רבעון למתמטיקה

ללמוד ולמחקר

בעריכת דב ירדן

חוברת 5

ירושלים, תמוז תש"ז, יוני 1947

כרך 1

תכן

כתבת המערכת: דב ירדן, מלאכי 20, ירושלים

המחיר 200 מיל

אחת הדרכים המובילות לחוג השעורים הקומפלכסיים הנקראים "מטריצות רציפות"

פסח חברוני

<u>הערת פתיחה.</u> את הקורא, אשר במקרה לא עסק כלל במשויות אינטגרליות פרדהולמיות, נבקש שיסגל לו את המושגים הפשוטים ביותר של תורה זו, כגון מהותם של "גרעין", "גרעין רציפרוקי" ו"דטרמיננטה פרדהולמית". למטרה זו יוכל להשתמש בספרים כגון: Horn, partielle Differentialgl. עמוד 188 והלאה או Kowalevski, Determinanten מהדורה ראשונה (1909) עמוד 455 או מהדורה שניה (1925) עמוד 254.

s ו t יהיו משתנים באינטרוול $0 \ldots 1$. $a, b, c \ldots$ יהיו פונקציות רציפות של s ו t. את האוסף של כל הפונקציות הנ"ל אנו מסמנים ב R. נציר לנו כי ב R מוגדרות שתי פעולות שאנו מכנים אותן <u>בחבור ובכפל</u>, ושאנו מסמנים אותן ב $a+b$ ו $[a,b]$. אנו דורשים ש $a+b$ ו $[a,b]$ יהיו תמיד אלמנטים של R. בכדי ש R יהוה חוג נחוץ ומספיק שתמלאנה הדרישות הבאות

$$a+b = b+a$$

a) $$(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$$

b) $$a+x = b$$

c) למשויה

יהיה תמיד פתרון אחד ורק אחד

$$[[a,b],c] = [a,[b,c]] = [a,b,c]$$

d) $$[a,b+c] = [a,b]+[a,c] \quad , \quad [a+b,c] = [a,c]+[b,c]$$

e) אנו מוסיפים, כי אם אמנם אין אנו דורשים ש R יהוה שדה (אף לא שדה בלתי קומוטטיבי) הרי אנו דורשים כי <u>בדרך כלל</u> יהיה הכפל הפיך כלומר

f) בדרך כלל יהיה למשויה $[a,z]=b$ (וכן למשויה $[z,a]=b$) פתרון אחד z ורק אחד.

את הגדרת החבור נקבל כרגיל, ונשיג ע"י כך שהדרישות a), b) ו c) תמלאנה. בכדי ש R יהיה שונה מחוג הפונקציות המקובל, עלינו לבקש דרך חדשה של הגדרת הכפל. כדי שהכפל יהיה <u>פונקציונלי</u> נחוץ שערכו של $[a,b]$ בנקודה s_1, t_1 יהיה תלוי בדרך כלל לא רק בערכם של $a(s_1,t_1)$ ו $b(s_1,t_1)$ כ"א בערכם של $a(s,t)$ ו $b(s,t)$ בכל הרבוע $0 \leq s,t \leq 1$. הגדרה המתקבלת על הדעת היא

$$[a,b] = a + \int_0^1 a(sr)b(rt)dr + b \tag{1}$$

כפל זה הוא פונקציונלי וגם הדרישה d) תמלא. שהרי אם ננהיג, כרגיל, את הסמון

$$(a,b) = \int_0^1 a(sr)b(rt)dr$$

אז יהיה

$$(a \pm b,c) = (a,c) \pm (b,c) \quad , \quad (a,b \pm c) = (a,b) \pm (a,c)$$

ועוד

$$((a,b),c) = (a,(b,c)) = (a,b,c)$$

וא"כ נקבל במקום 1)

$$[a,b] = a+(a,b)+b \tag{I}$$

ולפי"ז יהיה

$$[[a,b],c] = [a,b]+([ab],c)+c = a+(a,b)+b+(a+(a,b)+b,c)+c$$
$$= a+(a,b)+b+(a,c)+(a,b,c)+(bc)+c$$
$$[a,[b,c]] = a+(a,[b,c])+[b,c] = a+(a,b+(b,c)+c)+b+(b,c)+c$$
$$= a+(a,b)+(a,b,c)+(a,c)+b+(b,c)+c$$

ובזה הוכחה d).

גם f) תמלא כי משמעות המשויה

$$[a,z] = b$$
$$a+(a,z)+z = b$$

היא

$$z + \int_0^1 a(sr)z(rt)dr = b-a$$

כלומר

למשויה זו שהיא משויה אינטגרלית מהסוג השני יש כידוע פתרון אחד ורק אחד
כל עוד

1') $$D_a \neq 0$$

במקום ש D_a מסמן את הדטרמינגנטה הפרדהולמית של a. את $D_a=0$ יש לראות
כידוע כתכונה מיוחדת של הפונקציה $a(s,t)$. ובכן למשויה ($\bar{1}$ יש בדרך כלל
פתרון אחד ורק אחד. בדרך זו גם מכירים כי בדרך כלל יהיה למשויה $[z,a]=b$
פתרון אחד ורק אחד.
אשר ל e) יש להודות כי דרישה זו לא תמלא ע"י ההגדרה (1 שהרי

2) $$[a,b+c] = a+(a,b+c)+b+c$$

3) $$[a,b]+[a,c] = a+(a,b)+b+a+(a,c)+c = 2a+(a,b+c)+b+c$$

בכדי לקים את החוג שהגדרת הכפל שבו נתונה ע"י (1, יכולנו לשנות את
ההגדרה (1 של הכפל ל

$$[a,b] = pa+[a,b]+qb+r,$$

במקום ש q,p ו r הם שעורים הבלתי תלויים ב a ו b. נסיון זה לא יצליח.
הכדי להציל בכ"ז את קיומו של החוג שאנו מטפלים בבנינו אין לפנינו
אלא דרך אחד לקים בצד (1 גם את המשויה

4) $$[a,b+c] = 2a+(a,b+c)+c$$

את הסתירה הגלויה שבין (1 ו (4 נישב ע"י"כ שנגיד ב (1 a
כהגדרת הכפל. ו b הן פונקציות מ"סדר ראשון" ב (4 a, b ו c הן מסדר ראשון אבל b+c הוא
"מסדר שני", כלומר R מכיל שני מיני פונקציות של סדר ראשון ושל סדר שני.
הסכום של שתי פונקציות מסדר ראשון נותן תמיד פונקציה של הסדר השני באופן
זה תבוא (4 במקום (2. (4 ו (3 יתנו ביחד

4') $$[a,b+c]=[a,b]+[a,c]$$

כמו כן נקבל כעת אם a, b ו c הם מהסדר הראשון כמשוית הגדרה
$[a+b,c]=a+b+(a+b,c)+2c$ ומסילא יהיה

4") $$[a+b,c]=[a,c]+[b,c]$$

מאחר ש a+b יהיה מהסדר השני. בשל ('4 ו ("4 תתקים e). אבל כדי לקים
גם את

$$[a,b+c+d]=[a,b]+[a,c]+[a,d]$$
$$[a+b+c,d]=[a,d]+[b,d]+[c,d]$$

נאלץ להניח כי אם a, b , c ו d הם מהסדר הראשון יהיה a+b+c וכן b+c+d
מהסדר השלישי וגם הן, בעלות הסדר השלישי, יהיו כלולות ב R. $[a-b,c]$
ו $[a,b-c]$ יובילו אותנו לסדר האפס.

בקצור מהר נגיע לכך שיהיה $R = \dots R_{-2}+R_{-1}+R_0+R_1+R_2+\dots$

כל R_i יכיל את כל הפונקציות של הסדר ה i שהן בעצם כל הפונקציות של s
ו t. אם $i \neq k$ אז יהיו R_i ו R_k שונים בכך ש:

א) כל פונקציה של R_i נקראת מהסדר ה i. אלו של R_k נקראות מהסדר
ה k (ולפי"ז R_i ו R_k היו אידנטיים לולא שם הלואי, ה"סדר", מעכב).

ב) אם $a \in R_i$ ו $b \in R_k$ אז $a+b \in R_{i+k}$, $a-b \in R_{i-k}$.

בכדי שיתקים $[a,[b,c+d]]=[a,b,c]+[a,b,d]$
במקרה ש a,b,c ו d הן פונקציות מהסדר הראשון עלינו להניח כי $[b,c+d]$ הוא
מהסדר השני, כלומר מכפלה של פונקציה של הסדר הראשון בפונקציה של הסדר
השני תהיה פונקציה של הסדר השני ובדרך כלל יהיה:

ג) אם $a \in R_i$ ו $b \in R_k$ אז יהיה $[a,b] \in R_{i \cdot k}$ וגם יהיה
$$[a,b] = ka+(a,b)+ib$$

כדי להקל על אופן החשבון ועל הזכרון נרשום בצד כל פונקציה של s ו t
הכלולה ב R את הסדר שלה. באופן זה אנו נבהיג שני סימבולים ε_0 ו ε_1
שכשלעצמם אין להם כל מובן. את הפונקציות של s ו t נסמן מעתה ב-
$a_0, b_0, c_0 \dots$ את סדריהם נסמן ב $a_1, b_1, c_1, \dots$ ואת a_0 ביחד עם סדרו a_1,

את b_0 ביחד עם סדרו b_1, את c_0 ביחד עם סדרו c_1 וכו' נסמן ב

$$(a)=a_0\mathcal{E}_0+a_1\mathcal{E}_1, \quad (b)=b_0\mathcal{E}_0+b_1\mathcal{E}_1, \quad (c)=c_0\mathcal{E}_0+c_1\mathcal{E}_1, \ldots.$$

מפני חשיבותו של הסדר a_1 בשביל הפונקציה a_0 מובן כי נכתוב $(a)=(b)$ אז ורק אז כשיהיה גם $a_0=b_0$ וגם $a_1=b_1$ ובכן מ $(a)=(b)$ $a_0\mathcal{E}_0+a_1\mathcal{E}_1=b_0\mathcal{E}_0+b_1\mathcal{E}_1$ יוצא $a_0=b_0$ ו $a_1=b_1$ ולהפך. מכאן יצא ממילא כי ל $\mathcal{E}_0$ ו $\mathcal{E}_1$ יהיה <u>תפקיד של יחידות</u> ו $(a),(b),(c)\ldots$ הם <u>שעורים קומפלכסיים</u>.

