13; 8; 3; 2-; 7- (" " 3 + $5k$)
5) " .... 14; 9; 4; 1-; 6- (" " 4 + $5k$)

קל לראות, שכל מספר שלם שייך לאחת המחלקות הנ"ל, כל המספרים במחלקה אחת קונגרואנטיים בינם לבין עצמם ולשתי מחלקות שונות אין אף מספר משותף.

באופן כללי רלצית קונגרואנטיות לפי m מחלקת את כל המספרים השלמים ל- m מחלקות זרות, באופן ש-:

1) כל מספר שלם שייך לאחת המחלקות.
2) כל המספרים במחלקה אחת קונגרואנטיים ביניהם לפי m .
3) לשתי מחלקות שונות אין אף מספר משותף. (כדי לציין תכונה זאת אנו אומרים, כי המחלקות זרות אחת לשניה).

המחלקות הנ"ל נקראות: <u>מחלקות שאריות לפי המספר הטבעי m</u> .

כל מספר ממחלקת שארית מסוימת יכול לשמש בנציג מחלקה זו. לעתים נוח במיוחד להשתמש בתור נציג במספר הלא שלילי הקטן ביותר שבמחלקה. כך למשל עבור מחלקות השאריות לפי 2 יהיו אלה המספרים 0;1 ; נציגי מחלקות שאריות לפי 5 יהיו המספרים 0;1;2;3;4 (אבל גם חמשת המספרים 10;11;22;3;-1 יכולים לשמש כנציגים וכן כל חמישיה של מספרים שאף שניים מהם אינם קונגרואנטיים ביניהם לפי 5). נציגי מחלקות שאריות לפי m יהיו המספרים 0;1;2;... m -1

נסמן להלן את m מחלקות השאריות לפי m

ב- $A_0 \; ; A_1 \; : A_2 \; ; \ldots . \; A_{m-1}$

מתברך שאפשר להגדיר פעולות חיבור וכפל בין מחלקות השאריות.

<u>הגדרה:</u> יהיו b ו- c מספרים כלשהם השייכים למחלקות השאריות A_i ו- A_j בהתאמה (b שייך למחלקה A_i; c שייך למחלקה A_j).אזי

א) למחלקה A_k אשר לה שייך הסכום b + c נקרא סכום המחלקות A_i ו- A_j ונרשום $A_i + A_j = A_k$.

ב) למחלקה A_p אשר לה שייכת המכפלה bc נקרא מכפלת המחלקות A_i ו- A_j ונרשום $A_iA_j=A_p$.כדי להבטיח שלהגדרות הנ"ל יש מובן עלינו להוכיח כי הסכום A_i+A_j והמכפלה A_iA_j אינם תלויים בבחירת המספרים b ו- c .

נניח לשם כך כי b_1 מספר כלשהו השייך ל- A_i ו- c_1
מספר כלשהו השייך ל- A_j ונוכיח כי $b_1 + c_1 \equiv b+c(m)$
וכן $b_1 c_1 \equiv bc(m)$, כלומר $b_1 + c_1$ שייך לאותה מחלקה אליה
שייך $b + c$ וכן $b_1 c_1$ שייך לאותה מחלקה אליה שייך bc.

הוכחה: b_1 ו- b שייכים לאותה מחלקה לכן $b_1 \equiv b(m)$
ולפי משפט 1 $b_1 + c \equiv b + c(m)$.

c_1 ו- c שייכים לאותה מחלקה, ז.א. $c \equiv c_1(m)$
ולפי משפט 1 $b_1 + c \equiv b_1 + c_1(m)$

ומכאן לפי חוק הטרנסיטיביות $b+c \equiv b_1 + c_1(m)$

באותו אופן:

$$b_1 c_1 \equiv bc(m) \Leftarrow \begin{cases} b_1 c \equiv bc(m) \xLeftarrow{\text{לפי מש. 1}} b_1 \equiv b(m) \\ b_1 c \equiv b_1 c_1(m) \xLeftarrow{\text{לפי מש. 1}} c \equiv c_1(m) \end{cases}$$

לדוגמה: יהא $m=5$. נמצא את הסכום $A_2 + A_4$
ואת המכפלה $A_2 A_4$.

ל- A_2 שייכים למשל המספרים $-13;7;2$
ל- A_4 : $4; 14; 39$. נחבר זוגות נציגים משתי המחלקות:

$2 + 4 = 6 \;\; ; 2 + 14 = 16 \; ; 7 + 4 = 11 \; ; \; - 13 + 4 = - 9 \; ;$
$- 13 + 39 = 26 \quad ; -13 + 14 = 1$

כל הסכומים $6; 16; 11; -9; 26$ שייכים לאותה מחלקה A_1
(כולם קונגרואנטיים ל-1 מודולו 5). ז"א $A_2 + A_4 = A_1$.

באותו אופן נחשב $A_2 A_4$. מכפלות הנציגים שבחרנו קודם
יתנו $-13.4 = -52 \equiv 3 \ (5) \; ; \; 2 \,.\, 14 = 28 \equiv 3 \ (5)$
$2.4 = 8 \equiv 3 \ (5) \; ;$

כלם שייכים לאותה מחלקה A_3 ו- $A_2 \cdot A_4 = A_3$.

נמליץ לפני הקורא לפתור את התרגילים הבאים לפני שיתקדם
בקריאת החומר:

תרגיל 1: אשר את לוחות החיבור והכפל הבאים בשביל $m = 5$

+	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_0	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_0
A_2	A_2	A_3	A_4	A_0	A_1
A_3	A_3	A_4	A_0	A_1	A_2
A_4	A_4	A_0	A_1	A_2	A_3

x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
A_1	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_2	A_0	A_2	A_4	A_1	A_3
A_3	A_0	A_3	A_1	A_4	A_2
A_4	A_0	A_4	A_3	A_2	A_1

תרגיל 2. בנה לוחות חיבור וכפל כנ"ל עבור $m = 3$, $m = 6$.

3. לא קשה להוכיח, שחיבור המחלקות המוגדר לעיל מקיים את התכונות הבאות:

א) עבור כל שתי מחלקות קיימת מחלקה יחידה שהיא הסכום שלהן.

ב) קיים חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) ז"א קיים

$$(A_i + A_j) + A_k = A_i + (A_j + A_k)$$

ג) קיים חוק החילוף (קומוטטיביות)

ז"א $$A_i + A_j = A_j + A_i$$

ד) קיימת "מחלקת האפס" (זו המחלקה A_0 שכל איבריה מתחלקים ב- m) שתכונתה:

עבור כל A_i קיים $$A_i + A_0 = A_0 + A_i = A_i$$

מחלקת האפס משמשת כאיבר נויטרלי כלפי החיבור, ז"א איבר שחיבורו למחלקה כלשהי אינו משנה מחלקה זו.

