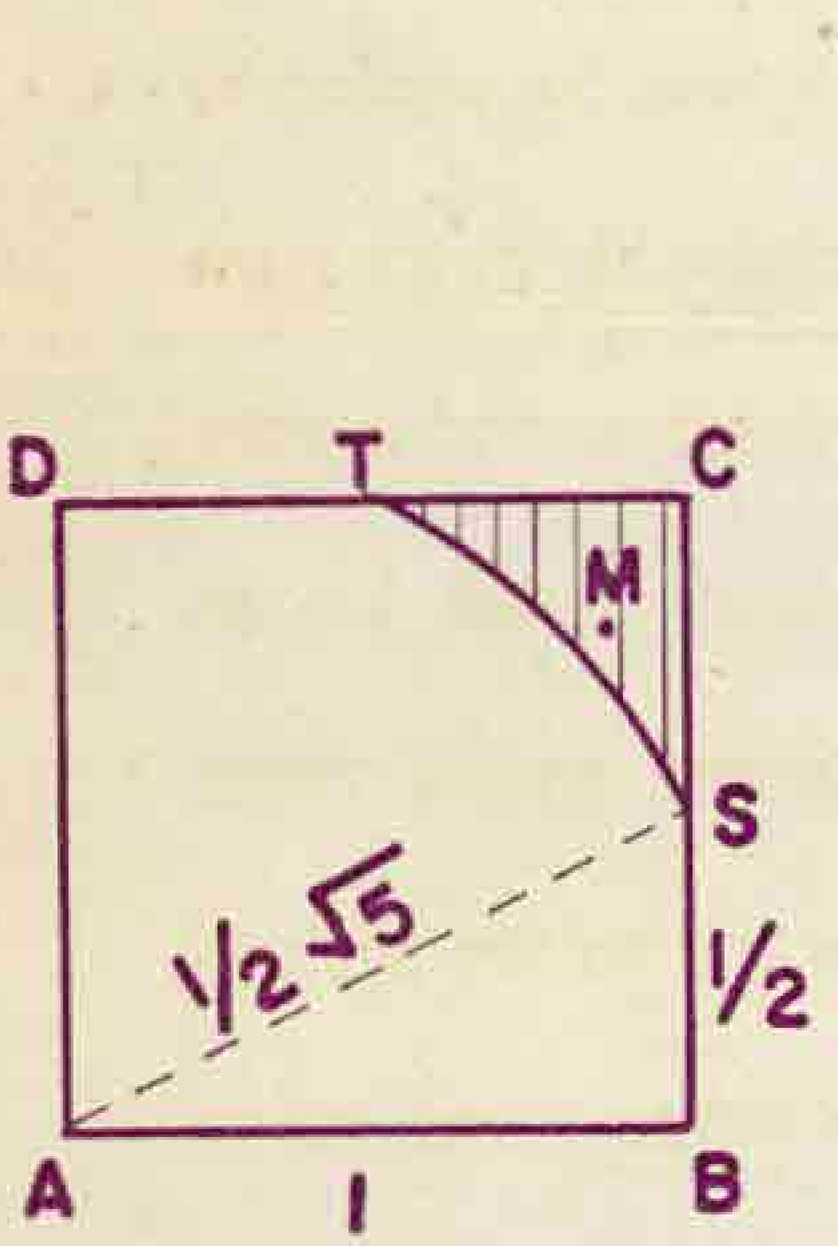
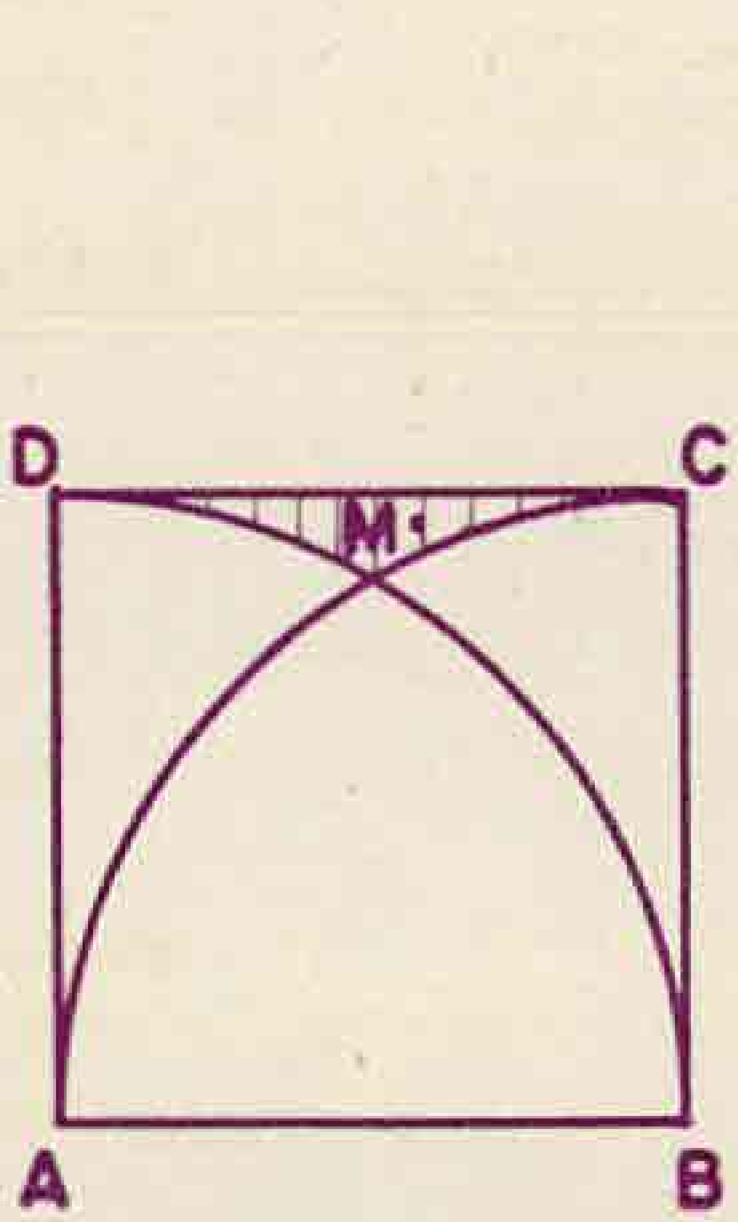
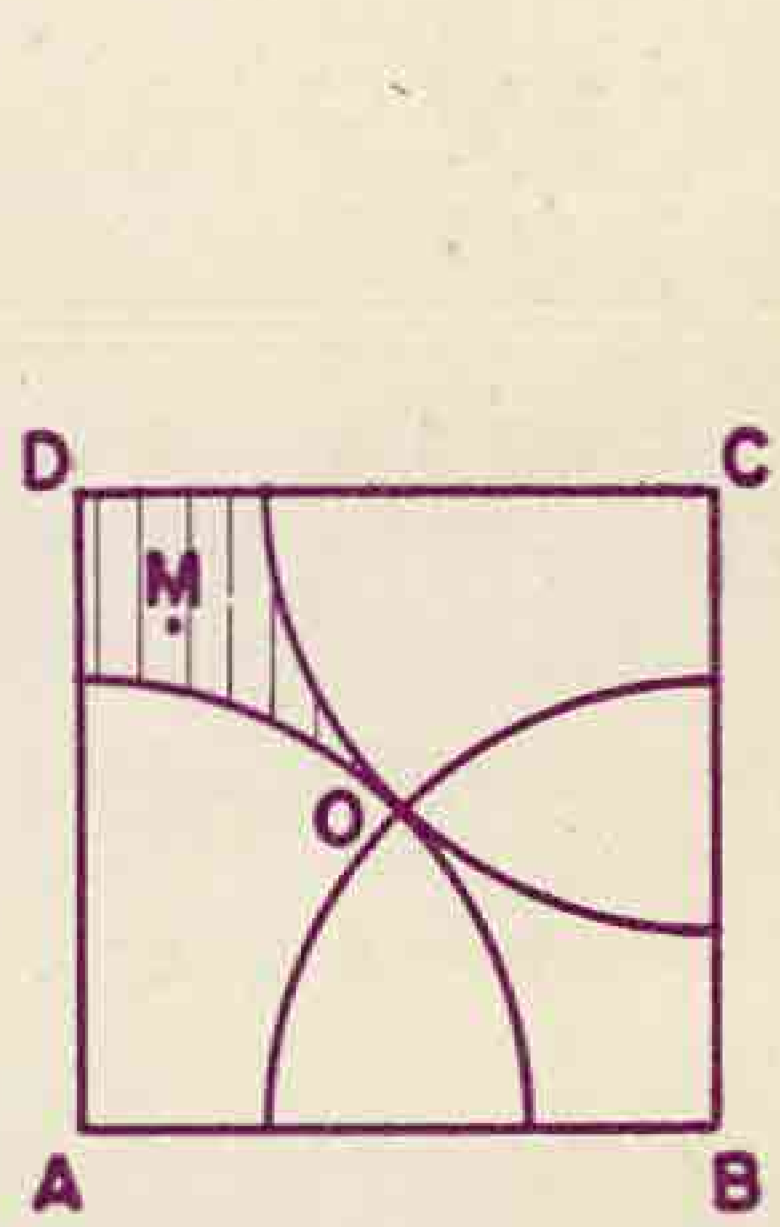
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים







כרך 1 — חיפה, סיון תשכ״א — יוני 1961 — מס׳ 5

יוצא לאור בחסות
ה״אגוד למתמטיקה בישראל״

מהמערכת

"גליונות מתמטיקה" נכנסים בזה לשנתם השניה.