מן האמור לעיל יצאו לנו כללי החבור והחסור אלו

5) $$(a)\pm(b) = a_0\mathcal{E}_0+a_1\mathcal{E}_1\pm b_0\mathcal{E}_0\pm b_1\mathcal{E}_1 = (a_0\pm b_0)\mathcal{E}_0+(a_1\pm b_1)\mathcal{E}_1$$

ובתור כלל הכפל יצא לנו

$$(a)(b) = (a_0\mathcal{E}_0+a_1\mathcal{E}_1)(b_0\mathcal{E}_0+b_1\mathcal{E}_1) = (b_1a_0+(a_0,b_0)+a_1b_0)\mathcal{E}_0+a_1b_1\mathcal{E}_1$$

או בסדור יותר מתאים

6) $$(a)(b) = \{(a_0,b_0)+a_0b_1+a_1b_0\}\mathcal{E}_0+a_1b_1\mathcal{E}_1$$

ואמנם נקל להוכח כי R זה המכיל את כל ה"אלמנטים" (שאנו קוראים להם משום מה "מטריצות רציפות") $(a),(b),(c)$ וכו' ואשר בו מוגדרים החבור, החסור והכפל ע"י (5 ו 6) מהוה <u>חוג</u>.

קל לראות כי ב R יהיה <u>אלמנט האפס</u> נתון ע"י

$$(0) = 0\mathcal{E}_0+0\mathcal{E}_1$$

וכי <u>אלמנט היחידה</u> יהיה נתון ע"י

$$(1) = 0\mathcal{E}_0+1\mathcal{E}_1$$

גם הדרישה f) תמלא כעת ב R. כלומר למשויות

6) $$(a)(u) = (b) \qquad (v)(a) = (b)$$

ימצאו בדרך כלל פתרונים חד משמעיים. בכדי לאשר עובדה זו, נבקש למצוא את תנאי הקיום של $(a)^{-1}$ כלומר מציאת אלמנט (x) אשר בשבילו יהיה גם

6') $$(a)(x) = (1) \quad \text{וגם} \quad (x)(b) = (1)$$

תחילה נעסוק במשויה

$$(a)(x) = (1)$$

אם נכתוב את (6' בפרוטרוט נקבל

$$(a_0\mathcal{E}_0+a_1\mathcal{E}_1)(x_0\mathcal{E}_0+x_1\mathcal{E}_1) = 0\mathcal{E}_0+1\mathcal{E}_1$$

כלומר

$$\{(a_0,x_0)+a_0x_1+a_1x_0\}\mathcal{E}_0+a_1x_1\mathcal{E}_1= 0\mathcal{E}_0+1\mathcal{E}_1$$

ואי"כ

7) $$(a_0,x_0)+a_0x_1+a_1x_0 = 0 \quad ; \quad a_1x_1 = 1$$

את 7_2) אפשר למלא רק אז אם

7') $$a_1 \neq 0$$

במקרה זה יהיה

$$a_1 = a_1^{-1}$$

מ 7_2) יצא כעת ע"י כפל ב x_1a_1

8) $$x_1(a_0,x_0)a_1+x_1a_0x_1a_1+x_1a_1x_0a_1= 0$$

ומכיון ש

$$x_1(a_0,x_0)a_1=x_1\int_0^1 a_0(sr)x_0(rt)dr.a_1=\int_0^1 x_1a_0(sr)x_0(rt)a_1dr=(x_1a_0,x_0a_1)$$

הרי יהיה לנו במקום (8

$$(x_1a_0,x_0a_1)+x_1a_0.x_1a_1+x_1a_1.x_0a_1=0$$

כלומר x_0a_1 הוא <u>הגרעין הרציפרוקי של</u> $\underline{x_1a_0}$ (לפי הטרמינים של יסודות תורת המשויות האינטגרליות הליניאריות). גרעין כזה קים בדרך כלל, כלומר כל עוד יהיה

9) $$D_{x_1a_0} \neq 0$$

יתקים x_0a באופן חד-משמעי. $D_{x_1a_0}$ מסמן כדלעיל את הדטרמיננטה הפרדהולמית של הגרעין x_1a_0. (עין משויה (1'). אנו למדים מכאן: כל עוד יתקימו שני אי-השויונים (7' ו (9 יהיה למשויה (6' פתרון אחד ורק אחד.

מוכיחים על נקלה כי אי-השויונים ('7 ו 9) גם מספיקים בשביל קיום של פתרון חד משמעי למשויה

$$(y)(a)=(1)$$

וכי במקרה זה יהיה גם $(x)=(y)$ כלומר אי-השויונים ('7 ו 9) גוררים אחריהם קיום החזקה $(a)^{-1}$. מקיומה של החזקה $(a)^{-1}$ יוצא על נקלה כי לכל אחת מן המשויות ($\bar{6}$ פתרון אחד ורק אחד ז.א. הדרישה f) מתקימת בשביל R.

<u>נוספות:</u> א) בכדי שתמלא הדרישה f) (שהיא אמנם איננה נחוצה בשביל קיום החוג R כשלעצמו אבל נחוצה בכדי שהחוג יהיה מכשיר פעיל לחקר משויות פונקציונליות ידועות. עין להלן) זקוקים אנו לפתרון המשויה (7_2 אבל x_1 יהיה בדרך כלל שבור כלומר זקוקים אנו ל"סדרים שבורים" דהינו עלינו להרשות שהשעורים $a_1, b_1, c_1, \dots$ יהיו שעורים אלו-שהם מהשדה הרציונלי.

ב) במקום השדה הרציונלי שהגענו אליו זה עכשו יכולים אנו לקחת כל שדה אלגבראי שהוא.

ג) אפשר לעשות עוד צעד בדרך ההכללה: יהא u משתנה ממשי באינטרואל 1.....0 יהיו $a_1, b_1, c_1, \dots$ פונקציות רציפות של u צורת האלמנטים החד-שים שלנו תהיה

$$(a) = a_0(st)\mathcal{E}_0+a_1(u)\mathcal{E}_1, \quad (b) = b_0(st)\mathcal{E}_0+b_1(u), \quad (c)=c_0(st)\mathcal{E}_0+c_1(u)\mathcal{E}_1\dots$$

<u>הגדרת השויון</u> ם $(a)=(b)$ יוצא $a_0=b_0$, $a_1=b_1$ ולהפך

<u>הגדרת החבור והחסור</u> $(a)\pm(b) = (a_0\pm b_0)\mathcal{E}_0+(a_1\pm b_1)\mathcal{E}_1$

<u>הגדרת הכפל</u>

$$(a)(b) = \left\{(a_0,b_0)+a_0(st)b_1(t)+a_1(s)b_0(st)\right\}\mathcal{E}_0+a_1(u)b_1(u)\mathcal{E}_1$$

גם שעורים אלו מהוים <u>חוג</u>. האפס והיחידה בחוג זה הם כדלעיל $(1)=0\mathcal{E}_0+1\mathcal{E}_1$, $(0)=0\mathcal{E}_0+0\mathcal{E}_1$. את החוג הזה נסמן ב R_u.

מובן שהחוג R_u מכיל בתוכו את החוג R כמקרה ספציאלי.

ד) את החוג הכולל האחרון R_u המתואר ב ג) אפשר לקבל ע"י "קונטינו-איזציה" מתאימה של המטריצה הרגילה. מכאן שמם "מטריצות רציפות". במלה <u>קונטינואיזציה</u> אנו מבינים את המעבר ממטריצה רגילה בעלת n שורות למטריצה שמספר שורותיה ועמודיה הוא כמספר הנקודות שבתחום 1....0. במלים אחרות כל נקודה של הרביע $0 \leq s,t \leq 1$ תהיה לנושאת מספר ידוע. בכדי שקבוצה כזאת של מטריצות מסוג זה יקים חוג בעל יחידה נחוץ ש"כמעט" כל הנקודות של הרביע ישאו שעורים "קטנים לאין סוף". הנקודות היוצאות מן הכלל שהן הנושאות של מספרים סופיים ממלאות קו ידוע (או גם כמה קוים) אבל יש גם דרכי קונטינואיזציה אחרות שאינן פרימיטיביות כ"כ וגם הן מובילות לשעורים קומפלכסיים ידועים שגם הן נקראות "מטריצות רציפות".