ה) עבור כל מחלקה A_i קיימת מחלקה נגדית ביחס לחיבור, היא המחלקה A_{m-i} שעבורה $A_i + A_{m-i} = A_0$

מתכונה (ה) נובע, כי קיים תמיד פתרון למשואה $A_i + X = A_j$ עבור כל A_i ו- A_j. הפתרון הוא

$$X = A_{m-i} + A_j$$

ובאמת

$$A_i + (A_{m-i} + A_j) = (A_i + A_{m-i}) + A_j = A_0 + A_j = A_j$$

עובדה זאת מאפשרת הגדרת חיסור בין מחלקות.

$A_j - A_i$ היא המחלקה $A_{m-i} + A_j$ הפותרת את המשואה $A_i + X = A_j$.

קבוצת איברים, שמוגדרת ביניהם פעולה המתאימה לכל זוג מסודר של איברי הקבוצה, איבר שלישי מתוך קבוצה זו והמקיימת את התכונות 5; 4; 2; 1 הנזכרות לעיל נקראת <u>חבורה</u>. אם גם מתקיימת התכונה 3 החבורה נקראת חילופית (קומוטטיבית). לפיכך קבוצת מחלקות שאריות לפי m היא חבורה חילופית ביחס לחיבור המוגדר לעיל.

תרגיל 3. התר את המשואות הבאות

א) $m = 13$ $\quad X + A_0 = A_0 \quad A_{12} + X = A_5$

ב) $m = 17$ $\quad A_{10} + X = A \quad A_9 + X = A_7$

תרגיל 4. הראה, כי קבוצת המספרים השלמים היא חבורה חילופית ביחס לפעולת החיבור. האם גם קבוצת המספרים הטבעיים מהוה חבורה ביחס לחיבור?

תרגיל 5. הראה כי שני המספרים 1 ו-1- מהוים חבורה חילופית ביחס לכפל.

בדומה לתכונות החיבור נרשום את תכונות כפל המחלקות:

6. עבור כל שתי מחלקות A_i ו- A_j קיימת מחלקה יחידה A_iA_j שהיא מכפלתן.

7. קיים חוק הקיבוץ $(A_iA_j)A_k = A_i(A_jA_k)$

8. קיים חוק החילוף $A_iA_j = A_jA_i$

9. קיימת מחלקה נויטרלית כלפי הכפל והיא המחלקה A_1 : ז"א עבור כל A_i קיים $A_i\,A_1 = A_i$

שתי הפעולות - החיבור והכפל - קשורות ביניהן ע"י

10. חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות) של הכפל מעל לחיבור ז"א

$$(A_i + A_j)\ A_k = A_iA_k + A_jA_k$$

קיום חוקים אלה כלפי החיבור והכפל נובע מהגדרת הפעולה ומקיום החוקים המקבילים עבור החיבור והכפל של המספרים השלמים.

קבוצת איברים עם שתי פעולות המקיימות את החוקים 8 - 1 ו-10 נקראת חוג.

חוג המקיים גם את 9 נקרא חוג עם יחידה.

נציין, שקבוצת המספרים השייכים למחלקה A_0 לפי m כלשהו, כלומר קבוצת המספרים $\dots -2m; -m; 0; m; 2m; \dots$

עם פעולת החיבור והכפל הרגילים היא חוג (בלי יחידה!). נמליץ לפני הקורא לבדוק את קיום החוקים 8 - 1 ו-10 בחוג זה.

במאמר נוסף, שיופיע באחת החוברות הבאות נראה, כי קבוצות מחלקות שאריות לפי mו p מסוימים מקיימות תכונה נוספת ביחס לכפל ההופכות אותן לקבוצה עם שתי פעולות הנקראת שדה.

תשובות לשאלות שונות שהופיעו בחוברת מס' 3 שלא במסגרת התחרות המתמדת

בניה מגפרורים כן. פירמידה משלשת שכל מקצועותיה שוים.

סדרה משונה האבר החמישי הוא 46. הסדרה בנויה מהמספרים המתקבלים מהרבועים השלמים ...‚ 64‚ 49‚ 36‚ 25‚ 16 ע"י הפיכת סדר הספרות בהם.

תרומה למסיבה. יוצאים מהנחה שאין חלקי אגורות. מספר האגורות שנאסף 2599 מתפרק בצורה הבאה: $2599 = 23.113$. (23 ו-113 מספרים ראשוניים). כיון שבכתה נורמלית אין 113 תלמידים הרי בכתה היו 23 תלמידים וכל אחד נתן 1.13 ל"י. (אין גם לקחת בחשבון את האפשרויות שבכתה היו 2599 תלמידים או תלמיד אחד).

בעית שקילה. נסמן את השקים במספרים $1, 2, \dots n$. מהשק הראשון נקח $2^0=1$ מטבע, מהשני $2^1 = 2$ מטבעות, מהשלישי $2^2 = 4$ מטבעות, ..., ומהשק האחרון, ה-n , נקח 2^{n-1} מטבעות.

מספר המטבעות שנלקחו הוא $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ אלו משקל כל אחת היה 10 גרם, משקלן היה $10(2^n-1)$ גרם. נשקול את המטבעות ונמצא את ההפרש M בין $10(2^n-1)$ לבין המשקל האמיתי של המטבעות. אם

$$(1)\quad 2^k \le M < 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$$

הרי שבשק ה- k היו מטבעות "קלות" ובכל השקים הבאים אחריו כבדות. שהרי אילו בשק p $(p > k)$ היו מטבעות "קלות" אזי $M \geq 2^p$ בנגוד ל-(1). ומצד שני, אם בשק ה- k היו מטבעות כבדות, אזי אפילו אם נניח שכל השקים הקודמים הכילו מטבעות קלות, הרי M יכול להיות במקרה זה לכל היותר $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ בנגוד ל-(1).

נסתכל כעת בהפרש $M_1 = M - 2^k$ אם: $2^{k_1} \le M_1 < 2.2^{k_1} = 2^{k_1+1}$ $(k_1 < k)$

(המשך בע' 124)

תחרות מתמדת להתרת בעיות

תנאי התחרות פורסמו בחוברות מס' 1 ו-2.

את הפתרונות יש לרשום בצורה ברורה (בדיו ולא צפוף מדי) ולפרטם ככל האפשר. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל. פתרון כל שאלה יש לרשום על דף לחוד (מצדו האחד של הדף) ולציין לידה את מספרה הסדורי. כמו כן יש לציין על כל דף את שם הפותר ואת מקום עבודתו או למודיו (גם את שנת הלמודים שלו לפי 12 שנות למוד).