החלטנו לכלול 8 גליונות בכרך אחד, כך שהמספרים 8 - 1 יהוו את הכרך הראשון של העתון.

אולם ביחס לתחרות המתמדת לפתרון שאלות נקבעה שנה אחת כמחזור. בגליון מס' 6, עם פרסום התשובות לשאלות מס' 60-46, נפרסם גם את שמות הזוכים בתחרות למחזור הראשון (שאלות 60-1).

בגליון זה מופיע דו"ח מפורט מפגישת המערכת עם הקוראים שנתקיימה, בת.א. ב-8.3.61. מסבות בלתי תלויות בנו, חוברת מס' 4 בה הודענו על הפגישה וכן ההודעות המיוחדות ששלחנו לכל בתי הספר בסביבת תל-אביב, הגיעו במועדן רק למקומות מספר. מסבה זו היה מספר המשתתפים בפגישה מועט, כ-20 איש.

אולם אם נשפוט על כלל הקוראים לפי המדגם הקטן הזה, הרי שהעתון מעורר ענין רב בהרבה מזה שאפשר היה לחשוב לפי מעוט המכתבים למערכת.

אנו פונים בזה לקוראים פעם נוספת ומבקשים לשלח לנו חומר מכל המינים: מאמרים, שאלות, חידות, סקירות על עבודת חוגים ומפעלים אחרים. נפרסם כל חומר מתאים ברצון רב.

דו"ח מפגישה עם הקוראים מת.א. והסביבה.

כפי שכבר ציינו לעיל התקיימה פגישה זו ב-8.3.61. נוכחו כ-20 קוראים מת.א. והסביבה ואפילו קוראת אחת מסביבות חיפה. הפגישה התחילה בשעה 18.15. כ-45 דקות הוקדשו לשתי הרצאות קצרות על הנושאים הבאים: "על בעיה לא פתורה אחת במספרים שלמים" ו-"שמושי מתמטיקה לכלכלה".

בהמשך הוקדשו כ-30 דקות לשיחה עם הקוראים על ה"גליונות". הנוכחים החליפו דעות על החומר שכבר הופיע ועל מה שרצוי שיופיע. הובאה הדעה שאמנם היו חוברות מס' 1 ו-2 קשות במקצת, אולם שתי החוברות האחרונות (מס' 3 ו-4) מתאימות ברמתן. נתבקשנו לגוון יותר את התכן. לא חסרו גם דברי בקורת חריפים יותר, לפיהם העתון תלוש מהמציאות בבתי הספר, בו בזמן שלדעת המבקרים עליו לשמש כהמשך והעמקה לנלמד בכתה.

החלק השלישי של הערב הוקדש לחידון בזק מתמטי. אחרי הצגת השאלה נתן לנוכחים זמן למחשבה והעונה ראשון היה זוכה במספר נקודות מתאים.

השאלות עוררו ענין כללי. את מספר הנקודות הגדול ביותר (10) צבר יחזקאל קרפל תלמיד כתה י"ב ראלית בבית ספר תיכון עירוני ט" ת.א. וזכה בפרס - חתימה לחוברות מס" 8 - 5 של הגליונות. את המקום השני עם 5 נקודות תפס גדעון קין מרמות השבים, תלמיד כתה ז" ראלית בבית ספר תיכון בכפר-סבא, והוא קבל בתור פרס חתימה על המס" 5,6 של הגליונות. השאלות שנתנו בתחרות הבזק מופיעות בחוברת זו בתור שאלות בינים.

עם סיום הפגישה ב-8.30 היתה לכל הנוכחים הרגשה נעימה של בלוי ערב מענין ומלמד כאחד.

אנו מקוים לארגן בעתיד פגישות כאלה לעתים קרובות יותר גם בת.א. וגם במקומות אחרים.

בעיה ופתרונה

ההתרות של שאלות אלה נמצאות בעמוד 140 . בטרם תפנה לשם, נסה את כוחך.

1. הוצע ונפתר ע"י אילן כרוך ודני כהן (הטכניון, חיפה).

מצא דרך כללית לקביעת זוגות מספרים שלמים u ו-v כך ששני הבטויים $x^2 + ux - v$; $x^2 + ux + v$ יתפרקו למכפלות בינומים (דואברים) עם מקדמים שלמים.

דוגמה: א) $u = 5 \quad v = 6$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$
$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$$

ב) $u = 13 \quad v = 30$

$$x^2 + 13x + 30 = (x + 10)(x + 3)$$
$$x^2 + 13x - 30 = (x + 15)(x - 2)$$

2. הוכח שכאשר נקודה M נמצאת בתוך רבוע ABCD שצלעו 1 הרי לכל היותר אחד מהמרחקים MA, MB, MC, MD גדול מ- $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, לכל היותר 2 ממרחקים אלה גדולים מ-1 ולכל היותר 3 מהם גדולים מ- $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

תחרות במתמטיקה מטעם הפקולטה למדעים של הטכניון

ביום 11.5.1961 התקיימה התחרות במתמטיקה מטעם הפקולטה למדעים של הטכניון על פרס ע"ש הפרופסור ירמיהו גרוסמן.

התחרות היתה מכוונת לתלמידי הכתות המסיימות של בתי-הספר התיכוניים בארץ. כל בית ספר יכול היה לשלוח לתחרות מתחרה אחד. על כל 30 תלמידים או חלק מהם הלומדים בכתות המסיימות שבמוסד.

לזוכה בתחרות יוענק הפרס ע"ש הפרופסור י.גרוסמן בסך 600 ל״י בצורת סטיפנדיה לשנת הלמודים הראשונה במחלקה למדעים של הטכניון. אין הפרס נתן להעברה לכל מוסד אחר או לפקולטה אחרת בטכניון. המצטיין ביותר והבא אחריו יהיו גם פטורים מבחינת המיון במתמטיקה. עשרת התלמידים הראשונים בתחרות יקבלו מכתבי אשור על השתתפותם, בציון המקום אותו תפסו , ויזוכו בפרסי מזכרת.

בתחרות השתתפו 65 תלמידים מכל הארץ.

אנו מביאים להלן את השאלות שהוצגו למתחרים. שלחו לנו פתרונותיכם. נשמח לפרסם פתרונות מענינים במיוחד.

תחרות במתימטיקה של תלמידי כתות הסיום של בתי הספר התיכוניים בישראל על שם פרופסור ירמיהו גרוסמן - תשכ"א

יש לפתור את כל השאלות. משך התחרות: $2\frac{1}{2}$ שעות. אסור להשתמש בספרים, רשימות או לוחות.

1. למצא משולש שאורך צלעותיו נמדד במספרים שלמים והיקפו שווה לשטחו. (כדאי להשתמש בנוסחת הרון. יש חמשה פתרונות שונים. נסה למצא את כולם ולהוכיח כי אין פתרונות אחרים).

2. נתונים שלושה מעגלים, בעלי רדיוסים שונים, במישור, באופן שמרכזיהם אינם על ישר אחד ובאופן שאף מעגל אינו נמצא בתוך מעגל שני. הוכח כי נקודות החיתוך של המשיקים <u>החיצוניים</u> לכל שנים מהמעגלים נמצאות על ישר אחד.