ה) מיני המטריצות הרציפות מרובות וכל מין מהן מהוה מכשיר טבעי ומועיל לחקירת סוג ידוע של משואת אינטגרליות ואינטגרודיפרנציאליות. כל אלה המשויות האינטגרליות והאינטגרודיפרנציאליות הכפופות לאותו מכשיר, כלומר לאותו חוק של מטריצות רציפות, מצטינות בתכונה משותפת ידועה בבנינם. בעברנו ממכשיר למכשיר נעבור ג"כ משדה פעולה לשדה פעולה אחר. בכדי לתת מושג על שיטת הפעולה של סוג המטריצות הרציפות R_u שתארנו אותן ב ג) ננהיג את הסימונים

$$\sigma_1(a|b_0)=(a_0,b_0)+a_1(s)b_0$$
$$\sigma_2(a_0|b)=(a_0,b_0)+a_0b_1(t)$$

ואז יהיו המשויות השיכות למכשיר הנ"ל $\sigma_1(a_0|y)=b_0$, $\sigma_2(y_0|a)=b_0$
(משויות אינטגרליות דפרדהולם)

10) $$y'_0 = \sigma_1(a|y_0)+b_0 = \int_0^1 a_0(s\lambda)y_0(\lambda t)\,d\lambda+a_1(s)y_0+b_0$$

$$y'_0 = \sigma_2(y_0|a)+b_0 = \int_0^1 y_0(s\lambda)a_0(\lambda t)\,d\lambda+y_0a_1(t)+b_0$$

$$z_0'=\sigma_1(a|z_0)+\sigma_2(z_0|b)+c_0=\int_0^1 a_0(s\lambda)z_0(\lambda t)d\lambda+\int_0^1 z_0(s\lambda)b_0(\lambda t)d\lambda+[a_1(s)+b_1(t)]z_0+c_0 .$$

$$y_0^{(n)} = \sum_0^{n-1}\sigma_1(\overset{i}{a}|y^{(i)})+b_0 = \sum_0^{n-1} i\int_0^1 \overset{i}{a}_0(s\lambda)y_0^{(i)}(\lambda t)d\lambda+\sum_0^{n-1} i\ \overset{i}{a}_1(s)y_0^{(i)}+b_0$$

בכל המשויות האלו תלויים a_0, b_0, c_0, y_0, z_0 וכו' מלבד ב s וב t גם ב x, משתנה חדש שאין לו שום שיכות ל s ול t. וכמו כן תלויים a_1, b_1 וכו' מלבד ב s או ב t גם ב x. את הדיפרנציאציה יש לקחת לפי x.

את כל המשויות הללו יש לראות כמשויות אינטגרודיפרנציאליות לינאריות רגילות אבל גם משויות אינטגרודיפרנציאליות חלקיות ושלמות(טוטליות ידועות שיכות לשטח זה.

התכונה המשותפת לכל המשויות הללו היא הופעת האופרטורים $\sigma_1(a|I_0)$ ו $\sigma_2(I_0|a)$ הממלאים תפקיד של "הכפלה מוכללת" ואמנם אם נקח $a_0\equiv 0$ ו a_1 בלתי תלוי ב s כ"א ב x לבד נקבל למשל במקום (10 את המשויה הדיפרנציאלית הרגילה

11) $$y_0' = a_1\cdot y_0+b$$

כלומר במקום המכפלה a_1y שב (11 מופיע ב (10 האופרטור $\sigma_1(a|y_0)$. בעברנו לחוג אחר נקבל כשטח הפעולה אותן המשויות אבל האופרטורים $\sigma_1(a\ y_0)$ ו $\sigma_2(y_0|a)$ יהיו אחרים, יותר כלליים.

בפרקים הבאים נביא קצת מן השמושים הפשוטים ביותר בשטח המשויות האינטגרליות דפרדהולם היכולים להעשות בעזרת השעורים הקומפלכסיים שפתחנום כאן. גם נביא דוגמא אחת של סוג חדש של "מטריצות רציפות".

על קבוצה המאפינת הזזות יחסית של זוג קבוצות-נקודות

מיכאל אדלשטין

במאמר זה נעסוק בתכונותיה של קבוצה אשר לה חשיבות רבה בדיון על אוסף כל המשותפים הנוצרים בין זוג קבוצות-נקודות כשמרשים הזזה יחסית ביניהן. לא נעמוד כאן על השימושים הגיאומטריים של הקבוצה האמורה אלא בעיקר נשתדל לברר את תלותה בתכונות זוג הקבוצות.

המרחב בו מוגדרות הקבוצות הוא המרחב האוקלידי ה n ממדי. אותיות רומיות גדולות תסמנה קבוצות-נקודות.

- . -

1. הגדרות: א) תהי M קבוצת-נקודות נתונה ו $\underline{r}$ וקטור סופי אז $M_{\underline{r}}$ יסמן את הקבוצה המוגדרת ע"י הקשר:

$m' \in M_{\underline{r}}$ אך ורק כאשר ישנו $m \in M$ המקיים $\underline{mm'}=\underline{r}$.

ב) תהי M קבוצת-נקודות נתונה ו a נקודה כלשהי אז $M^{\hat{a}}$ יסמן את הקבוצה המוגדרת ע"י הקשר:

$m' \in M^{\hat{a}}$ אך ורק כאשר ישנו $m \in M$ המקיים $\underline{ma}=\underline{am'}$.

ג) תהיינה K ו L שתי קבוצות-נקודות ו a נקודה כלשהי אז $V^a(K,L)$ יסמן את הקבוצה המוגדרת ע"י הקשר:

$$; \; x \in V^a(K,L) \Leftrightarrow K_{\underline{ax}} \cdot L \neq 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

במלים: הנקודה x תשתייך ל $V^a(K,L)$ אך ורק כאשר $K_{\underline{r}}$, בעד $\underline{r}=\underline{ax}$, ו L אינן זרות.

ברור ש $V^a(K,L)$ היא קבוצה לא ריקה אם K ו L שתיהן לא ריקות.

את $V^a(K,L)$ נקרא בשם "הקבוצה המאפינת" ואת a בשם "הנקודה היוצרת" ונסתפק לעתים בסמון מקוצר כגון V^a או V סתם כשהכונה ל K ו L קבועים.

כמו כן נשתמש במקום $[V^a(K,L)]_{\underline{r}}$ בסמן הפשוט יותר $V^a_{\underline{r}}(K,L)$ ובמקום $[V^a(K,L)]^{\hat{a}}$ ב $V^{\hat{a}}(K,L)$.

בהגדרות א) ו ב) ההעתקים המגדירים הם הזזה בוקטור קבוע והשתקפות בנקודה קבועה; את התכונות היסודיות של המעברים הללו מניחים כידוע.

2. משפט 1:

$$V^a(K,L) = V^b_{\underline{ba}}(K,L) \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

הוכחה: יהי $\underline{r}$ וקטור כלשהו המקיים: $K_{\underline{r}}.L \neq 0$ אז, לפי (1),

אם: $\underline{ax}=\underline{by}=\underline{r}$, מתקיים בבת אחת: $x \in V^a$ ו $y \in V^b$

אולם כידוע: $\underline{ax} = \underline{by} \Leftrightarrow \underline{yx} = \underline{ba}$. מ.ש.ל.

משפט 2:

$$V^a(K,L) = V^{\hat{a}}(L,K) \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

הוכחה: נשתמש באקויולנטיות הקלה לאמות:

$$K_{\underline{ax}}.L \neq 0 \Leftrightarrow L_{\underline{xa}}.K \neq 0$$

החלק השמאלי, בהתאם ל (1), גורר אחריו את $x \in V^a(K,L)$; אולם מהחלק הימני נובע לפי (1) ש x' המקיים $\underline{ax'}=\underline{xa}$ שייך ל $V^a(L,K)$ ולכן, לפי הגדרה ב) x שייך ל $V^{\hat{a}}(L,K)$. מ.ש.ל.

נוסחאות (2) ו (3) מראות שמעבר מנקודה יוצרת כלשהי לאחרת גוררת אחריה הזזה של הקבוצה המאפינת; החלפת סדר "הארגומנטים" היא שות-ערך להשתקפות הקבוצה הנ"ל בנקודה היוצרת.

במקרה הפרטי ש K מורכבת מנקודה אחת בלבד אז, אם בוחרים בה כנקודה היוצרת, מקבלים כפי שקל לבדוק:

$$V^a(a,L) = L \; . \; . \; . \; . \; (2')$$

והשמוש ב (3) נותן: $V^a(L,a) = L^{\hat{a}}$ . . . . .(3') ;

מעבר לנקודה אחרת יתן: $V^b(a,L) = L_{\underline{ab}}$ . . . .(2") ;

וכמו כן: $V^b(L,a) = (L^{\hat{a}})_{\underline{ab}}$ . . .(3") .

<u>משפט 3:</u> $V^a(H+K,L) = V^a(H,L)+V^a(K,L)$. . .(4) .

הוכחה: $(H+K)_{\underline{ax}}.L\neq 0 \Leftrightarrow K_{\underline{ax}}.L\neq 0$ או $H_{\underline{ax}}.L\neq 0$ או .

באופן אנלוגי מקבלים: $V^a(K,L+M) = V^a(K,L)+V^a(K,M)$...(4')

וכמו כן: $V^a(K,L)\supset V^a(H,L)$ ...(5) $\Leftarrow$ $K\supset H$

<u>משפט 4:</u> יהיו K ו L כדורים*) n ממדיים במרחב של n ממדים בעלי הרדיוסים R_K ו R_L בהתאם, אז $V(K,L)$ הוא כדור בעל הרדיוס R_V:

$$R_V = R_K + R_L \, .$$

הוכחה: יהיה a המרכז של K ו b המרכז של L אז בעד כל x המקיים $\overline{bx}\leq R_L+R_K$, כאשר $\overline{bx}$ מסמן את אורך הקטע אשר קצותיו הם b ו x, יהיה: $K_{\underline{ax}}.L\neq 0$ ואז $x\in V^a(K,L)$; בעד כל x אחר הכדורים $K_{\underline{ax}}$ ו L זרים אהדדי ולכן V^a הוא המקום הגיאומטרי המוגדר ע"י האי-שויון דלעיל ז.א. כדור ברדיוס R_K+R_L.