התחרות של בעיות גליון זה צריכות להגיע למערכת לא יאוחר מ-30.6.1961.

<u>הערה:</u> הבעיות המצוינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט', י', בלבד (שנות הלמודים התשיעית והעשירית).

<u>ת.46</u> * (2 נקודות) יהיו נתונים mn מספרים מסודרים בצורה מלבנית ב- m שורות ו- n עמודות. הוכח, כי אם יש בין המספרים שנים כך שכל אחד מהם אינו גדול משאר המספרים בשורתו ואינו קטן משאר המספרים בעמודתו, אזי שני המספרים הללו שוים.

<u>ת.47</u> * (4 נקודות) א. נתונות n נקודות במישור כך שאף שלש מהן אינן על ישר אחד. מחברים כל שתיים מהן בקטעים. כל קטע אפשר לצייר באחד משני הצבעים: ירוק או אדום. מה מספר הנקודות המינימלי ההכרחי כדי שייוצר בשרטוט משלש אשר קדקדיו הם מהנקודות הנתונות ואשר כל צלעותיו הן בנות צבע אחד?

ב. נסח ופתור את הבעיה למקרה כאשר אין הנקודות חיבות להמצא במישור אחד.

<u>ת.48.</u> (2 נקודות). הוצע ע"י משה מוהל).

אם $tgA + tgB + tgC = tgA\ tgB\ tgC$

מה תוכל לומר על $A + B + C$?

<u>ת.49.</u> * (4 נקודות). הוצע ע"י משה מוהל).
יהיו נתונים n מספרים רציונליים חיוביים, הרשומים בצורה שברים פשוטים. הוכח, כי השבר אשר מכנהו הוא סכום המכנים של השברים הנתונים ומונהו הוא סכום המונים שלהם, נמצא בין המספר הקטן ביותר לבין המספר הגדול ביותר בין הנתונים.

<u>ת.50.</u> (4 נקודות). 17 אנשים חכמים נמו ביום בהיר תחת עץ בשדה. עבר עובר אורח והכתים את מצחו של כל אחד מהם משהתעוררו

כולם, וראו אחד את משנהו, התפרצו בצחוק, כי כל אחד ראה שחבריו מלוכלכים. כך צחקו זמן מה מבלי להחליף אף מלה ביניהם. פתאום הפסיק אחד מהם לצחוק משום שהגיע למסקנה שגם הוא עצמו מלוכלך. כיצד הגיע למסקנה זו?

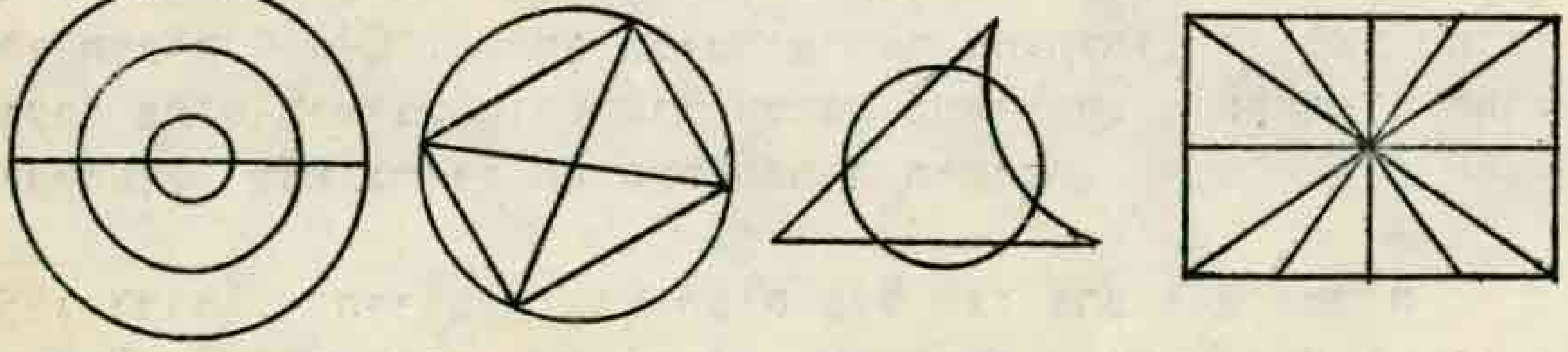
ת.51 (3 נקודות) הוכח כי אם $\cos x > 0$

אזי
$$\operatorname{tg} x + \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \frac{1}{\cos x}$$

ואם $\cos x < 0$

אזי
$$\operatorname{tg} x + \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \frac{\sin x-\cos 2x}{\cos x(1+\sin x)}$$

ת.52* (3 נקודות). האם אפשר לצייר כל אחת מהצורות הבאות במשיכת קולמוס אחת? הוכח את תשובתך.



ת.53* (3 נקודות). אתה נכנס לחדר ובו 30 איש. אנשים אלה התכנסו באקראי ואינם מוכרים לך. הנך מכריז שאתה מוכן להתערב ביחס 1:1 על כך, שנמצאים בחדר שני אנשים שיש להם אותו יום הולדת (כלומר, שני אנשים שנולדו באותו חודש ובאותו יום בו, אך לאו דוקא באותה שנה). האם כדאית לך ההתערבות?

מה צריך להיות המספר המינימלי של אנשים בחדר, כדי שתוכל להחליט שההתערבות כדאית עבורך?

ת.54* (3 נקודות). ברגע שסירת משוטים השטה בנהר במהירות קבועה נגד הזרם, עברה תחת לגשר נפל מחרטומה לתוך המים בקבוק ריק אשר נסחף אחורה יחד עם הזרם כשהוא צף במים. החותר הרגיש בדבר רק כעבור עשרים דקות ואז הפך מיד את כוון סירתו ושט חזרה באותו מאמץ שרירים. הוא השיג את הבקבוק במרחק של ק"מ אחד מהגשר. מהי מהירות זרם הנהר (בהנחה שמהירות זו קבועה)?

ת.55* (2 נקודות). מצא את כל הערכים השלמים של x, שעבורם תקבל הפונקציה $y = \frac{x+2}{x-1}$ ערכים שלמים.

ת.56* (2 נקודות). הוכח שכל משלח דואר אפשר לשלם באמצעות בולים של 3 אגורות ו-5 אגורות בלבד, אם משלח כזה עולה מספר שלם של אגורות גדול מ-7.

ת.57* (3 נקודות). מ- $2n$ המספרים $1, 2, 3, \ldots, 2n$ בוחרים $n+1$ מספרים.