3. נתונים ארבעה כדורים בעלי רדיוסים שונים שמרכזיהם אינם נמצאים במישור אחד כך שאף כדור אינו נמצא בתוך כדור שני. מעבירים את ששה החרוטים החוסמים כל אחד שני כדורים מבחוץ (ז.א. ששני הכדורים משיקים להרוט לארך מעגל ונמצאים מאותו הצד של קדקד החרוט). הוכח כי ששה הקדקדים של החרוטים נמצאים במישור אחד.

<u>הערה</u>: בעיה זו יש לפתור מתוך הסתמכות על הבעיה מס׳ (2) וזאת מותר לעשות אפילו אם לא פתרת את הבעיה ההיא.

בעיות קומבינטוריות אחדות בגיאומטריה

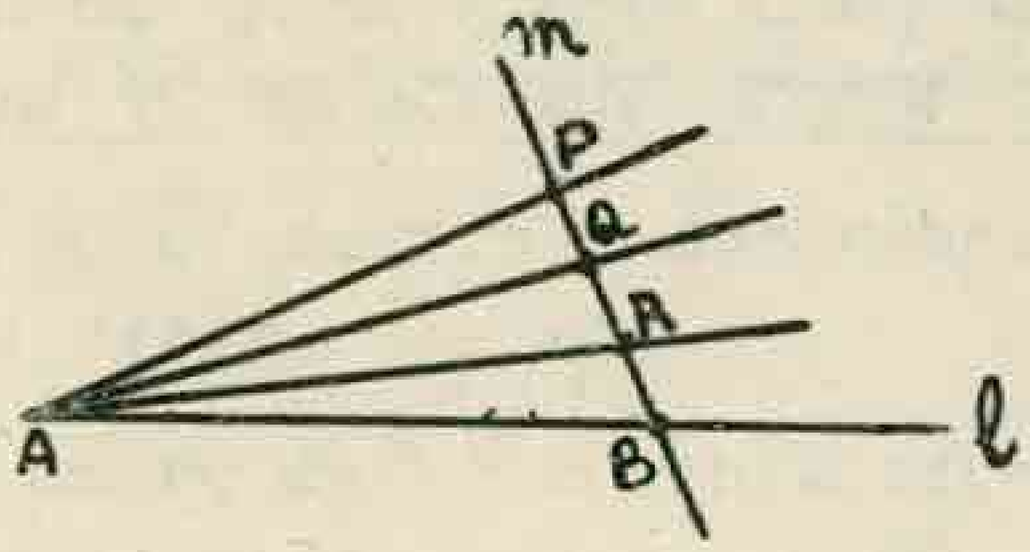
צבי שור

בשנת 1893 שער המתמטיקאי היהודי סילבסטר (1814–1897) את המשפט הבא:

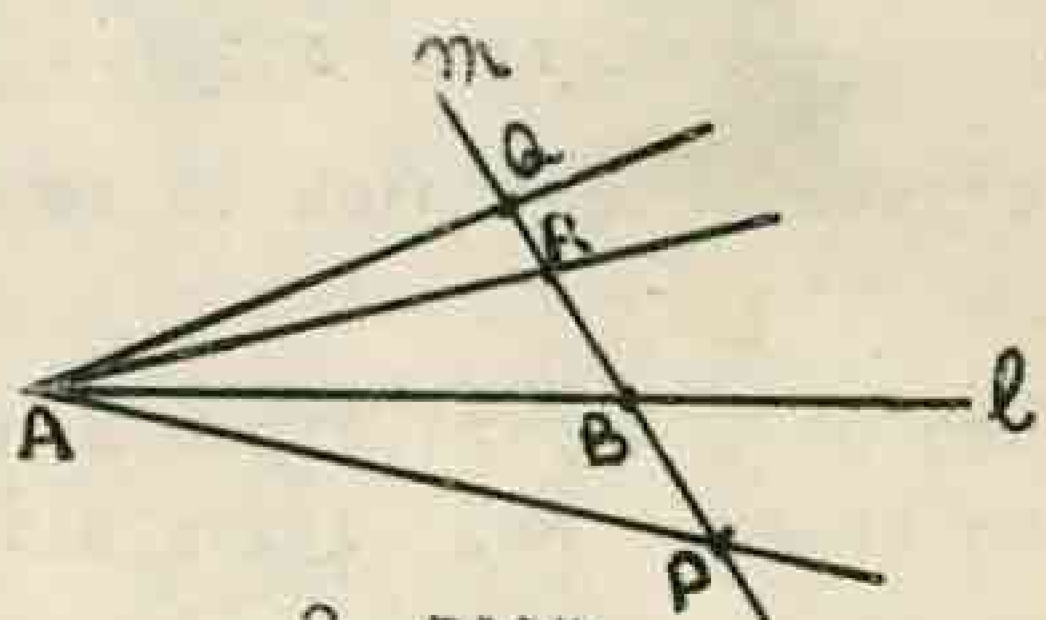
משפט 1 אם לקבוצה סופית של נקודות במישור התכונה שעל כל ישר העובר דרך שתים מנקודות הקבוצה נמצאת לפחות עוד נקודה אחת של הקבוצה, הרי כל הנקודות נמצאות על ישר אחד.

השערת סילבסטר הוכחה בדרכים שונות, והרי שתים מהן.

הוכחה א. נניח כי קבוצת הנקודות איננה נמצאת על ישר אחד. נעביר את כל הישרים הנקבעים ע"י הנקודות הנתונות, כלומר, נחבר כל שתי נקודות בישר העובר דרכן. דרך אחת מנקודות הקבוצה שנסמנה ב- A נעביר ישר נוסף ℓ (ז.א. ישר שאיננו עובר דרך נקודה נוספת). מבין הישרים הקודמים נבחר ישר m (ייתכן ויש שנים) ההותך את ℓ בנקודה B כך שהקטע AB של ℓ איננו נחתך ע"י אף אחד מן הישרים האחרים. בחירה כזו תמיד אפשרית כי מספר הישרים הוא סופי. לפי הנתון נמצאות על m לפחות שלוש מנקודות הקבוצה P,Q ו- R (שונות מ- B). שלש נקודות אלו ייתכן ותמצאנה כולן מצדה האחד של B (ציור 1) או שתים מצדה האחד ואחת מצדה השני (ציור 2).



ציור 1



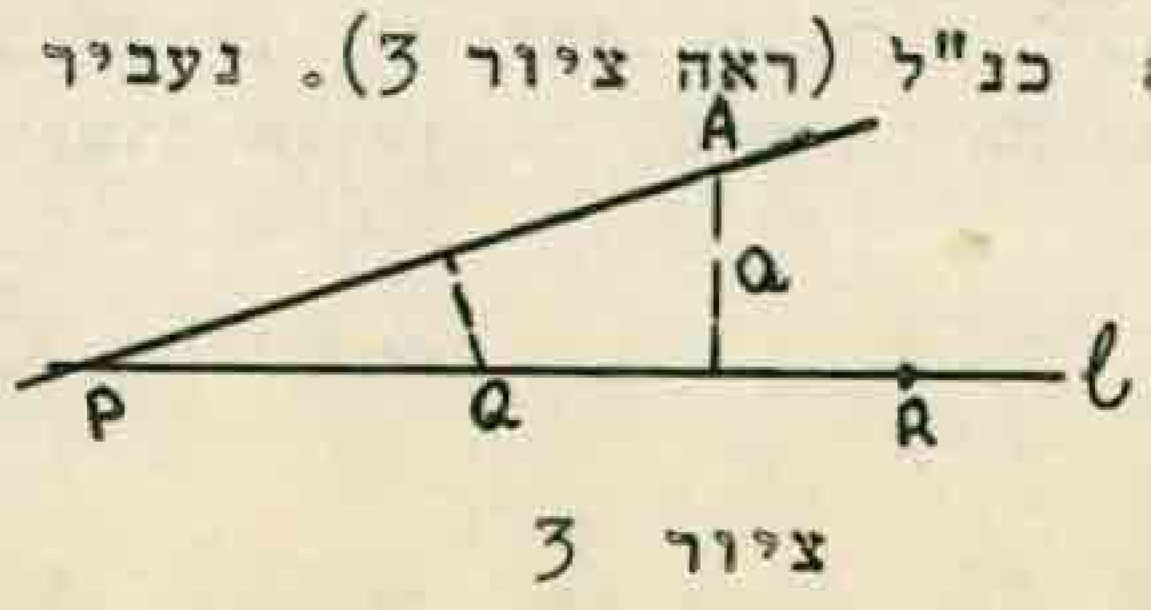
ציור 2

לפי הנתון נמצאת על AQ נק' שלישית S של הקבוצה. לגבי שני המקרים הנ"ל נקבל: אם S נמצאת מעבר ל- Q יחתוך הישר SR את הקטע AB, אם S היא בין A ו- Q יחתוך PS את AB ואם S מעבר ל- A יחתוך SR את AB. בכל המקרים מתקבלת סתירה לבחירתה של B. לכן כל נקודות הקבוצה מונחות על ישר אחד.