ברור שהדבר נכון בעד כל בחירה של a לפי משפט 1. מ.ש.ל.

<u>משפט 5:</u> יסמן $d(K)$ את קוטרה של הקבוצה K ובהתאם $d(L)$ ו $d(V)$ את קוטריהן של L ושל $V^a(K,L)$ אז קיים:

$$d(V)\leq 2d(K) + 2d(L)\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot(6) \, .$$

הוכחה: יהי 'K כדור בעל קוטר שאינו עולה על $2d(K)$ המכיל את K (כדור כזה, קל לראות, ישנו תמיד) וכן 'L כדור כזה ביחס ל L;

אז קיים לפי (5): $V^a(K',L')\supset V^a(K,L)$ בעד כל a.

ממשפט 4 נובע: $d(V^a(K',L')) = d(K')+d(L')$

ומכאן: $d(V)\leq 2d(K) + 2d(L)$;

אפשר למצוא דוגמאות לקבוצות בעלות קבוצה-מאפינת אשר קוטרה ממלא את (6) בסימן השויון.

3. הדוגמה של 2 קטעים לא מקבילים במישור מראה ש $V^a(K,L)$ יכולה להכיל נקודות פנימיות על אף היות K ו L מחוסרות נקודות כאלה. מאידך מספיק שאחת הקבוצות K או L תכיל נקודה פנימית בכדי של V תהיינה נקודות כאלה. בכדי להוכח בנכונות הטענה יהי l מרכזו של כדור $U(l)$ המוכל כולו ב L ותהי k נקודה כלשהי של K;

לפי (5) ו (2'): $V^k(K,L)\supset V^k(k,U(l)) = U(l)$;

ובהנחות אנלוגיות ביחס ל K, היינו: k יהיה מרכזו של כדור $U(k)$ המוכל ב K ו l נקודה כלשהי של L, מקבלים מ (5), (3) ו (2") את:

$$V^k(K,L)\supset V^k(U(k),l) = V^k(l,U(k)) = (U(k))_{\underline{kl}} \, .$$

בשני המקרים V^k, ולכן $V^a(K,L)$ עם a כלשהו, מכיל נקודה פנימית מה שמוכיח את הטענה.

הנקודות הפנימיות, לפי הגדרתן, הן מרכזים של כדורים די קטנים המוכלים בקבוצה. נקודות כאלה ב V יש להן משמעות גיאומטרית ביחס ל K ו L והיא: אם x היא פנימית של V אז יחד אם $\underline{ax}$ המקיים לפי (1): $K_{\underline{ax}}.L\neq 0$ גם כל $\underline{r}$ המקיים: $\underline{r}=\underline{ax}+\underline{xx'}$, כאשר $\overline{xx'}$ קטן באורכו מרדיוס הכדור שמרכזו

ב x והמוכל ב V, גם $K_{\underline{r}}.L\neq 0$; במלים אחרות: הזזה בכוון כלשהו של $K_{\underline{ax}}$, בפחות מאורך מסוים, משאירה משותף לא ריק.

מאידך נקודות השפה של V השייכות לו הן מחוסרות תכונה זו; אפשר לכן, לכל $\varepsilon>0$, למצוא וקטור $\underline{r}$ בעל אורך הקטן מ ε המקיים: $K_{\underline{r}}.L=0$. השיקולים האלה מצדיקים הבחנה בין המצבים הנקבעים ע"י נקודות פנימיות לבין אלה הנקבעים על ידי נקודות שפה של V.

הגדרה ד): קבוצה $K_{\underline{ax}}$ ו L הן במצב A כאשר x היא נקודה פנימית של $V^a(K,L)$ ובמיוחד K ו L במצב A כאשר a היא פנימית של $V^a(K,L)$.

אפשר להוכח שאצל גופים גיאומטריים רגולריים A כולל את כל מצבי החתוך.

הגדרה ה): קבוצה $K_{\underline{ax}}$ ו L הן במצב α אם x היא נקודת שפה השייכת ל V ובמיוחד K ו L הן במצב α אם a היא נקודה כזאת.

אצל גופים גיאומטריים רגולריים כל מצבי α הם מצבי מגע.

4. משפט 6: תנאי מספיק לקשירות $V^a(K,L)$ הוא שהקבוצות K ו L תהיינה שתיהן קשירות.

הוכחה: מספיק להראות שלכל זוג נקודות x,y של V אפשר למצוא קבוצה חלקית של V המכילה את x ואת y והקשירה בעצמה. לשם כך תהיינה l_x ו l_y נקודות של $K_{\underline{ax}}.L$ ו $K_{\underline{ay}}.L$ בהתאם ותהיינה k_x ו k_y הנקודות ב K המקיימות:

$\underline{k_x l_x} = \underline{ax}$ . . . . .(x) ו $\underline{k_y l_y} = \underline{ay}$ . . . .(y)

ניצור את: $V^a(k_x,L)$ ואת $V^a(K,l_y)$

אז לפי (2"): $V^a(k_x,L) = L_{\underline{k_x a}}$

וכמו כן לפי (3"): $V^a(K,l_y) = (L^{\hat{a}})_{\underline{l_y a}}$

נראה שהקבוצה C: $C = V^a(k_x,L)+V^a(K,l_y)$ מקיימת את התנאים הנזכרים לעיל.

ובאמת: C היא קבוצה חלקית של V כסכום של קבוצות חלקיות של V.

C מכילה את x ואת y כי לפי (x): $V^a(k_x,L)\supset V^a(k_x,l_x) = x$

ולפי (y): $V^a(K,l_y)\supset V^a(k_y,l_y) = y$;

C היא קבוצה קשירה כי: $L_{\underline{k_x a}}$ קשירה כקבוצה המתקבלת ע"י הזזה מקבוצה קשירה (לפי ההנחות), $(\overline{K^{\hat{a}}})_{\underline{l_y a}}$ קשירה כקבוצה המתקבלת ע"י הזזה והשתקפות מקבוצה קשירה;

וקיים $V^a(k_x,L).V^a(K,l_y)\supset V^a(k_x,l_y)\neq 0$. מ.ש.ל.

הדוגמה של כדור ו 2 נקודות ברוחק הקטן מקוטר הכדור מלמדת שאין הנחות המשפט הכרחיות לקשירות V.

5. משפט 7: אם K ו L סגורות אז $V^a(K,L)$ סגורה.

הוכחה: מספיק להראות שאם $x\in$ Comp V אז קיימת סביבה U(x) שאף היא שייכת למשלים. לשם כך נסתכל ב $K_{\underline{ax}}.L$ בעד x כזה. מכיון ש L היא קבוצה סגורה ו $K_{\underline{ax}}$ סגורה (כמתקבלת ע"י הזזה, שבודאי שומרת על סגירות, מ K) וזרות לפי בחירת ה x הרי שרוחקן ρ חיובי $\rho>0$ ולכן בעד כל x' הממלא את $\overline{xx'}<\rho$ קיים:

$$(K_{\underline{ax}})_{\underline{xx'}}.L = K_{\underline{ax'}}.L = 0$$

ז.א. בעד כל הנקודות x' של כדור ברדיוס הקטן מ ρ מתקיים $x'\in$ Comp V.

מ.ש.ל.

6. בכל המשפטים שהובאו עד כאן התכוונו בעיקר לאפשר את ההוכחה של תכונה מסוימת של V אשר לה חשיבות נכרת בחקירת מצבי המגע במובן מוכלל בין קבוצות נקודות.

הגדרה ו   קבוצת נקודות נקראת תמונת-קטע אם קיים העתק חד-ערכי ורציף של קטע סגור אשר תמונתו היא הקבוצה הנתונה:

משפט (Sierpinski): תנאי הכרחי ומספיק לכך שקבוצה F תהיה תמונת קטע הוא ש F תהיה קבוצה קשירה וסגורה ולכל $\varepsilon > 0$ נתון אפשר למצוא מספר סופי של קבוצות קשירות וסגורות בעלות קוטר הקטן מ ε שסכומן F.

הוכחה: Hausdorff: Mengenlehre, 1927, p.205

משפט 8: אם K ו L הן תמונות-קטע אז $V^a(K,L)$ אף היא תמונת-קטע.

הוכחה: לפי ההנחה אפשר לכל $\varepsilon > 0$ נתון למצוא K_i $(i=1,2,\ldots,n)$ ו L_j $(j=1,\ldots,m)$ סגורות וקשירות כאלה שקיים:

$$K = \sum_1^n K_i \quad \text{ו} \quad L = \sum_1^m L_j \quad \text{כאשר} \quad d(K_i) < \frac{\varepsilon}{4}$$

בעד ה i-ים דלעיל וכמו כן $d(L_j) < \frac{\varepsilon}{4}$ בעד ה j-ים הנ"ל. אבל אז לפי

$$V^a(K,L) = V^a\left(\sum_1^n K_i \, , \sum_1^m L_j\right) = \sum_1^n \sum_1^m V^a(K_i,L_j) \quad . \; . \; .(4)$$

אולם כל אבר ב mn המחוברים $V^a(K_i,L_j)$ הוא בעל קוטר:

$$d(V^a(K_i,L_j)) \leq 2\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

לפי (6).

והקבוצה V היא קשירה וסגורה לפי המשפטים 6 ו 7   מ.ש.ל.

את אי הכרחיות תנאי המשפט נראה לפי הדוגמה הבאה:

יהי K קטע סגור ו L זוג נקודות על ישר מקביל שרוחקן ההדדי קטן מאורך הקטע, $V^a(K,L)$ הוא אז קטע סגור וסופי ולכן בודאי תמונת-קטע.