א. הוכח, כי בין המספרים שנבחרו נמצאים לפחות שני מספרים אשר האחד מהם הוא מחציתו של השני.

ב. האם מצב זה הכרחי אם בוחרים n מספרים?

ת.58 (5 נקודות). מצא נוסחה עבור סכום n האברים הראשונים של כל אחד מהטורים הבאים:

א. $q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n + \ldots$

ב. $q + 4q^2 + 9q^3 + \ldots + n^2q^n + \ldots$

ת.59* (4 נקודות). ישיבה התחילה בין השעות 6 ו-7 בערב והסתיימה בין השעות 9 ו-10. אחד הנוכחים ראה להפתעתו, כי מצב מחוגי השעון בתום הישיבה היה הפוך ממצבם בתחילתה. (המחוגים התחלפו ביניהם). מצא בדיוק את שעת התחלת הישיבה.

ת.60* (5 נקודות). הייתכן גוף חסום בעל שני מרכזי סימטריה שונים? (הערה: גוף נקרא חסום, אם אפשר למצא R סופי כך שהגוף הנתון יכלל בשלמותו בתוך כדור שרדיוסו R).

(המשך מע' 121)

הרי שהשק ה- k_1 הכיל מטבעות קלות וכו'. בצורה זו נגלה את כל השקים עם המטבעות הקלות.

הערה: אם נרשום את M בשטה הבינרית (ז.א. לפי בסיס 2) של כתיבת המספרים, נמצא מיד את השקים עם המטבעות המזויפות. מספריהם הסדוריים שוים למספרים הסדוריים של המקומות בהם מופיעה הספרה 1 במספר המתקבל (כאשר מתקדמים מימין שמאלה).

(המשך מע' 128)

במקרה של (5ב) נשוה את c עם b (שקילה 6).

אם $c > b$ נשוה את c עם e (שקילה 7)

אם $c < b$ נשוה את c עם d

באופן דומה ננהג במקרים (5ג) ו-(5ד).

על בעיה מסוימת של א. ג. שטראוס

מיכאל אדלשטין.

1. במאמרו על "עקומים סגורים" * מציג א.ג.שטראוס את הבעיה:

"נתון עקום מישורי סגור כלשהו. האם קיימות שלש נקודות A,B,C על העקום, כך שהמשלש $\triangle ABC$ הוא שוה-צלעות ופנימו נמצא כולו בפנים העקום?"

ברשימה שלפנינו נתנה תשובה שלילית לשאלה זאת. בעזרת דוגמה, שתתואר להלן, נראה כי ישנם עקומים עליהם אי אפשר למצוא שלש נקודות כנדרש לעיל.

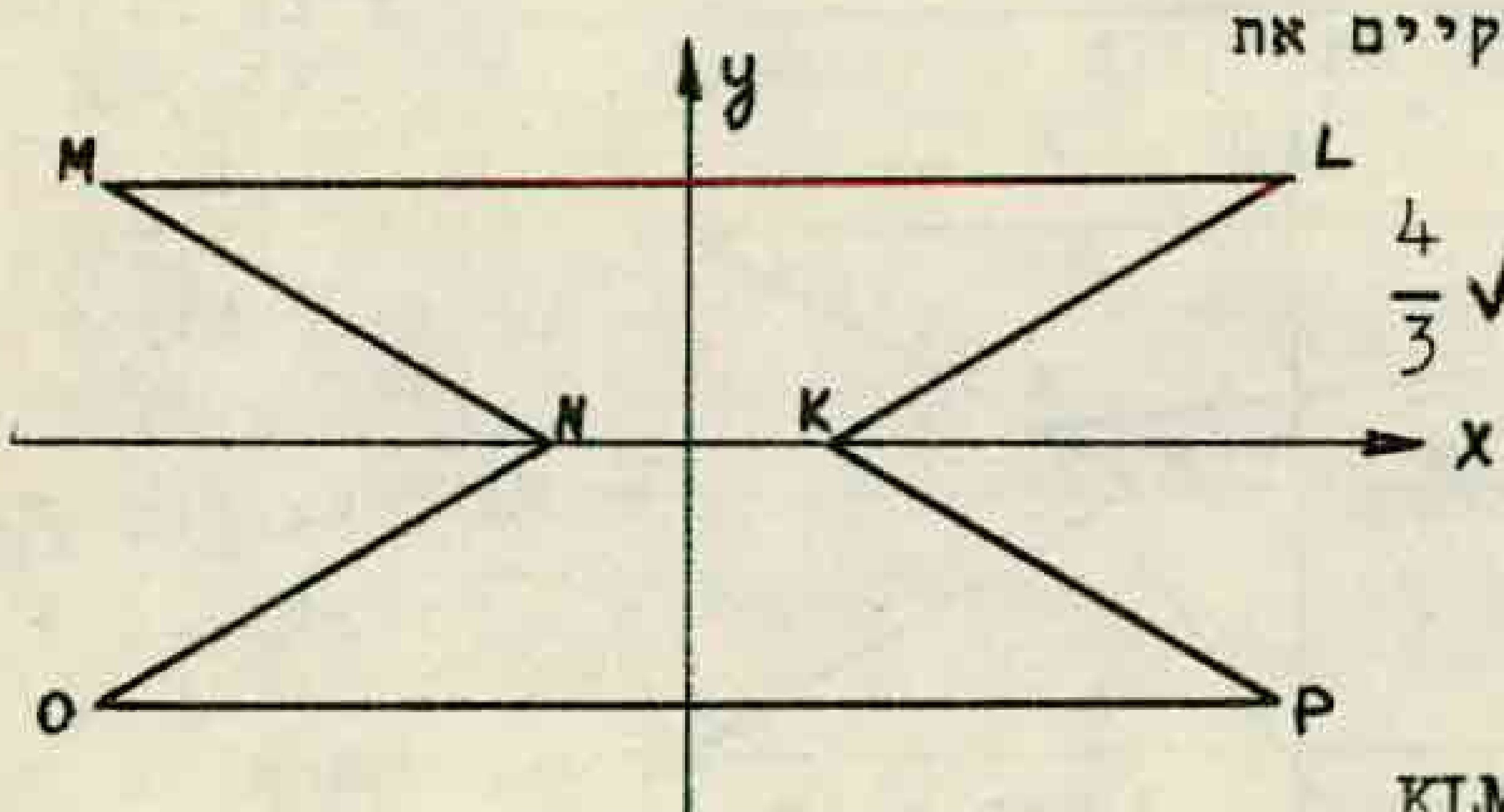
2. נעזר במערכת קרטזית במישור xy (ציור מס' 1).