מ.ש.ל.

הוכחה ב. (לפי Gallay). נניח כי קבוצת הנקודות איננה נמצאת על ישר אחד. נעביר את כל הישרים הנקבעים ע"י הנקודות הנתונות ונמדוד את כל המרחקים האפשריים בין כל הנקודות לישרים שאינם עוברים דרכן.

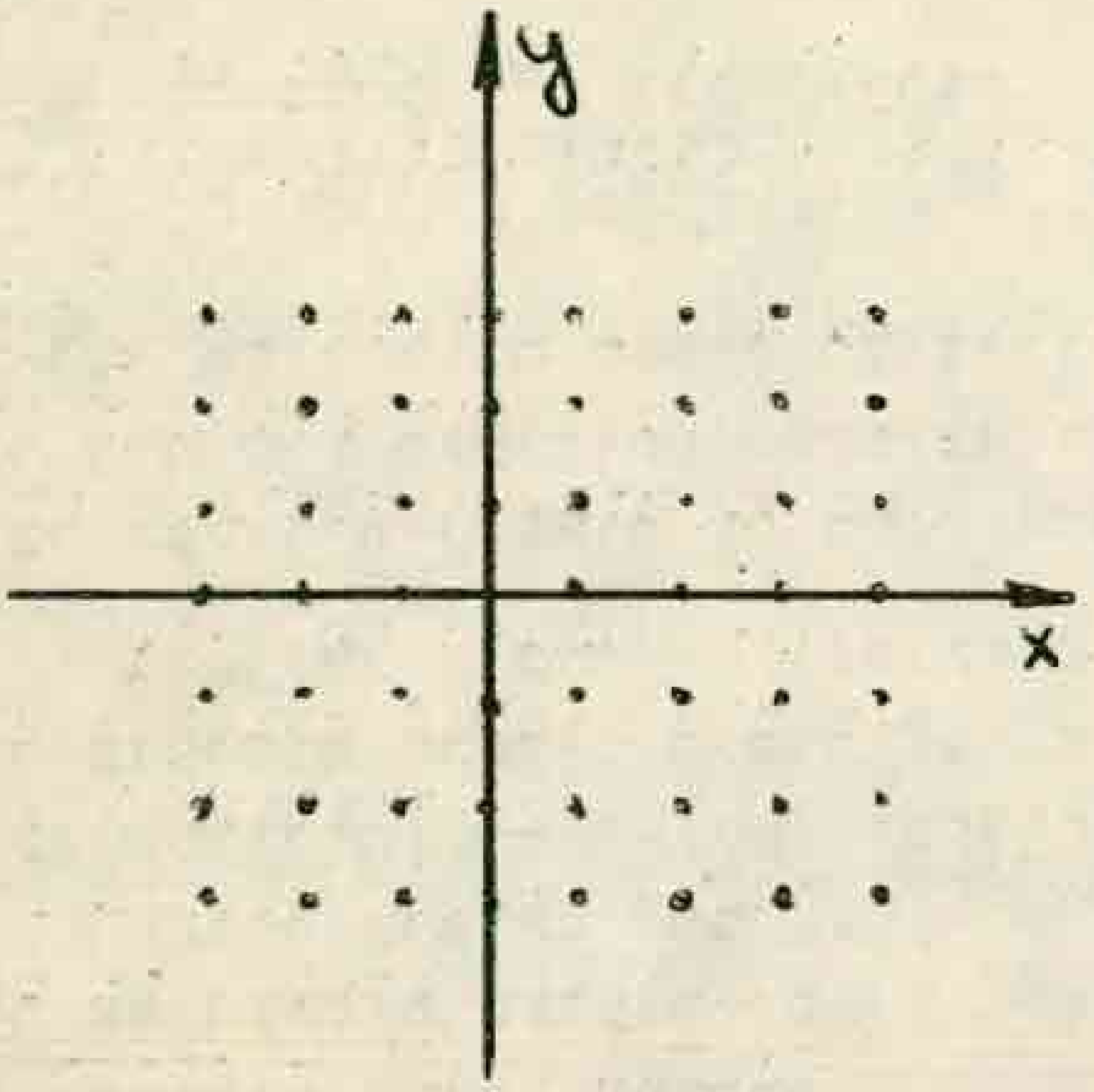
בין אלה יש המרחק הקטן ביותר שנסמנו ב- a. תהי A הנקודה ו- ℓ הישר שהמרחק ביניהם הוא a כנ"ל (ראה ציור 3). נעביר מ- A נצב אל ℓ.



ציור 3

על ℓ ישנן לפחות 3 נקודות (לפי הנחת המשפט), ומצד אחד של עקבת הנצב

תמצאנה לפחות 2 (אולי אחת מהן תתלכד עם העקבה). תהי בין שתים אלה P הנקודה המרוחקת יותר מעקבת הנצב. אזי המרחק מ- Q אל הישר PA, שגם הוא ישר המחבר 2 נקודות של הקבוצה, קטן מ- a , בנגוד להנחת המינימליות של a . הסתירה שקבלנו מוכיחה את משפט סילבסטר.



ציור 4

נעיר כי לעובדה שקבוצת הנקודות היא סופית חשיבות מכרעת. ביכלתנו להצביע על קבוצות אין-סופיות של נקודות במישור, לגביהן משפט סילבסטר אינו מתקים. לדוגמא: נקבע במישור מערכת צירים ישרת-זוית ונכלול בקבוצה שלנו את כל הנקודות (x,y) ששעוריהן x ו- y מספרים שלמים. קבוצת נקודות זו הנקראת (ה"סריג היסודי") אינה נמצאת על ישר אחד וכל ישר העובר דרך שתים מנקודותיה מכיל אין-סוף נקודות נוספות. (היכן השתמשנו בהוכחות בעובדה שמספר הנקודות הוא סופי?).

משפט סילבסטר שמש פתיחה לענף חדש בגיאומטריה, שעודנו בהתגבשותו, המכונה "גיאומטריה קומבינטורית".

במשפט הבא (בעיה מס' ת.29 שהוגשה בחוב' 2) מתבלטת יותר ההצדקה לכנוי "גיאומטריה קומבינטורית". לפנינו בעיה קומבינטורית שהצרופים בה מוגבלים ע"י חוקים גיאומטריים. משפט זה שוער ע"י פרופ. ת.מוצקין בשנת 1938 והוכח באותה שנה (בדרכים שונות) ע"י פרופ. ח.חנני ופרופ. א. רובינזון.

<u>משפט 2</u>. מספר סופי $n \geq 3$ של נקודות במישור, שאינן על ישר אחד, קובעות לפחות n ישרים.

הוכחה (בדרך האינדוקציה)

לגבי $n = 3$ המשפט נכון בבירור. נניח כי הוא נכון לגבי $n-1$ נקודות, ונוכיח נכונותו לגבי n נקודות. מאחר שאין כולן על ישר אחד, נובע ממשפט 1 כי לפחות זוג אחד מהן A ו- B נמצאות על ישר שאינו מכיל נקודה שלישית. (אם אין זוג כזה, הרי מתקיימת ההנחה של משפט 1 וגם מסקנתו שכל הנקודות שבקבוצה הן על ישר אחד בנגוד לנתון). נעלים עין מ- A .