הבעיה של קריטריון לתכונה הנ"ל, שכפי שהוזכר כבר, יש לה חשיבות לשימושים, היא עדיין פתוחה.

חלוקת מצולעים קמורים למחומשים

ברוך ברנהים

1.1 כל מצולע קמור אפשר לחלק ע"י מספר סופי של קטעים למשולשים, למרובעים או למחומשים. החלוקה למשולשים היא טריויאלית וחלוקה למרובעים או למחומשים אפשר למשל לקבל ע"י חלוקה קודמת למשולשים וחלוקת כל משולש ל 3 מרובעים או ל 9 מחומשים (ר' ציורים 3ג ו 4ב). לתשומת לב מיוחדת ראויה בזה העובדה שאפשר לחלק מצולע בעל n קדקדים למצולעים בעלי $k=3,4,5$ קדקדים גם כאשר $n=k$. בנגוד לכך אין החלוקה אפשרית כאשר $n\neq k$ אבל $k>5$. (1

1.2 בעבודה הנוכחית נמצא את מינימום המחומשים בחלוקות של מצולעים למחומשים. בשאלה זו דנה כבר עבודה של Mahlo (2, אך לא נתן שם פתרונה המלא. Mahlo אמנם מביא כבר את המשפט כי מינימום המחומשים בחלוקה של משולש הוא 9, בחלוקת מרובע 8 ובחלוקת מחומש 6, אך לא הצליח להוכיח כי באמת נכונה השערתו אשר הניח ביסוד הוכחתו למשפט זה, והיא, שבכל חלוקה של משולש, מרובע או מחומש למחומשים ישנם בהכרח מחומשים שאין להם צלע בשפת המצולע המחולק. הוכחה לעובדה זו תנתן בראשית העבודה הנוכחית (משפט 1) באפן פשוט ביותר ואחרי זה תנתן הוכחה חדשה למשפט המינימום. מבחינה אחת טפולו של Mahlo הוא אמנם יותר כללי: Mahlo מסתכל גם בחלוקות בהן ישנם מחומשים אשר על אחת מצלעותיהם הפתוחות (ז"א בלי קצוות) ישנם קדקדים של מחומשים שכנים. בעבודה הנוכחית נגביל את עצמנו לחלוקות תקינות בלבד, דהיינו לחלוקות בהן אין קדקדים על צלעות המחומשים. הגישה הכללית של Mahlo גורמת לקשיים גדולים ביותר בשעה שרוצים לעסוק בחלוקות למצולעים עם $k>5$ קדקדים, היות ובשלל מהקדקדים מובנם הטופולוגי ומשום כך לא הצליח Mahlo להתקדם בכוון זה. (3

דרך נוספת להוכחת משפט מינימום המחומשים נתנה ע"י הד"ר מ ו צ ק י ן. הרעיון המונח ביסוד ההוכחה הזו הוא פשוט ביותר, אך הבצוע איננו נוח פרט למקרה של חלוקות המחומש עצמו. השמוש במשפט 12 המחומשים (למה 2, ר' להלן) בהוכחתי אשר תנתן כאן, נעשה אף הוא לפי עצתו של הד"ר מוצקין.

1.3 נוסחה עבור חסם תחתון למספר המצולעים בחלוקת מצולע בעל n קדקדים למצולעים בעלי $k>5$ קדקדים נמצאת כבר אצל Mahlo. כפי שנוכחתי אפשר גם תמיד להשיג את הערך המינימלי הזה בכל מקרה שאפשרית חלוקה בכלל. הטפול במינימום המצולעים בחלוקות למשולשים או למרובעים הוא ברובו טריויאלי ורק אזכיר בסוף את התוצאות כדי להורות על האנלוגיה הקימת לגבי מה שנמצא עבור מחומשים.

2.1 נסתכל באפן כללי במצולע P בעל n קדקדים, אשר פנימו מחולק ע"י מספר סופי של קטעים ל m מצולעים קמורים $P_1,\dots,P_m$ בעלי k קדקדים כל אחד. קבוצת הקטעים המהווים את P ואת חלוקתו נקרא בשם רשת.

קבוצת הקטעים אשר אינם שיכים ל P מתפרקת ל t חלקים מכסימליים קשירים אשר יקראו עצים. אותם ה-P_i אשר יש להם לכל היותר מספר קדקדים אך לא צלעות על גבי P, נקראים גרעינים. מספרם הוא m'.

2.2 ישנם חמשה מיני קדקדים אפשריים ברשת.

1. חודים ז"א קדקדים של P בהם נפגשים רק שני קטעים של הרשת.
2. קדקדי היקף תקינים ז"א קדקדים של P שהם גם קדקדים של לפחות שנים מבין ה-P_i.
3. קדקדי היקף בלתי תקינים ז"א קדקדים של לפחות שנים מן ה-P_i אשר הם על צלע פתוחה (ז"א בלי קצוות) של P.
4. קדקדים פנימיים תקינים ז"א קדקדים שאינם על P ואף לא על צלע פתוחה של אחד ה-P_i.
5. קדקדים פנימיים בלתי תקינים ז"א קדקדים שאינם על P והנמצאים על גבי צלע פתוחה של אחד ה P_i.

(1 ר' P.Mahlo, Topologische Untersuchungen über Zerlegung in ebene und sphärische Polygone. (Diss.Halle;1908)p.54

וכן בעבודה של ד"ר ת. מוצקין וב. ברנהים העומדת להופיע בקרוב.

(2 loc.cit.

(3 בחלוקות של מצולעים עם n קדקדים למצולעים עם $k>5$ קדקדים תדון העבודה הנ"ל של מוצקין וברנהים אשר תופיע בקרוב. תוצאות נוספות שנמצאו על ידי בשטח זה טרם פורסמו. נחקרו באפן ממצה השאלות של אפשרות החלוקה, של המכסימום ושל המינימום של מספר המצולעים המחלקים ואותן השאלות גם עבור מספרי הגרעינים (ר' סעיף 2.1 של העבודה הנוכחית.) אחר טפול [illegible]

ברשת ישנם a חודים, $\bar{b}$ קדקדי היקף תקינים, $b-\bar{b}$ בלתי תקינים ו $\bar{c}$ פנימיים תקינים ו $c-\bar{c}$ בלתי תקינים. קיים $n=a+\bar{b}$.
לפי שהזכרנו נעסק רק בחלוקות תקינות כלומר $\bar{c}=c$.
בדיוננו בבעית מינימום המחומשים עבור $n\leq 5$ נמיין את הרשתות קדם לפי a ולא לפי n. נמצא גם כי אמנם $\bar{b}=0$ ולכן $n=a$ בחלוקות המינימום עבור ערכי n אלה. רשת אשר בה $n>a$ באשר $a\geq 3$ אפשר גם כמעט בכל המקרים להעתיק באפן טופולוגי על חלוקה קמורה של מצולע קמור בעל a קדקדים בלבד. את חלוקת המרובע בציור 1 אפשר למשל להעתיק על חלוקת המטולש שבציור 3ג. 4) לפיכך הרשת אינה אפינית עבור n כי אם עבור a.

רשת עם $a=2$ אפשר להעתיק על דואון (מצולע בעל שני קדקדים) על גבי כדור ורשת בעלת $a=0$ על חצי כדור. על משטחים אחרים אפשר גם לדבר על "מצולעים" בעלי קדקד יחיד ועליהם אפשר להעתיק רשתות עם $a=1$.

הואיל וכל התוצאות אשר נמצא חלות למשל גם על מצולעים כדוריים, נרחיב את תחום הסתכלותנו ע"י הדיון ב a גם למצולעים בעלי פחות מ 3 קדקדים.

כל בעיתנו היא בכלל למעשה טופולוגית כי אפשר להחליף את תנאי הקמירות בתנאי טופולוגי (דבר זה לא יעשה כאן) ומספר החודים מראה לנו רק כמה מבין ה P_i הם בעלי פחות מ k קדקדים במובן הטופולוגי. לפיכך נוכל גם לצייר רשתות עם $a<3$ כפי שנעשה בציורים 3ד-ו, 4ג-ה, 5ב-ד.

2.3 מספר הקטעים הנפגשים בקדקד של רשת נקרא בשם ערכיות הקדקד. ערכיותו של קדקד מינוס 3 נקראת בשם הטטרולנטיות שלו. היא 1 בקדקד ארבע ערכי. הטטרולנטיות של חוד היא -1. סכום הטטרולנטיות של כל קדקדיה של רשת יסומן f וסכום הטטרולנטיות החיוביות בלבד יסומן $\bar{f}$.

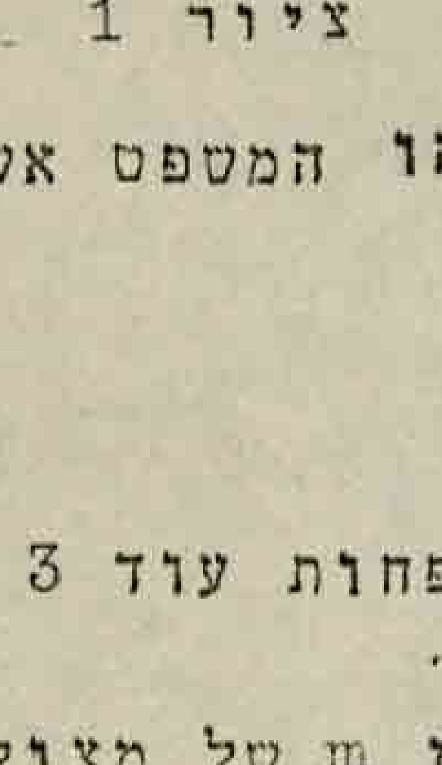
3.1 למה 1. בכל רשת $m-b=m'-t+1$.