יהא d מספר כלשהו המקיים את אי השויון

$$\frac{4}{3}\sqrt{3} < d < \frac{3}{2}\sqrt{3} \qquad (2.1)$$

הנקודות

$L(d;1), K(d-\sqrt{3};0)$
$M(-d;1), N(-d+\sqrt{3};0)$
$O(-d;-1), P(d,-1)$



ציור מס. 1

יוצרות משושה $KLMNOP$ סימטרי ביחס לצירי המערכת.

משפט 1. כל משושה כנ"ל עם d המקיים (2.1) הוא בעל התכונה הבאה:

(T) כל משלש שוה צלעות אשר קדקדיו על ההיקף ופנימו בפנים המשושה (משלש כזה יכונה להלן משלש פותר), הוא בעל שני קדקדים הנמצאים על אחת הצלעות של המשושה.

<u>הוכחה</u>: ברור כי אם ישנו משלש פותר $\triangle ABC$ שאינו מקיים את (T), אז אחד מקדקדיו, למשל A, הוא על צלע אלכסונית של המשושה, ובגלל הסימטריה לא תפגם הכלליות, אם נניח שזו הצלע KL

נבחין בין המקרים הבאים:

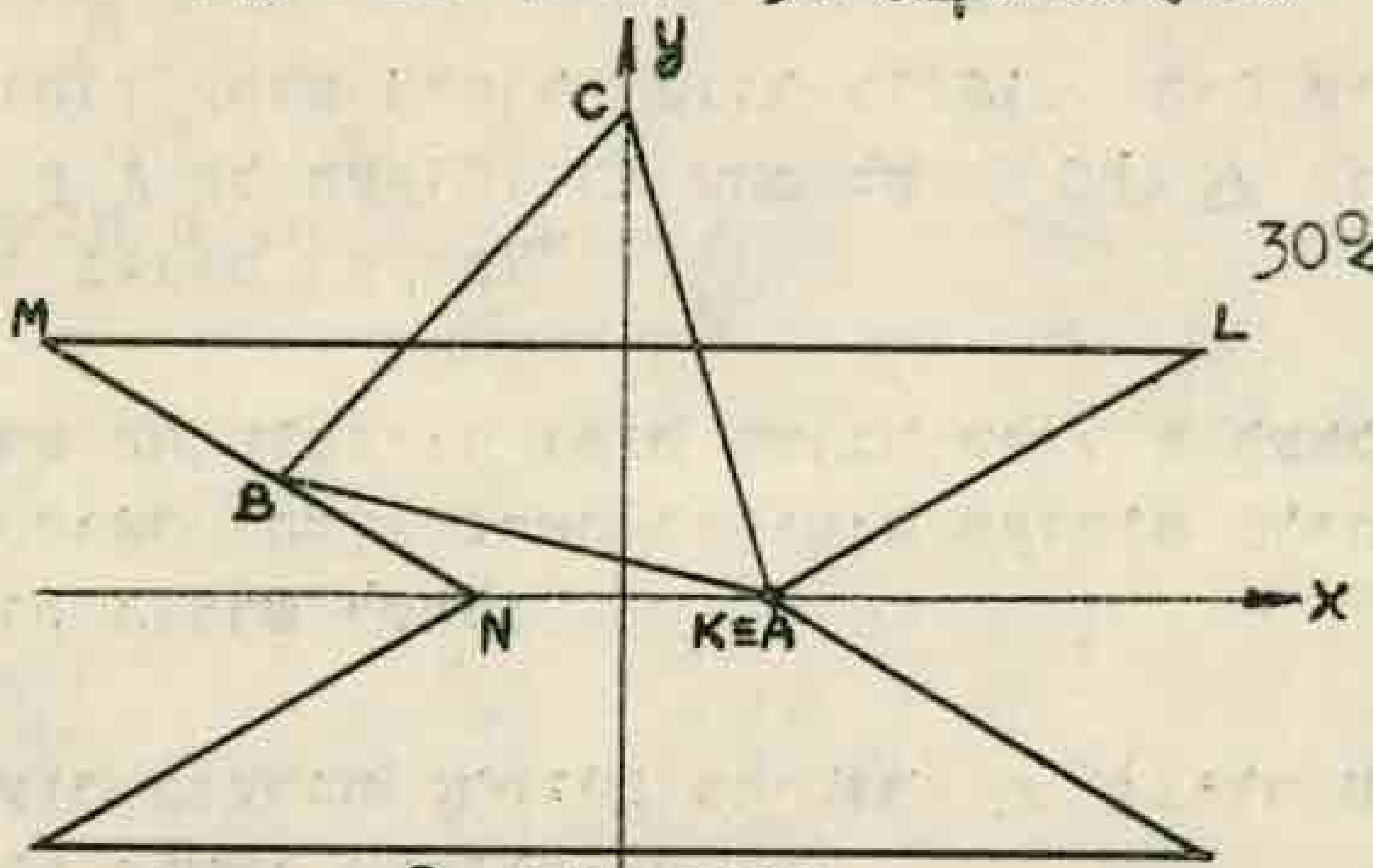
(1) B נמצאת על MN ו-

א) C מעל ציר ה-x-ים. (ציור מס' 2). במקרה זה די להראות, שכאשר $K\equiv A$ הקדקד C הוא מעל לקו ML ; ואמנם כאשר B נעה לאורך MN המקום הגיאומטרי של C הוא קטע ציר ה-y-ים אשר שעורי ה-y

*)"גליונות מתמטיקה" מס' 3 עמ' 66.