א) אם $n-1$ הנקודות הנותרות אינן נמצאות על ישר אחד הן קובעות, לפי הנחת האינדוקציה, לפחות $n-1$ ישרים אך אף אחד מהם אינו מתלכד עם AB , שהרי על AB אין נקודה שלישית. קבלנו איפוא

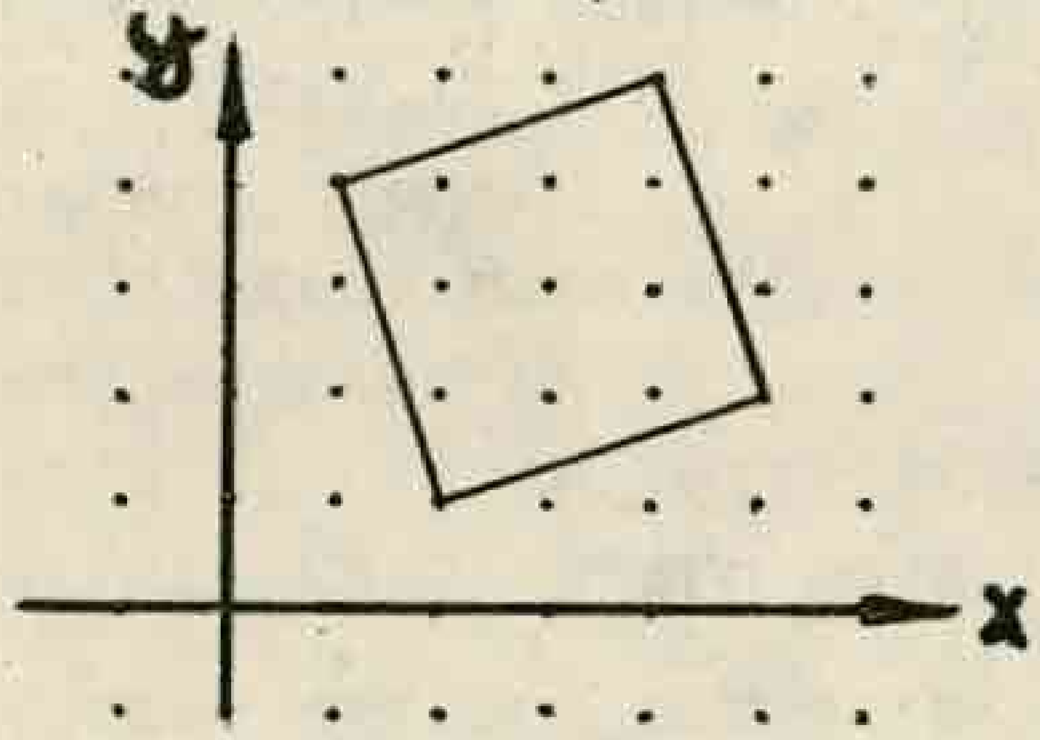
לפחות n ישרים.

ב) אם $n-1$ הנקודות הנותרות נמצאות על ישר אחד l קובעת A עם כ"א מהן ישר נפרד, כלומר $n-1$ ישרים. בתוספת הישר l מתקבלים איפוא n ישרים.

ישר נקבע ע"י זוג נקודות. לעומת זאת מעגל נקבע ע"י שלוש מנקודותיו. בדומה למשפט 1, נקבל את המשפט הבא לגבי מעגלים.

<u>משפט 3.</u> אם לקבוצה סופית של נקודות במישור התכונה שעל כל מעגל העובר דרך שלש מנקודות הקבוצה נמצאת לפחות נקודה רביעית של הקבוצה הרי כל הנקודות נמצאות על מעגל אחד.

נותר על הוכחה ונפנה למספר משפטים אחרים בעלי אופי שונה. נסתכל בנקודות "הסריג היסודי". הן הנקודות (x,y) במערכת צירים ישרה אשר שני שעוריהן x ו- y מספרים שלמים. לא קשה למצוא 4 נקודות הסריג המהוות קדקדים לרבוע. קימים אף רבועים שצלעותיהם אינן מקבילות לצירי המערכת (ציור 5). לאמיתו של דבר רבוע הבנוי על קטע כלשהו המחבר שתי נקודות סריג יהיה רבוע שכל קדקדיו הן נקודות סריג (רבוע סריגי)



ציור 5

אולם אין משולש שוה-צלעות סריגי. כלומר, אין שלוש נקודות סריג המהוות משולש שוה צלעות. ובאמת: נניח כי שלוש נקודות הסריג $(x_1y_1),(x_2y_2)$ ו- (x_3y_3) מהוות משולש שוה-צלעות. נביע את שטחו בשתי צורות:

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}{2} \qquad \text{(א}$$

$$S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}\sqrt{3} \qquad \text{(ב}$$

מאחר ולפי ההנחה כל ששת המספרים x_i ו- y_i $(i = 1,2,3)$ שלמים, הרי S_1 הוא מספר רציונלי ואלו S_2 אירציונלי. מאחר שלא ייתכן כי מספר רציונלי ישוה למספר אירציונלי סתרנו את ההנחה, לא ייתכן, איפוא, שכל המספרים x_i ו- y_i שלמים (אפילו רציונליים). לכן אין משולש משוכלל סריגי.

מפתיע פי כמה

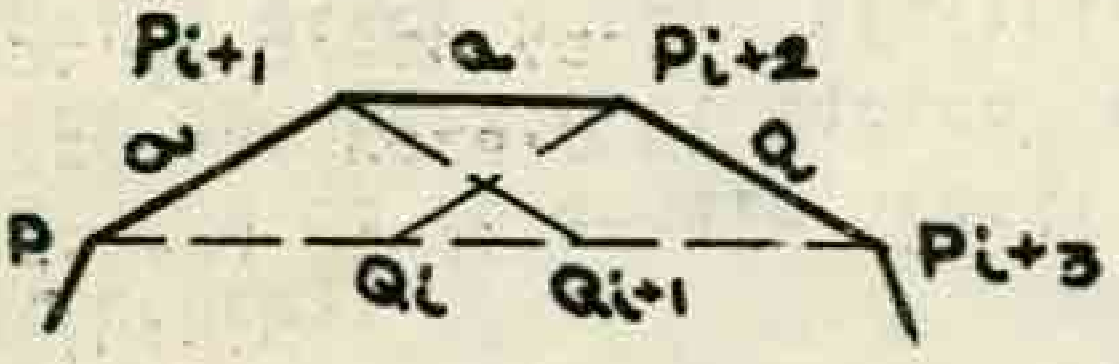
<u>משפט 4.</u> אם n נקודות סריג מהוות מצולע משוכלל $n = 4$. במלים

אחרות: הרבוע הוא המצולע המשוכלל היחיד שקדקדיו יכולים להיות נקודות סריג.

הוכחה

נניח כי M_n הוא מצולע סריגי משוכלל בן n צלעות. כפי שראינו לעיל, לא יתכן $n=3$. מכאן נובע $n \neq 6$ שהרי אילו היה ABCDEF משושה סריגי משוכלל היה ACE משולש סריגי משוכלל. עלינו לטפל, איפוא, במקרים $n = 5$ ו- $n > 6$.

מכל המצולעים הסריגיים המשוכללים נבחר כזה שצלעו a קטנה ביותר*). יהיו קדקדיו $P_1, P_2, \dots, P_n$. כל שלושה קדקדים סמוכים P_i, P_{i+1} ו- P_{i+2} (P_{n+1} אינו אלא P_1) נשלים ע"י נקודה נוספת Q_i למעוין. Q_i אף היא נקודת סריג. כי שעוריה נבדלים משעורי P_i באותם ערכים שנבדלים שעורי P_{i+2} מ- P_{i+1} בהתאמה, ואלה מספרים שלמים. $P_{i+1}P_iQ_{i+1}$ משולש שוה-שוקים



ציור 6

ו- $\measuredangle P_{i+1}P_iQ_{i+1} = \pi - \frac{\pi(n-2)}{n} = \frac{2\pi}{n}$

לכן $P_iQ_{i+1} = 2a\cos\frac{2\pi}{n} = 2a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}\right) = 2a\sin\frac{\pi(n-4)}{2n}$

לגבי $n > 6$ $\quad Q_iQ_{i+1} = P_iQ_{i+1} - a = 2a\left[\sin\frac{\pi(n-4)}{2n} - \frac{1}{2}\right]$

המצולע $Q_n \dots Q_1$ הוא מצולע סריגי משוכלל.

כעת: $\frac{n-4}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{2}{n} < \frac{1}{2}$

מצד שני, מאחר ש $n > 6$ $\quad \frac{n-4}{2n} > \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

לכן $1 = \sin\frac{\pi}{2} > \sin\frac{\pi(n-4)}{2n} > \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

(במקרה $n = 6$ יתקבל מימין שויון והמצולע הקטן יתנון לנקודה)

ומכאן $a > Q_iQ_{i+1} > 0$

קבלנו, איפוא, מצולע סריגי משוכלל בן n צלעות, שצלעו קטנה מ- a,
(המשך בע' 147)

*) לקורא המעמיק: מניין לנו שאם קים M_n סריגי קים M_n סריגי שצלעו קטנה ביותר?