הוכחה: כאשר $t=1$ ברור מיד כי $m-m'=b$, וכאשר $t>1$ רואים את נכונות השויון על ידי זה שמוציאים עץ אחר עץ מהרשת.
שוה הערך המחומש של מצולע הוא 6 מינוס מספר קדקדיו. זה 1 עבור מחומש.

למה 2. ("משפט 12 המחומשים"). סכום שויי הערך המחומשים של P ושל כל ה P_i ברשת הוא $12+2f$, כאשר P יחשב למצולע בעל $a+b$ קדקדים.

הערה: הואיל והטטרולנטיות של חודים היא -1 והואיל וכל חוד שייך ל P_i אחד וכן ל P, אפשר גם שלא לספר את החודים כלל ואז יבוא $12+2\bar{f}$ תחת $12+2f$.

ההוכחה היא שנוי קטן (בגלל החודים) מהוכחת המשפט האנלוגי לפוליאדרים. 5)
נוכל לבטא את המשפט בשתי הצורות הבאות:


ציור 1

ז"א
$$(6-b)+n-\bar{b}+m(6-k)=12+2\bar{f}$$
.2')
$$a+m(6-k)-b=6+2\bar{f}$$
או
.2'')
$$a=(k-5)m+6+t+2\bar{f}-m'-1$$
מה שמתקבל מלמה 1 לאחר הצגה.

3.2 משפט 1. אם $k=5$ ועוד $a<6$ אז $m'\geq 6-a>0$.

הערה: מספר הגרעינים בודאי גדול אפוא מאפס כאשר $n<6$ וזהו המשפט אשר הניח Mahlo ללא הוכחה ביסוד משפט המינימום.

הוכחה: $k=5$, $t\geq 1$, $\bar{f}\geq 0$ ולכן לפי 2'' קיים $m'\geq 6-a$.

מסקנה 1. כאשר $k=5$ ועוד $a<6$ אז $m\geq 9-a$.

הוכחה: כאשר $m'>0$ אז $m\geq 3+m'$ הואיל וישנם בגלל הקמירות לפחות עוד 3 מצולעים שאינם גרעינים. אולם עבור $k=5$, $a<6$ ראינו כי $m'\geq 6-a>0$.

3.3 את מספר החודים המינימלי היכול להופיע ברשת עם מספר נתון m של מצולעים P_i בעלי k קדקדים נסמן ע"י $A_k(m)$.

לקבוצת צלעות הגרעינים של רשת נקרא בשם הרשת הנגזרת של הרשת הנתונה. יתכן כי הרשת הנגזרת אינה קשירה; במקרה זה נקרא לכל אחד מחלקיה הקשירים המכסימליים בשם גוש גרעינים. מספר החודים ברשת הנגזרת יסומן ע"י a'.

למה 3. בכל רשת $b\geq A_k(m')+2(t-1)$ באשר m' מספר הגרעינים בה.

הוכחה: שני קדקדים של רשת יקראו קשירים (באפן פנימי) כאשר ישנו קו שבור שאינו חותך את עצמו המורכב מצלעות של הרשת שאינן שיכות ל P ולא לרשת הנגזרת, ואשר קצותיו הם שני הקדקדים הנדונים.

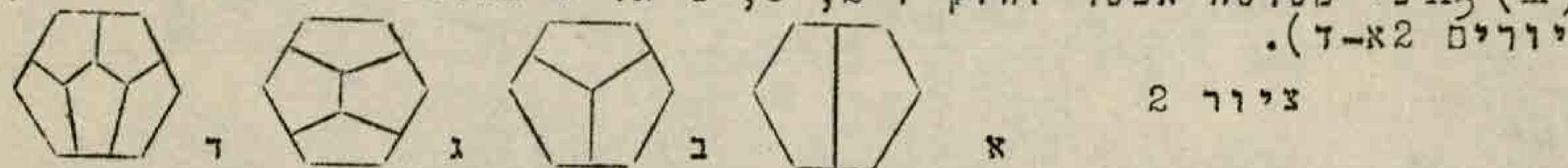
4) חקרתי את התנאים ההכרחיים והמספיקים להקטנתו של n ברשת אשר בה $\bar{b}>0$. ברוב המקרים המענינים לגבי חקירות על חלוקות למחומשים הדבר אפשרי.
5) ר' למשל E.Steinitz, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder (1934) p.8.

אם ישנו ברשת הנגזרת רק גוש גרעינים יחיד, אז ברור כי כל חוד של הרשת הנגזרת קשור ברשת המקורית עם קדקד על גבי P ושני חודים כאלה אינם קשורים לקדקד אחד. לפיכך $b \ge a'$. אולם $a' \ge A_k(m')$. אם ישנו רק גוש גרעינים יחיד הרי כולו שייך לעץ יחיד וכל עץ נוסף גורם על כן לפחות להגדלת b ב 2. קיים אפוא $b \ge A_k(m')+2(t-1)$.
כעת אפשר להוכח כי b נתן תמיד להקטנה כל עוד מספר גושי הגרעינים ברשת הנגזרת גדול מ 1 ולכן גם כאן $b \ge A_k(m')+2(t-1)$. (גוש המתפרק ע"י הוצאת נקודה אחת ממנו דינו כאן כמערכת גושים אחדים). ההוכחה לעובדה זו היא פשוטה אך מעט ארוכה ולכן לא תובא כאן. 6)

3.4 <u>למה 4.</u> אם $k=5$, $1<m \le 5$ אז $A_k(m)=6$.

הוכחה: כאשר $a<6$ יהיה לפי משפט 1 תמיד $m'>0$. אולם לכל גרעין יש 5 מחומשים שכנים שיש להם צלע משותפת עמו ואשר הם שונים זה מזה בגלל הקמירות. לפיכך $m \ge 6$, ז"א $A_5(m) \ge 6$. $m \le 5$.

אך באמת $A_5(m)=6$ כי משושה אפשר לחלק ל 2, 3, 4 או 5 מחומשים באשר בו בזמן $a=6$. (ר' ציורים 2א-ד).

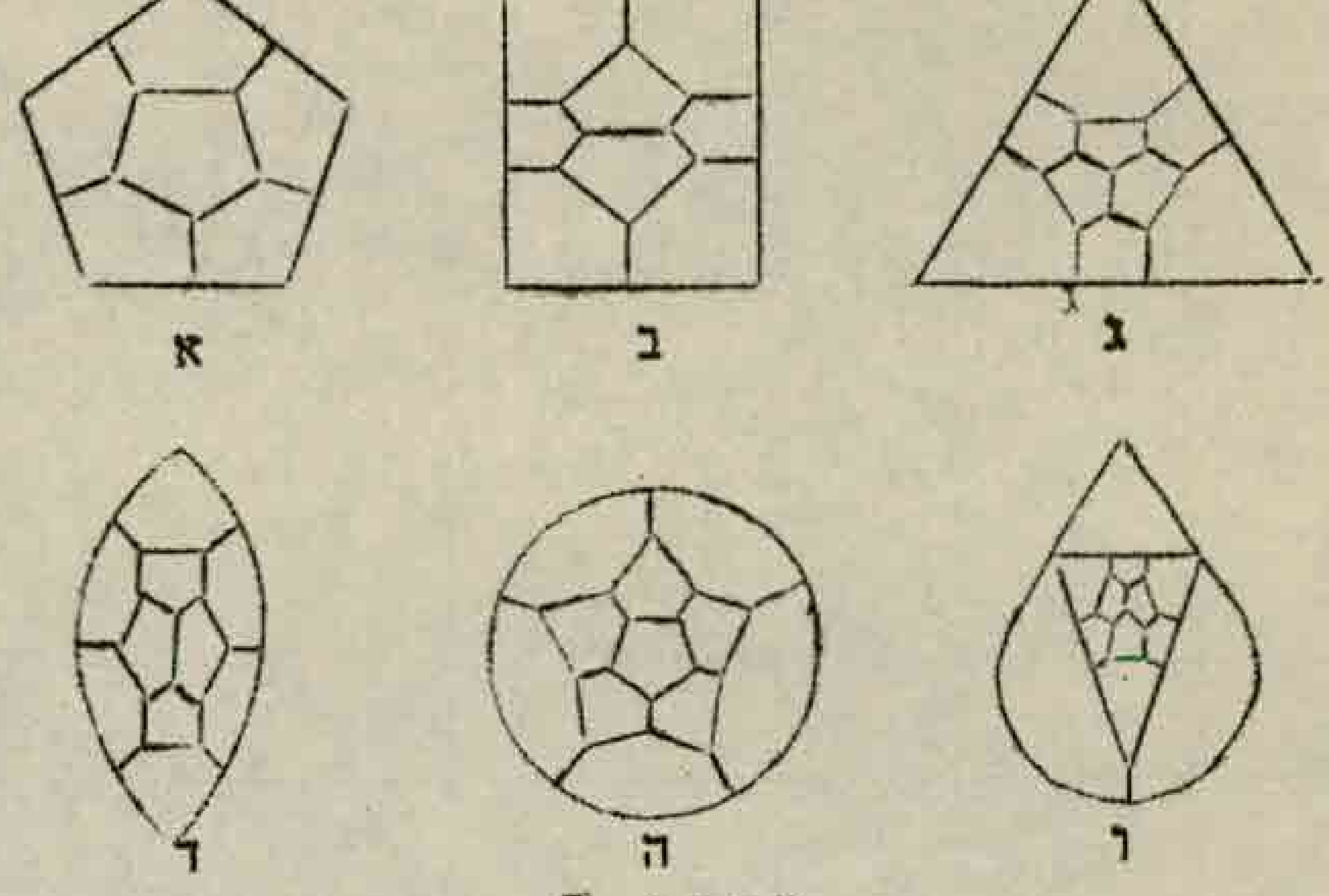


ציור 2

א ב ג ד

4.1 <u>משפט 2.</u> אם $k=5$ אז המינימום של m עבור $a=2,3,4$ הוא $12-a$ ועבור $a=0,5$ הוא $11-a$. עבור $a=1$ קיים $m>10$.