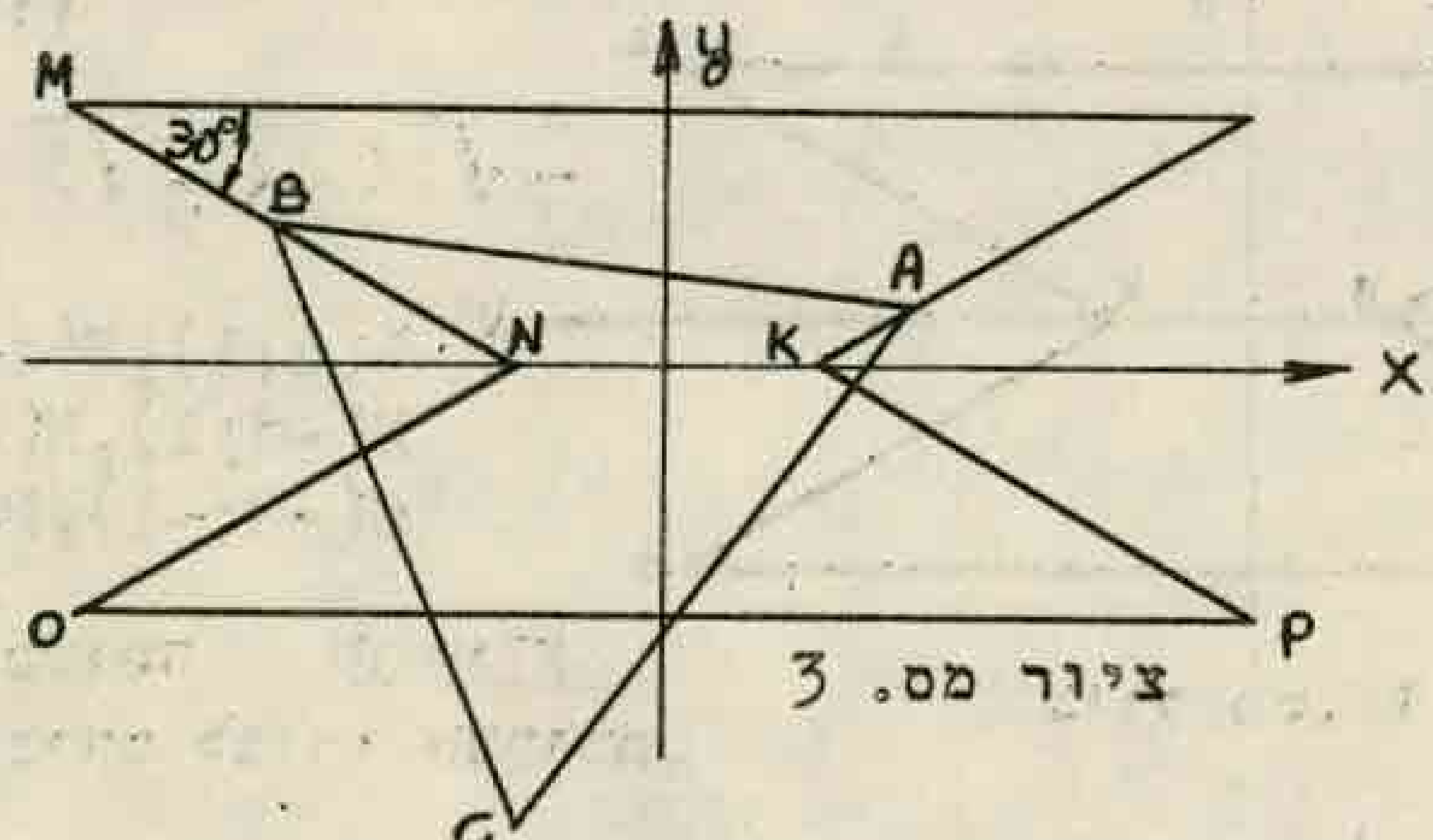
של נקודותיו מקיימים $y \geq (d-\sqrt{3})\sqrt{3} > 1$ (ראה תרגיל מס' 1)
(במקרה $K \not\equiv A$ העבר מקביל ל- AB דרך K או N).

ב) C מתחת לציר ה-x -ים. אם ה-y של B עולה על זה של A אז $30^\circ < \angle NBC < 60^\circ$ (ציור מס' 3). והצלע BC מכילה קטע שמחוץ למשושה; ובמקרה האחר $30^\circ < \angle KAC < 60^\circ$ וחלק מהצלע AC חורג החוצה. (פרט למקרה $A \equiv K, B \equiv N$ הסימטרי למקרה קודם).



ציור מס. 2

(2) B נמצא על NO. במקרה זה חורגת הצלע AC ליד A, או הצלע BC ליד B אל מחוץ למשושה, (צייר!)



ציור מס. 3

(3) B נמצא על KP אז $A \not\equiv K$ ו- AB כולו בחוץ.

(4) B נמצא על OP. כאשר B נע לאורך OP הקדקד השלישי C נע לאורך הישר $x=d-2\sqrt{3}$. (ראה תרגיל מס' 2). ישר זה עובר שמאלה מ- N היות ו- $d-2\sqrt{3} < -d+\sqrt{3}$ כתוצאה מהדרישה $d < \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

המקרים שאחד הקדקדים ימצא על ON או MN נבדקו לעיל. נשארת רק האפשרות ש- C נמצא על ML; אולם אם $A \equiv K$ אזי BC מונח על הישר $x=d-2\sqrt{3}$ ולכן חורג ואילו במקרה אחר חורגת הצלע AB ע"י הקודקוד A (הוסף ציור). בזה הוכח המשפט. ∎