על לוגיקה מתמטית - יסודות המתמטיקה *)

יהודה יוליוש רייכבך.

בכל ירחון העוסק בבקורות מתמטיות העמודים הראשונים מוקדשים לנושא "לוגיקה מתמטית ויסודות המתמטיקה" ורק בהמשך באים מקצועות מתמטיים אחרים.

דבר זה אינו מקרי; לוגיקה מתמטית ויסודות המתמטיקה תופסים מקום נכבד ביותר בבנית המתמטיקה, הבנתה והתפתחותה.

מתמטיקה שייכת למדעים אפריוריים; לסוג זה שייכת גם פיסיקה תאורטית וכל שאר המדעים או חלקיהם, אשר להוכחת משפטיהם לא מתבססים על נסויים, אלא רק על משפטים שנקבעו תחילה בלי הוכחה, הנקראים אקסיומות (הנחות).

מהגדרה זו נובע שצרוף מדע מסוים או חלקו לסוג המדעים האפריוריים תלוי בצורת למודו, בסדור והדגשת משפטים שנקבעו ללא הוכחה, הנקראים אקסיומות, בסדור והדגשת ההגדרות אשר יחד עם האקסיומות והסקת מסקנות נכונה יוצרים מערכת אחידה של משפטים הנקראת בלוגיקה סיסטמה.

התבוננות בפיסיקה, לדוגמה, מראה שהיא נעשית אפריורית יותר ויותר, כלומר מסתדרת במערכת אחידה של משפטים והגדרות הכוללת תחומים יותר ויותר רחבים של תופעות וקושרת תאוריות מרוחקות לכאורה.

שום מדע במובנו המודרני של המלה לא יכול להתקיים בלי אפריו-ריזציה, ללא סדור תופעותיו וכתיבת חוקים יסודיים המתארים תופעות אלה וללא עריכה סיסטמתית של משפטיו.

פעולה זו ברורה במיוחד בתולדות המתמטיקה; לזכות הלוגיקאים המתמטיים יש לרשום את הצורה הסופית של ההיכל הנהדר הזה הנקרא מתמטיקה.

בבסיס כל תאוריה מתמטית מונחים מושגיה הראשוניים ואקסיומות המאפינות את התכונות היסודיות של מושגים אלה. מושגים ואקסיומות אלה מומחשים כרגיל בדוגמאות.

קיימות אפשרויות שונות לבחירת מערכת מושגים ואקסיומות שישמשו כיסוד לתורה מתמטית נתונה: אפשר לשאוף לבחירה המאפשרת פתוח קל של התאוריה מבלי צרוף הגדרות נוספות, אפשר לשאוף להקטנת מספר מושגי

---

*) המאמר ובמיוחד בחלקו השני מיועד בעיקר לקוראים בעלי התענינות רבה בלוגיקה מתמטית.

היסוד למינימום, אפשר גם לדאוג לבדוד התאוריה הנתונה מרבות אחרות או, להיפך, לקשירתה עם תורות אחרות.

קביעת מינימום מושגים ראשוניים ואקסיומות מאפשרת הגדרה פשוטה של תאוריה נתונה כאוסף כל המשפטים הנובעים מאקסיומות אלה באמצעות שקולים נכונים והגדרות המשתמשות רק במושגים שהוגדרו קודם או נקבעו כראשוניים. מכאן נובע שבאוסף סגור של משפטים אפשר להמנע מהגדרות ע"י צרופן לאקסיומות.

עם סגירת רשימת המושגים הראשוניים והאקסיומות מתבטאת התפתחות התאוריה ברשימת משפטים המתקבלים מהם ע"י שקולים נכונים.

תאוריות הנבנות בצורה הנ"ל נקראות תאוריות אקסיומטיות או סיסטמות דדוקטיביות או פשוט סיסטמות; המלה דדוקטיבי מציינת שמשפטי תאוריה זו הם מסקנות מהאקסיומות, ההגדרות ומשפטים שהוכחו כבר קודם.

מתמטיקה היא אוסף סיסטמות דדוקטיביות שצורתן ובחירתן תלויות במצב התפתחות המדע.

למעשה מפתחים בדרך כלל סיסטמות דדוקטיביות ביחס לסיסטמות אחרות. כך למשל, את הגיאומטריה ביחס לאריתמטיקה, את האריתמטיקה ביחס ללוגיקה או את הגיאומטריה ישירות ביחס ללוגיקה.

בתאור של היצירה וההתפתחות של סיסטמות דדוקטיביות עוסקת היסטורית המדע.

תאוריות מתמטיות ז.א. סיסטמות דדוקטיביות הן בעלות צורה חיצונית קבועה, אבל הן יכולות גם להתקשר זו עם זו, להכלל אחת בשניה וליצור מערכות רחבות יותר המתארות מדויק יותר את התופעות המעניינות אותנו.

על כן ביסודות המתמטיקה מונחת הלוגיקה; שלמות המתמטיקה מתבססת על חוקי לוגיקה המהוים את האמצעים לקבלת משפטים חדשים; על כן יחד עם למוד המתמטיקה לומדים גם את הלוגיקה.

בנסוח משפטים אנו משתמשים בלשון מסוימת; התאורמות (משפטים מתמטיים) הן משפטים בלשון זו המורכבים ממילים אשר כל אחת מהן היא סדרה סופית של אותיות, כלומר סימנים. על כן כל משפט הוא סדרת סימנים סופית של הלשון הנתונה.

בלשון המסוימת לסימנים אלה מובן מוגדר. יכול להיות שבלשונות שונות אותה סדרה של סימנים מתארת משפטים שונים. על כן ע"י הפשטה מהמובן הקונקרטי של סימנים אלה מקבל הרשום מובן

כללי (בלתי תלוי בלשון המסוימת).

גם אקסיומות והגדרות מהוות סדרות סופיות של סימנים, כך שהוכחת משפטים מתבטאת בהעברת סדרות אלה לסדרות סימנים אחרות באמצעות חוקי המחשבה.

לאור זה נשאלה השאלה האם אפשר לדמות את חוקי המחשבה לחוקי פעולות החשבון הרגילות של חבור, חסור, כפל וחלוק. פעולות החשבון מבצעים על מספרים שהם סדרות סופיות של סימנים; לפיכך את חוקי הלו-גיקה יש גם כן להפעיל על סדרות סימנים המוגדרות באופן מתאים וע"י העברתן בדומה לפעולות החשבון - לקבל משפטים חדשים.

אם נסכים שבמתימטיקה מותר להשתמש רק בחוקי לוגיקה הרשומים בצורת פעולות על סימנים, נעבור לתחום הלוגיקה המתמטית.

לוגיקה מתמטית היא, איפוא, מתמטיקה שבה שמוש בחוקי המחשבה זהה לבצוע פעולות על סימנים בדומה לפעולות החשבון.

כל צעד ההוכחה בלוגיקה מתמטית הוא בצוע פעולה מסוימת על סימנים המהוים רשום של משפטים שהוכחו קודם.

אבל התאור הנ"ל אינו מסביר במלואו את המושג לוגיקה מתמטית. ידוע שהלשון היום יומית במבנים מחשבתיים רצוניים היא בת סתירה (במתמטיקה אנו מונעים סתירות ע"י מחיקת מסקנות מסוימות אשר רואים אותן כנוגדות את האינטואיציה).

על כן, במעבר ללוגיקה מתמטית יש קודם כל לתת רשימת הסימנים בהם נשתמש - רשימה זו היא בדרך כלל סופית ומורכבת מסימנים אחדים. נקרא לרשימה זו בדומה ללשון הרגילה בשם אלף-בית. נעיר שבספרים רבים משתמשים באלף-בית אינסופי, אבל אפשר תמיד להגדירו בעזרת אלף-בית סופי (אפילו מסימן אחד אפשר לבנות מספר אינסופי של סדרות שונות). בדומה לשפה הרגילה יש להגדיר מלים באלף-בית זה ז.א. מלים בלוגיקה הנדונה. יש לתת חוקים ליצירת מלים כמו למשל חוקי יצירת המספרים הטבעיים. מלים בלוגיקה מתמטית נקראות גם פסוקים.

בהמשך יש לתת חוקי בנית משפטים בלשון סימנים זו, לבחור משפטים מסוימים הנקראים אקסיומות והגדרות ולהגדיר פעולות מדויקות על משפטים הנקראים חוקי ההוכחה; ופעולות אלו אנלוגיות לפעולות החשבון במובן העברת הסמנים.