הערה: המינימום עבור $a=1$ הוא 12 ולא 11. ההוכחה לכך היא מעט יותר מסובכת ולכן לא תובא כאן. הקשי בהוכחה הוא בזה שיש קדם כל להראות כי $a=1$ (בנגוד ל $1 \ne a \le 6$) מחיב $\bar{f}>0$. היותו של $\bar{f}$ גדול מאפס גורם לכך כי $m>11$ וגם $m'>6-1=5$. לפי 2 רואים מיד כי $m' \ge 7$. הערך 7 יכול אמנם להתקבל אך הפעם לא ביחד עם ה m המינימלי כמו שזה אצל שאר ערכי a. ה m המינימלי מופיע רק בחלוקה היחידה המתוארת בציור 3ו ושם $m'=9$.



א ב ג

ד ה ו

ציור 3

גם לשאר ערכי a הקטנים מ 6, חלוקות המינימום הן יחידות. הוכחת היחידות לא תובא כאן, אך קל לפתחה לאחר הוכחת המשפט הנוכחי.
הוכחה: א. $a=5$. לפי משפט 1. $m \ge 1,1$. נסתכל בגרעין מסוים. לגרעין זה ישנם 5 מחומשים שונים שכנים ולפיכך $m \ge 6$. חלוקה עם $m=6$ ישנה בציור 3א. בחלוקה זו $m'=1$.
ב. $a=4$. לפי משפט 1. $m \ge 2,1$. אם $6>m' \ge 2$ אז $b \ge 6$ לפי למה 3 ולמה 4 ולכן $m \ge 8=12-4$ כי לפי 2, $m \ge 6-a+b$ בגלל $\bar{f}>0$, $k=5$. אם $m' \ge 6$ אז בודאי $m \ge 9$ בגלל הקמירות (ר' הוכחה למסקנה ממשפט 1 בסעיף 3.2). חלוקה עם $m=8$, $m'=2$ מתוארת בציור 3ב.

ג. $a=3$. $m' \ge 3$. עבור $6>m' \ge 3$ שוב $b \ge 6$ ולכן $m \ge 9=12-3$. אם $m' \ge 6$ אז שוב בגלל הקמירות $m=9$. 7) חלוקה עם $m=9$, $m'=3$ מתוארת בציור 3ג.
ד. $A_5(6)=5$ כי $a<3$ גורר $m'>3$ ולכן בגלל הקמירות $m>6$. אך עבור $a=3$ ראינו כי $m>6$ וכן עבור $a=4$. ל $a=5$ מצאנו חלוקה עם $m=6$.

ה. $a=2$. $m \ge 4$ (משפט 1). עבור $6>m' \ge 4$ שוב $b=6$ (למות 3, 4) ולכן $m \ge 10=12-2$. אם $m \ge 7$ שוב בגלל הקמירות $m \ge 10$. כאשר $m'=6$ אז $m \ge 11$ כי לפי ד הרי $A_5(6)=5$ ולפי למה 1 ולמה 3

$$m=m'+b-t+1 \ge m'+A_5+2t-2-t+1=m'+A_5+t-1 \ge 6+5+1-1=11.$$

חלוקה עם $a=2$, $m=10$, $m'=4$ מתוארת בציור 3ד.
ו. $A_5(7)=5$. עבור $a<2$ דרוש $m'>4$ ולכן בגלל הקמירות $m>7$. עבור $a=2,3,4$ ראינו כי $m>7$. עבור $a=5$ ישנה חלוקה עם $m=7$. (די ל"הדביק" עוד מחומש לרשת שבציור 3א).
ז. $a=0$. $m' \ge 6$. עבור $m'=6,7$ יהיה לפי ד ולפי ו $b \ge 5$ ולכן בגלל $m \ge 6-a+b$ יהיה $m \ge 11$. עבור $m \ge 8$ יהיה בגלל הקמירות $m \ge 11$ (אך שוב קל לראות כי למעשה אפילו $m>11$). רשת עם $a=0$, $m=11$, $m'=6$ מתוארת בציור 3ה.
ח. $a=1$. $m' \ge 5$. עבור $m'=5$ יהיה $b \ge 6$ ולכן $m \ge 11$, ועבור $8>m'>5$ יהיה לפי ד, ו $b \ge 5$ ולכן $m \ge 11$. עבור $m' \ge 8$ יהיה $m \ge 11$ בגלל הקמירות.

---

6) להמשך אין לנו צרך בכל היקפו של המשפט הזה. הוכחתו של החלק הנחוץ לנו תוכל להנתן בקלות באפן הבא: נדון במקרה $k=5$, $6>m'>1$. אז $A_5(m')=6$ (ראה למה 4). יהי $g>1$ מספר הגושים ו a_j' מספר החודים של הגוש ה j. $a_j' \ge 5$. אולם כל חודי הגושים יהיו קשורים לקדקדים שונים על P, פרט אולי ל $g-1$ זוגות מהם הקשורים ביניהם. לפיכך יש יותר מ 6 קדקדים תקינים על P כי $b \ge 5g-2(g-1)=3g+2 \ge 8>6$. אותה הוכחה טובה גם עבור $m'=6,7$ כאשר נשתמש עוד בחלקים ד, ו של הוכחת

4.2 משפט 3. (משפט מינימום המחומשים). מינימום המחומשים בחלוקת מצולע בעל n קדקדים למחומשים הוא $\lfloor n/3 \rfloor$, (8), כאשר $n>5$; הוא $12-n$ עבור $n=2,3,4$ אבל $11-n$ עבור $n=5,0$. 9) בחלוקות המינימום עבור $1 \neq n \leq 6$ תמיד $n=a$.

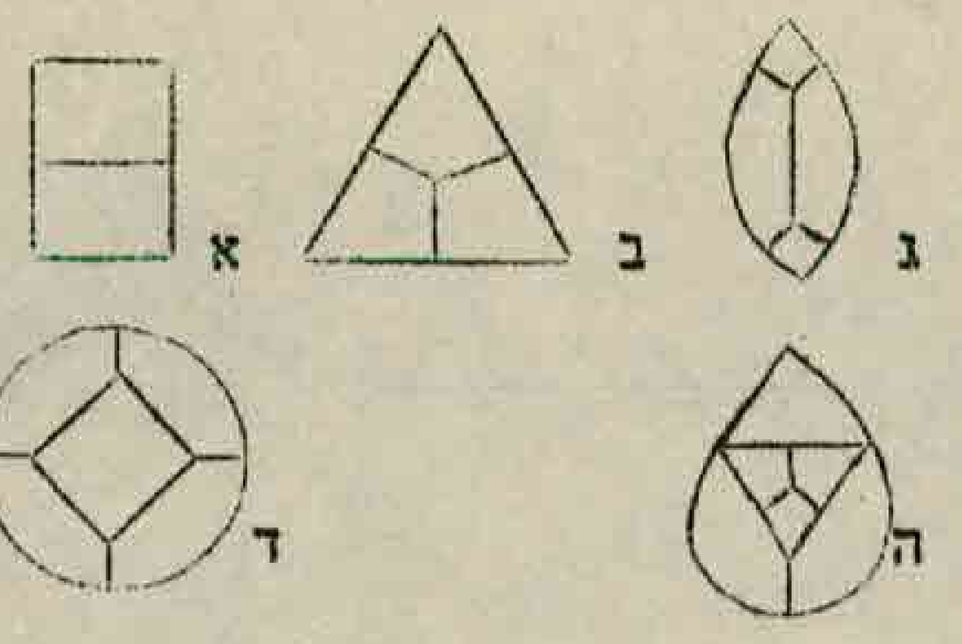
הוכחה: א. $n>5$. בכל רשת קים $m=(a+b+2c-2)/(k-2)$ כפי שמתקבל מיד מנוסחת אוילר-דקרט. 10) לפיכך עבור $k=5$ קים $m=(n+b-\bar{b}+2c-2)/3 \geq (n-2)/3$. ולכן, הואיל ו m מספר שלם יהיה $m \geq \lfloor n/3 \rfloor$. חלוקות עם m מינימלי זה קיימות באמת כלפי כל $n>5$. הן מתקבלות ע"י $\lfloor n/3 \rfloor -1$ עצים שהם קטעים בודדים אשר קצותיהם על P, כאשר $3>b-\bar{b} \equiv 2-n \pmod 3$.

ב. $n=0,2,3,4,5$. נכונותו של המשפט נובעת כאן מיד ממשפט 2 כי $n \geq a$ וראינו שם כי אצל ערכי הקטנים מ 5 (פרט למקרה $a=1$) שייך ל a הקטן יותר המינימום הגבוה יותר של מספר המחומשים. המינימום יכול אפוא להתקבל רק עבור $n=a$ והוא $12-a$ עבור $n=2,3,4$ ו $(11-n)$ עבור $n=0,5$.