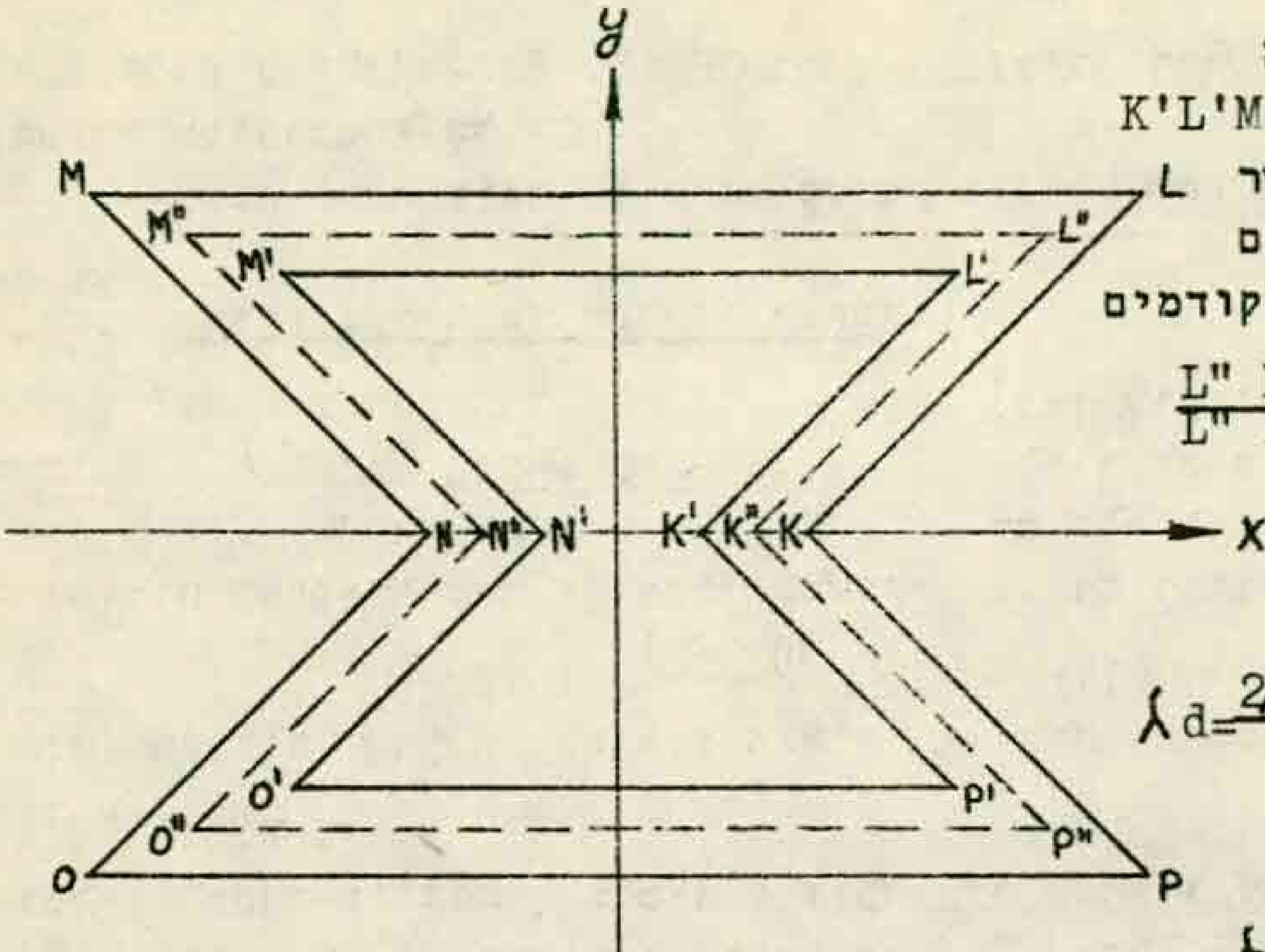
3. יהא λ מספר כלשהו המקיים

(3.1) $$\lambda < 1 \; ; \; \lambda > \frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}}{d} \; ; \; \lambda > \frac{d}{\frac{3}{2}\sqrt{3}}$$

נבנה משושה חדש K'L'M'N'O'P' ששעורי קדקדיו מתקבלים מהשעורים המתאימים של המשושה המקורי ע"י כפל ב- λ ($x'=\lambda x,\ y'=\lambda y$) כלומר המשושה החדש דומה למקורי ומוקטן פי λ (ראה ציור מס' 4) בהמשך נכנה בשם משושה בינים כל משושה K"L"M"N"O"P" אשר:

א) צלעותיו מקבילות לצלעות המתאימות של המשושים הקודמים;

(ציור זה אינו משקף את הצורה המדויקת כפי שהיא מתוארת בטקסט.
ציור מדויק יותר הכולל את הקשתות נתן בשער החוברת.)



ציור מס. 4

ב) מקיף את המשושה המוקטן K'L'M'N'O'P'

ג) סמטרי ביחס לישר K" N" . משושה בינים אינו בהכרח דומה לקודמים כי היחס $\frac{L''M''}{L''P''}$ עלול להיות שונה מ- $\frac{LM}{LP} = d$ יחד עם זה

$$\lambda d = \frac{2\lambda d}{2} < \frac{L''M''}{L''P''} < \frac{2d}{2\lambda} = \frac{d}{\lambda}$$

וכיון שלפי (3.1) $\lambda d > \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ו- $\frac{d}{\lambda} < \frac{3}{2}\sqrt{3}$ הרי

$$\frac{4}{3}\sqrt{3} < \frac{L''M''}{L''P''} < \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

כלומר עבור משושה בינים מתקיים התנאי היסודי (2.1) ומזה נובע שהוא בעל התכונה (T) .

4. בשלב הסופי של הבניה נחליף כל צלע של המשושה המקורי בקשת מעגלית העוברת דרך קצותיה ומשיקה לצלע המתאימה של המשושה המוקטן (לדוגמה: הצלע LM תוחלף בקשת המעגלית העוברת דרך הנקודות L ו- M והמשיקה ל- L'M'). נסמן ב- C את משושה הקשתות המתקבל.

<u>משפט 2.</u> כל משלש שוה צלעות אשר קדקדיו על C חורג אל מחוץ ל-C .

הוכחה: נבחין בין שני סוגי משולשים שוי-צלעות:

(I) משלשים ששנים מקדקדיהם נמצאים על קשת אחת - במקרה זה חורגת הצלע המחברת קדקדים אלה אל חוצו של C .

(II) אף זוג מהקדקדים אינו על קשת אחת. הקדקדים הם באיזור ה"טבעתי" שבין המשושים המקורי והמוקטן. לא קשה לראות שקיים אז משושה בינים $K_1\ L_1\ M_1\ N_1\ O_1\ P_1$ כזה שקודקודי המשלש מונחים עליו. לו משולש זה היה כולו ב- C , כי אז היה גם כולו במשושה בינים זה בנגוד לעובדה שהוא, כמו כל משושה בינים אחר, מצטיין בתכונה (T) .

בכך סתרנו את האפשרות שפנים העקום C שבנינו מכיל משלש שוה-צלעות אשר קדקדיו על C .

<u>בעיות</u> (הסימונים והמונחים כמו בגוף המאמר).

1. מצא את המקום הגיאומטרי של כל ה- C-ים, כאשר A הוא על הצלע KL ואילו B נע על MN . בדוק במיוחד את המקרה A ≡K
2. כנ"ל, פרט לכך ש- B נע לאורך OP .

3. A נע על LM ו- B על OP כך ש- AB עובר דרך K . מצא את המקום הגיאומטרי של C .

4. הוכח את הטעינה על קיום משושה בינים (ראה הוכחת משפט 2).

(המשך פתרון בעיות של התחרות המתמדת)

$$n \cdot 10n + \frac{n(n-1)}{2}$$

(כאן לוקחים בחשבון שכל תלמיד מכתה ז' זכה בכל משחקיו עם תלמידי כתה ח' וגם את הנקודות שתלמידי כתה ז' צברו במשחקים שבינם לבין עצמם). לכן:

$$n\,(11n-1) \leq \frac{n(n-1)}{2} + 10n^2$$

מכאן מקבלים $n \leq 1$. לפתרון הנתון $n \geq 1$ (התחרות השתתפו תלמידי כתה ז'), כך ש- $n=1$.

בסכום: מכתה ז' השתתף תלמיד 1 וזכה בכל משחקיו עם 10 תלמידי כתה ח'. הוא צבר 10 נקודות ותלמידי כתה ח' צברו $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ נקודות.