מהנ"ל נובע שבלוגיקה מתמטית אפשר לציין שתי שטות הוכחה:

1. שטה סינטקטית: ההוכחה מבוססת על העברה פורמלית של סימנים לפי חוקים הנקראים חוקי ההוכחה.

2. שטה סמנטית: ההוכחה מבוססת על קריאת הסימנים ובצוע שקולים בהתאם למבנם ולמטרתם (באופן אנלוגי להוכחה במתמטיקה).

מכאן נובעת השאלה הבאה: האם שתי שטות הוכחה אלה הן שקולות? ק. גדל (K. Goedel) הוכיח שבתחום מסוים הנקרא "תחשיב הפרדיקטים מסדר ראשון" שתי שטות ההוכחה שקולות (זהו משפט השלמות של התחשיב הנ"ל) ולעומת זאת בתחום תורת המספרים הטבעיים שתי השטות אינן שקולות (משפט על קיום משפטים הלא נתנים להוכחה פורמלית).

ק. גדל הוכיח גם שאם תאוריה מסוימת מחוסרת סתירות הרי המשפט הקובע זאת - הנכון באופן סמנתי - לא נתן להוכחה בשיטה סינטקטית בתאוריה זו.

בחקירת בעיות מסוג זה משחקת תפקיד מיוחד תאורית הפונקציות הנתונות לחשוב או תאורית האלגוריתמים. שתיהן מהוות חלקים של לוגיקה מתמטית והן שקולות במובן תרגומן ההדדי.

מושג האלגוריתם אנטואיטיבי מאוד; אנו לומדים אותו בדוגמאות כבר בבית הספר התכון: חשוב המחלק המשותף הגדול ביותר, מציאת שורש רבועי של מספר נתון וכו'.

מהגדרת ההוכחה הסינטקטית נובע באופן אנטואיטיבי שעבור תאוריה כל שהיא בלוגיקה מתמטית אפשר באופן אלגוריתמי לספור את אוסף משפטיה ביחס לאקסיומות, כאשר פעולות ההוכחה מתבצעות על סדרות סופיות של סמני תאוריה זו.

במקום להגיד שאוסף סמנים (משפטים) אפשר לספור באופן אלגוריתמי אומרים גם כך שאפשר לספורו באופן רקורנטי או רקורסיבי.

כאשר אוסף סמנים וגם משלימו (ז.א. כלל סמנים שאינם שייכים לאוסף הנתון) אפשר לספור באופן רקורסיטבי אומרים שהאוסף נתן לחשוב.

תאוריה נתנת להכרעה (לפי A. Church) אם ורק אם אוסף משפטיה נתן לחשוב.

כיון שפעולות ההוכחה בלוגיקה מתמטית הן פעולות על סימנים, אפשר עבור תאוריה כלשהי הנלמדת בלוגיקה זו לנסח את השאלה הבאה: האם קיימת שטה כללית המאפשרת לקבוע אם סדרת סימנים כלשהי בתאוריה זו היא אחד ממשפטיה או לאו? נסוח מדויק של בעיה זו לפי A. Church הוא: האם אוסף משפטים של התאוריה מסוימת נתן לחשוב.

A. Church הוכיח ששאלה זו הנקראת בעית ההכרעה לא נתנת לפתרון באופן כללי.

בעית ההכרעה מתקשרת עם התאוריה של לוגיקות רב-ערכיות. מחבר מאמר זה מתאר בעבודותיו ([1] , [2]) קשרים חדשים בין תאוריות אלה.

להכרה יותר מדויקת של בעיות אלה אפשר לפנות לעבודות מיוחדות בלוגיקה מתמטית (למשל לעבודה של הלוגיקאי J. Slupecki).

ההערות הנ"ל מהוות רשימה אינטואיטיבית של מספר בעיות הנבדקות בלוגיקה מתמטית. תאורן המלא אפשרי רק בספרים העוסקים במדע זה באופן מיוחד.

נציין שמתמטיקאים רבים מפתחים את המתמטיקה באמצעות לוגיקה מתמטית, כיון שנסוח סופי של בעיה מתמטית אפשרי רק על בסיס הלוגיקה המתמטית.

לאור הנ"ל אפשר היה לחשוב שתפקיד האינטואיציה במתמטיקה של ימינו הוקטן. במציאות זה לא כך. אף על פי שבמתמטיקה קובעת הלוגיקה ובקומות הבנויות כבר של היכל המתמטיקה אין לאינטואיציה חשיבות, הרי היא משחקת תפקיד ראשון בבניה עצמה. בגלוי מושגים ומשפטים חדשים אנו משתמשים באינטואיציה; גם בהוכחתם היא שמובילה אותנו בדרך הנכונה בין הדרכים הרבות הלא נכונות לעתים.

אינטואיציה היא תכנית בנית התאוריה, לוגיקה היא המבצעת בניה זו, וצורת תאוריה זו בלוגיקה מתמטית היא מטרתה הסופית.

[1] Juliusz Reichbach. On the connection of the first-order functional calculus with many valued propositional calculi, in print, Journal of Formal Logic.

[2] Juliusz Reichbach. On the connection of the first-order functional calculus with L_0 - propositional calculus, in preparation.

בעיה ופתרונה - פתרונות

את הבעיות ראה בעמוד 130

1. כדי שהבטויים $x^2 + ux \pm v$ יתפרקו כנ"ל הכרחי שיהיו פתרונות רציונליים לשתי המשואות $x^2 + ux \pm v = 0$.

התנאי לרציונליות הפתרונות הוא שהדסקרימיננטים יהיו רבועים שלמים, כלומר:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad u^2 + 4v = a^2 \\ &2 \quad u^2 - 4v = b^2 \end{aligned} \qquad (\text{שלמים } b;a;v;u) \qquad (1)$$

נחלץ את u ו- v ונקבל

$$u^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \qquad v = \tfrac{1}{8}(a^2 - b^2) \qquad (2)$$

נרשום:

$$x = \frac{a+b}{2} \qquad y = \frac{a-b}{2} \Longleftarrow \begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \qquad (3)$$

$a^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$b^2 = x^2 - 2xy + y^2$

מתוך (1) נובע ש- a^2 ו- b^2 ומכאן גם a ו- b הם בעלי אותה הזוגיות (ז"א שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים). מכאן שב-(3) x ו- y הם מספרים שלמים.

נציב את (3) לתוך (2). מקבלים:

$$u^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad v = \tfrac{1}{2}xy \qquad (4)$$

השלישיה u ;x; y היא שלישיה פתגוריתֿ*) ולכן

$$x = m^2 - n^2; \quad y = 2mn \; ; \quad u = m^2 + n^2 \qquad (5)$$

ע"י הצבה ב(4) מתקבל $v = mn\,(m^2 - n^2)$

בסך הכל הפתרון הוא:

$u = m^2 + n^2 \; ; \quad v = mn(m^2 - n^2)$ (m ו- n טבעיים)

$$x^2 + (m^2 + n^2) + mn(m^2-n^2) = (x+m^2-mn)(x + n^2 + mn)$$
$$x^2 + (m^2 + n^2) - mn(m^2-n^2) = (x+m^2+mn)(x + n^2 - mn)$$

<u>הערות:</u> דוגמא א) מתאימה ל- $n = 1, \; m = 2$

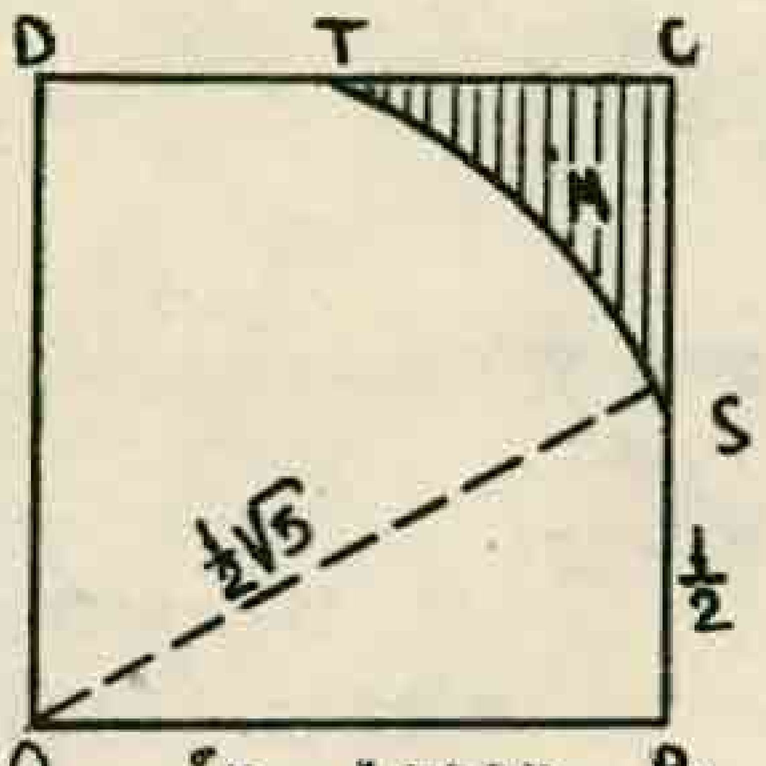
דוגמא ב) מתאימה ל- $n = 2, \; m = 3$

נעיר עוד שאם u,v מקיימים את התנאים הנ"ל גם ku, k^2v עבור כל k שלם ימלאו אותם.