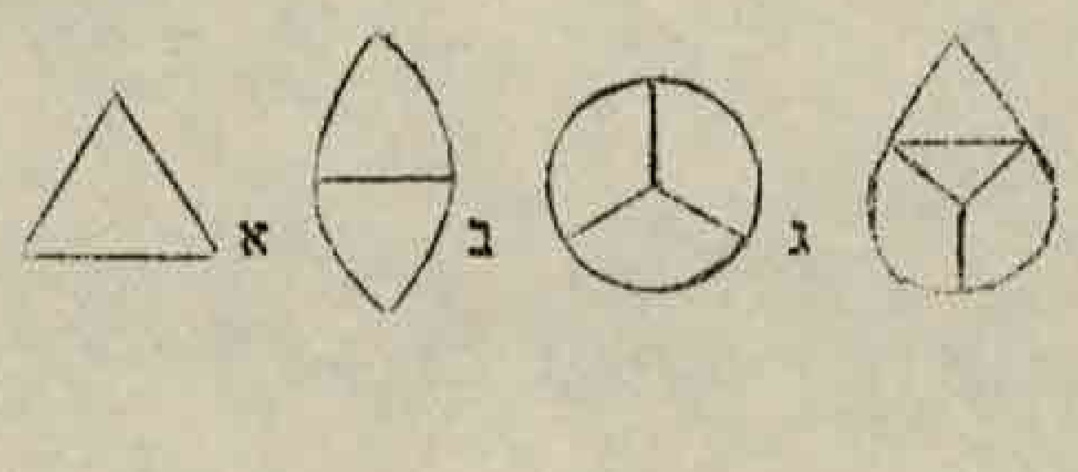
4.3 תוספת 1. את הרשתות של חלוקת המינימום עבור $n<5$ נוכל ליצור באפן הבא: נקח תריסרון מחומשים ו"נסדקי" אותו לארך שתי צלעות סמוכות ונפרוש אותו כעת למישור. נקבל אז את הרשת עם $a=1$ שבציור 3ו. כאשר נוריד מזה את המחומש עם החוד נקבל את הרשת עם $a=0$ שבציור 3ה. הרשתות שבציורים 3א-ד התקבלנה בזו אחר זו לאחר הורדת מחומשים נוספים.
מענין לראות פה את המצב האנלוגי בחלוקות למרובעים או למשולשים. (נצטט כאן רק את התוצאות מבלי להוכיחן.) החלוקות המינימליות למרובעים עבור $a=0,1,2,3,4$ מתקבלות מקוביה. שוב תתן סדיקת הקוביה ופריסתה את הרשת עם $a=1$ והורדה סוקססיבית של מרובעים תתן את שאר הרשתות. בכולן $n=a$. (ר' ציורים 5א-ה). בו באפן נגזרות החלוקות המינימליות למשולשים מהארבעון. (ר' ציורים 5א-ד). בכל המקרים ישנו אותו התפקיד המיוחד לערך $a=1$. 11)

4.4 תוספת 2. מתברר כי בחלוקות למחומשים מופיע מינימום הגרעינים יחד עם המינימום של m כאשר $1 \neq a<6$. רק בחלוקה עם $a=1$ יש 9 גרעינים באשר המינימום הוא 7. (גם המינימום הזה גדול אפוא ממה שהיה מתקבל על הדעת לפי משפט 1).

כאשר $n>5$ אין גרעינים בחלוקות המינימום. כלפי כל אותם ערכי n ישנן אמנם גם חלוקות עם $m'>0$. גם m וגם m' אינם חסומים כלפי n מסוים נתון. דבר זה אינו נכון עבור $k>5$ כפי שאפשר לראות מלמה 2. חקרתי בפרטות את ערכי m ו m' האפשריים ובפרט גם קבעתי בדיוק איזה ערכי m' מרשים בו בזמן m בלתי חסום. התוצאות האלה לא תובאנה כאן.

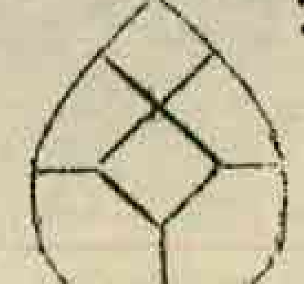


ציור 4



ציור 5

8) המסגרת המרובעת מסמנת כרגיל את הערך השלם המקסימלי הכלול במספר.
9) $n=0$, $n=2$ יש להם מובן למשל על כדור. אפשר שם להגדיר קמירות ע"י קוים גיאודטיים ואפשר לקחת במקום זה תנאי טופולוגי. אצל Mahlo רק $n \geq 3$.
10) שיויון זה נמצא כבר אצל Mahlo (ע' 53 שם). הוא נוסח גם ע"י Hayashi והורחב ע"י Kubota. ר' T.Kubota; Partitioning of the plane by Polygons. Tôhoku Math. J. 24 (pp. 273-276) 1925
11) המקרה $k=4$, $a=1$ רק יוצא מן הכלל בזה שאין כאן חלוקה מינימלית יחידה. ישנה עוד החלוקה:



תקונים לכרך 1

עמוד 1, שורה 21:
זאת אומרת, צרוף דירכלה הוא קבוצי
(אסוציאטיבי).
עמוד 3, שורות 26-28:
הגדרה. אם $f(n)$ היא פונקציה ארתמטית המקימת את התנאי $f(mn)=f(m)f(n)$ לכל זוג (m,n), תקרא $f(n)$ פונקציה כפלית חזקה.
משפט 12. הכפול הרגיל הוא פלוגי (דסטריבוטיבי) לגבי צרוף דירכלה של פונקציות כפליות חזקות, זאת אומרת, אם $f(n)$, $g(n)$ ו $h(n)$ הן פונקציות כפליות חזקות, יהיה:
עמוד 3, שורות 33-37:
מן ההוכחה הקודמת נובע מיד גם
משפט 13. אם n מכיל גורמים ראשוניים שונים בלבד קים החק הפלוגי שבמשפט 12 גם לגבי פונקציות כפליות.
עמוד 12, שורה 16 מלמטה:
רצוני, ו $k>i+n$. לכן יהיה $T^{n}<T^{n+1}$ בשביל כל n טבעי. נובע על נקלה כי
עמוד 20, שורה 23:
2. ידוע כי לכל מספר טבעי >1 מצורת n, $2n-1$, $3n-1$, $4n-1$, $6n-1$
עמוד 20, שורה 2 מלמטה:
10. מהי הגבלה מלעיל לתכולת פנת הארבעון בעלת התכולה המינימלית
עמודים 35-37, בשורות המתאימות:

n	U_n	פרוק U_n
87	6798916376386122 58	2.173.514229.3821263937
115	483162952612010163284885	5.28657.(33720414042782 57761)
118	2046711114739846236917 59	353.709.8969.336419.2710260697

n	V_n	פרוק V_n
57	817138163596	2^2.229.9349.95419
58	1322157322203	3.347.1270083883
99	4895267005239686 61124	2^2.19.199.991.2179.9901.1513909
114	6677147784050432596512 18	$2^2.3^2$.227.29134601.(5608975608563)
117	28284851909049718538951 96	2^2.19.79.521.859.(1052645985555841)

עמוד 38, שורה 23:
ב $y\geq 7$ מתקבלים משפטי-העזר 2 ו 3 גם מ 1 ע"י העלאה בחזקת 3/2 ו 2 בהתאמה.
עמוד 40, שורה 28, עמודה ראשונה, בטכסט:
להיות $n\geq 40^{14}$, ואצל
עמוד 50, שורה 2 מלמטה:
בחפשנו פולינום לכל I באים אנחנו, טוב באפן טבעי, לתאר את $F(x)$
עמוד 51, שורה 11 מלמטה:
ה $s(t_i)$, $i=1,\dots,n+2$, השוים ל $t_i(x)/|t_i(x)|$ מתכנסים במדה שוה ב י I
עמוד 52, שורה 24:

האבר הראשון של $\sum -(t_j)\,{}_{\rho}\, r_m f(x_{j-1})$ - מבוטלת בחלקה ע"י קיום האבר
עמוד 52, בציור הראשון, על כל אחד משלשת החצים יש להוסיף: 2α
עמוד 53, שורה 7 מלמטה:

$$\sum_{v=1}^{m}\sqrt{v}<\frac{16}{3}m^{3/2} \qquad ,\left|\binom{-1/2}{v}\right| \frac{9}{8\sqrt{v}} \qquad ,\left|\frac{y^2}{t^2}-1\right|<1\ ,\ |u|<\alpha$$

עמוד 54, שורה 8:
ארך המחזור הקטן ביותר לפי 2 p, קימים בהתאמה הקשרים הבאים:
עמוד 55, שורה 10 מלמטה:
יהיה, לפי Perrin (Comptes Rendus Paris 119, 1894, 900-3); השוה:
עמוד 68, שורה 6:
ע"י סכומי גאוס (דהיינו הסכומים $\sum_{S=0} e^{2\pi i S^2/p}$). אףעל פי כן יש ענין
עמוד 91, נוסחה (1):

$$x\in V^a(K,L)\wedge K_{ax}\cdot L\neq 0 \ldots\ldots (1)$$

עמוד 91, שורות 4-5 מלמטה:
נוסחאות (2) ו(3) מראות שמעבר מנקודה יוצרת כלשהי לאחרת גורר אחריו הזזה של הקבוצה המאפינת; החלפת סדר ה"ארגומנטים" היא שות-ערך
עמוד 93, שורה 23:
וכמו כן לפי (3"): $V^a(K,1_y)=(K^{\hat{a}})_{1_y a}$
עמוד 93, שורה 9 מלמטה:
5. משפט 7: אם K ו L סגורות וחסומות אז $V^a(K,L)$ סגורה.
עמוד 93, שורה 6 מלמטה:
היא קבוצה סגורה וחסומה ו K_{ax} סגורה (כמתקבלת ע"י הזזה, שבודאי שומרת על

תכן כרך 1

Contents of Volume 1