ח. 29. לשאלה 29 לא נתקבלה אף תשובה מלאה. שאלה זו הוצגה בשנת 1938 ע"י פרופ' ת. מוצקין, היא נפתרה אז ע"י פרופ' ח.חנני בלי הדרישה, שהנקודות תהיינה במישור אחד ופורסמה ב"רבעון למתמטיקה" מס' 5 ע' 10, ובאופן בלתי תלוי ע"י פרופ' א. רובינסון בשביל המקרה המישורי. הפרופ' פ. ארדש ודה-ברוין טפלו אף הם בבעיה זו ופתרונם פורסם בעתון מתמטי הולנדי.

בחוברת הבאה נפרסם מאמר שידון בבעיה זו ובמספר בעיות הקשורות אתה. נשמח בינתים (עד 25.3.61) לקבל פתרונות ומלואים לשאלה זו.

ח. 30. נשקול זוג מטבעות ונבחר את הכבדה בהן (שקילה 1) נשקול זוג מטבעות שני ונבחר את הכבדה בהן (שקילה 2). נשקול את שתי הכבדות זו לעומת זו (שקילה 3).

נסמן את משקל הכבדה ביותר ב- a ואת משקל השניה (בשקילה 3) ב- b. יהיו c ו- d משקלים של המטבעות שהשוינו עם a ו- b בהתאמה בשקילות 1 ו-2. נוכל לרשום כמסקנה מ-3 השקילות:

(1) $a > c$ (2) $a > b > d$

נסמן ב- e את משקל המטבע הנותרת. בשקילה 4 נשוה את e ו- b .

אם $b > e$ נשוה את e עם a
אם $b < e$ נשוה את e עם b
שקילה 5.

אחרי 5 השקילות יכולות להיות 4 אפשרויות: (5א) $e > a > b > d$ (5ב) $a > e > b > d$ (5ג) $a > b > e > d$ (5ד) $a > b > d > e$

כדי לקבוע את מקומו של המשקל c די בלא יותר משתי שקילות נוספות, שכן לפי (1) ידוע כבר ש- $a > c$. ואמנם:

במקרה של (5א) נשוה את c עם b .(שקילה 6) אם $b > c$ אין צורך בשקילות נוספות והסדר יהיה $e > a > c > b > d$

אם $b < c$ נשוה את c עם d (שקילה 7).

ונקבל $e > a > b > c > d$ או $e > a > b > d > c$.

(המשך בע' 124)

רשימת פותרי השאלות מס' ת. 16 - ת. 30.

תשובות חלקיות תסומנה בכוכב. בסוגרים רשום המספר הכולל של נקודות שצבר כל פותר מתוך השאלות ת. 16 - ת. 30. בלבד.

1. אורבך אברהם י"א "מעלה" ירושלים 16,18,25*, (7נק.)
2. אורנשטין שמואל מקצועי תיכוני ליד הטכניון 16,17,18,20,22,26 (15נק.)
3. גברון אביגדור, עירוני ט' ת"א. 16,18,20,22,25*,26,27* (16נק.)
4. גוטפרוינד אמנון וגולדנברג מנחם י' תיכון לוד-רמלה 16,18 (5נק.)
5. גינגולד אריה י' הריאלי חיפה 16,18,19,20*,21,22,25,26*,30 (26נק.)
6. דרזנר צבי עירוני ה' ת"א 17,18,19,20,21,22,23,25,26*,27,28, 30* (34נק.)
7. הס מיכאל י' תיכון לוד-רמלה 16 (2נק.)
8. הראל הדסה י"ב ק. מוצקין 17*,18*,22,24,25*,26,27*,28 (18נק.)
9. וולך אפרים י"ב ק. מוצקין 16*,18,20*,22,26*,28 (12נק.)
10. ויסמן ישעיהו י"א עירוני ט' ת"א. 16*,17,22,26* (6נק.)
11. לביא נתן ההיכון ליד האוניברסיטה ים. 16,17*,18,22*,26*,27 (10נק.)
12. לובזנס דניאל י"א חוגים חיפה. 16,17,18,19,20,21,22,23,24*, 25,26,27,28,30 (42נק.)
13. לוי אליהו ט' הריאלי חיפה. 16*,18,19,20,22,26,27, (17נק.)
14. מוהל משה הטכניון. 16,17*,18,20,25,26*,27,28* (18נק.)
15. מלניק דוד, י' תיכון לוד-רמלה 16 (2נק.)
16. סתוי יונתן ט' הריאלי חיפה. 17,18,19,22,25,26*,28 (17נק.)
17. עקביה גדעון יוסף 16,17*,18,22,25 (11נק.)
18. פולקמן יגאל י"ב הריאלי חיפה. 16,17,18,19,20,22,24*,25*, 26,27*,28 (27נק.)
19. פילמוס דניאל קבוץ קברי 16,18,20*,22*,26*,27,28* (13נק.)
20. פינקלשטין אורי י"א הריאלי חיפה. 16,17,19,20,22,25,26* (17נק.)
21. פרגזן עמנואל י"א הריאלי, חיפה. 16,17*,18,20,26* (11נק.)
22. פרויקט יעל י"א הריאלי חיפה. 17,18*,19,20,22,26*,27 (16נק.)
23. קודמאי אילן י"ב הריאלי חיפה. 16,17,18,19,20,21,22,25*,26*, 27*,28,30 (33נק.)
24. קם צבי י"ב הריאלי חיפה. 16,17,18,19,20*,21,22,25,26,27,28, 30 (34נק.)
25. קריב עודד י"א עירונית ה' ת"א.14 (5 נקודות. בטעות לא הודפסה שאלה זו ברשימה הקודמת).16,18,19,20*,21,22,23,25,26,27,28 (5+30נק.)
26. רזניק שמואל י"א עירוני ט' ת"א. 17,18*,22,25*,26*, (9נק.)
27. שהרן שלה י"א תיכון חדש ת"א.16*,17*,18,20,27*,28* (12נק.)
28. שורץ 16,17,18,20,22*,26*,27,28 (18נק.)
29. שור אמיר י"א תיכון ליד האוניברסיטה ים. 16,17,18,19,20,22, 24*,25,26*,27,28 (28נק.)
30. שילר איתן קבוץ מענית 16,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,30 (42נק.)
31. שפיגלר אמנון י"א תיכון ט' ת"א. 18,26 (4נק.)

התכן

הציורים בוצעו במחלקה לשרטוט ותכנון של בית הספר המקצועי ע״י הטכניון
בהדרכתו של מר א. הריש

כתובת המערכת:
א. גינזבורג, המחלקה למתמטיקה, הטכניון, חיפה.

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.
מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל״י.