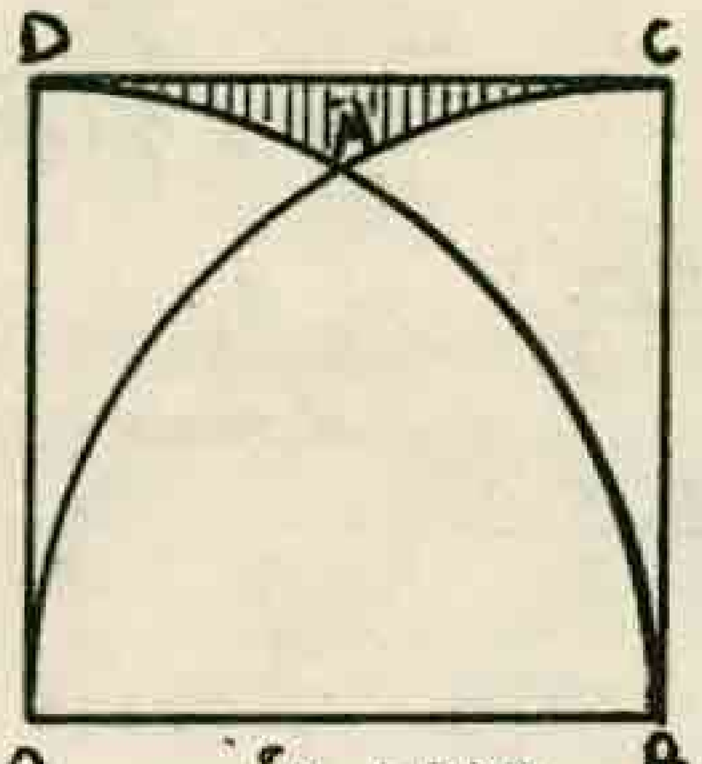
---

*) ראה בעיה ופתרונה מס' 1 בחוברת 4 עמ' 98 ואת המאמר "המספרים הפתגוריים והמספרים המעוקבים הדומים להם" באותה חוברת עמ' 99.

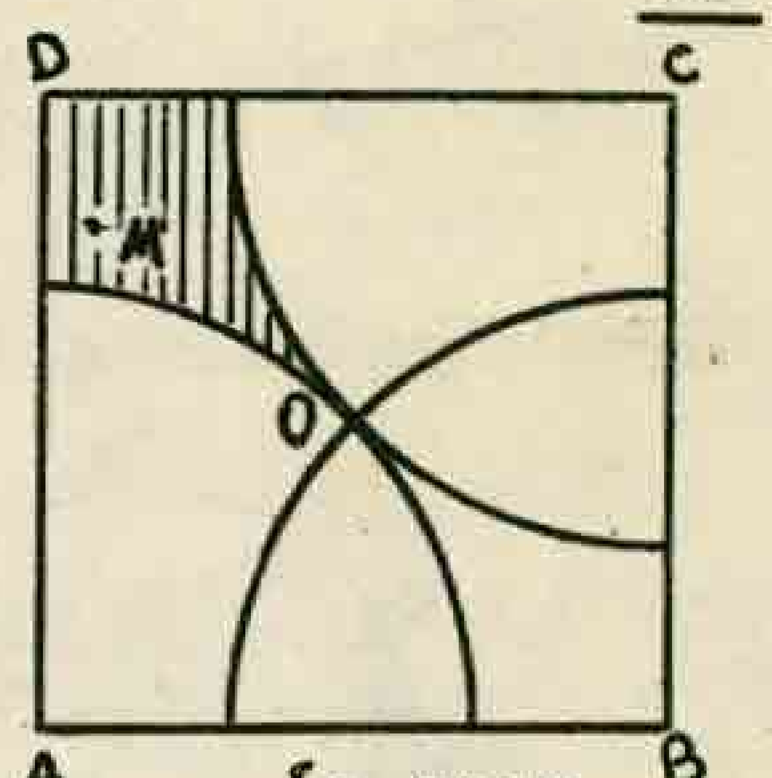
.2



A ציור א' B



A ציור ב' B



A ציור ג' B

א) נניח $MA > \frac{1}{2}\sqrt{5}$. הנקודה M נמצאת בחלק המקווקו של הרבוע בציור א), המוגבל ע"י קשת שמרכזה ב- A ורדיוסה AS שוה $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. קל לראות ש $BS = \frac{1}{2}$. ומכאן $CS = TC = \frac{1}{2}$. עבור כל M בתחום המקווקו קיים $\angle TMB > 90^\circ$ ומכאן $MB < TB$

באותו אופן $MD < DS$. כמו-כן ברור כי $MC < BT$

לכן כל אחד ממרחקים אלה קטן מ- $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

ב) נניח $MA > 1$. M נמצאת מעל לקשת שמרכזה ב- A ורדיוסה 1. ברור שבמקרה זה $MC < 1$. אם יחד עם זה $MB > 1$ הרי $MD < 1$ מ.ש.ל. (ראה ציור ב').

ג) נניח $MA > \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $MB > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ו- $MC > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (ראה ציור ג). במקרה זה $MD < OD$ (O מרכז הרבוע). וז.א. $MD < \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

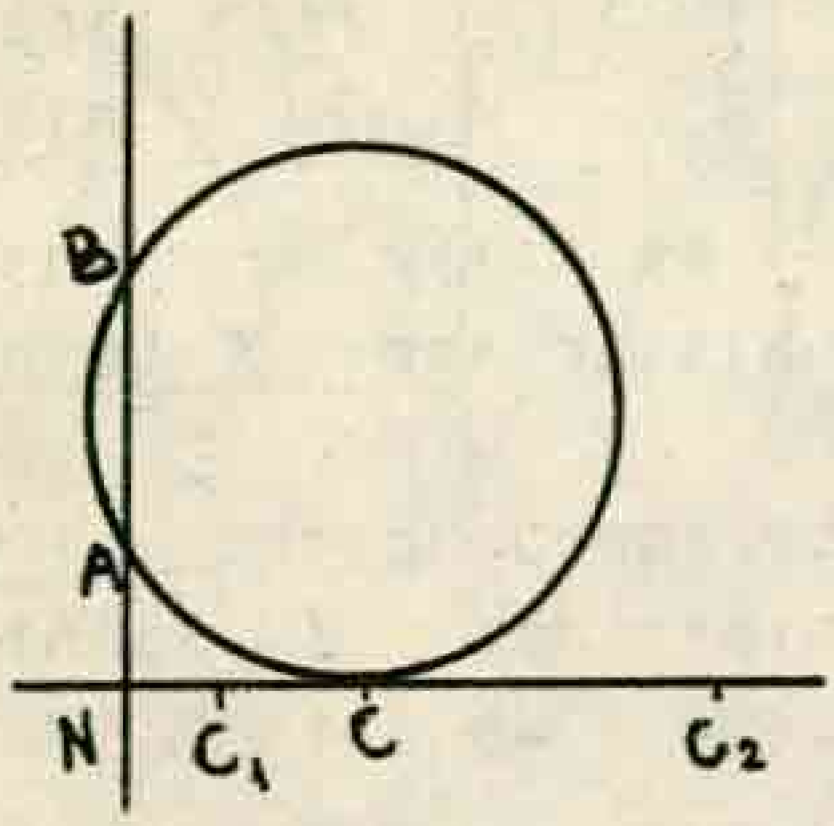
נמליץ לפני הקורא להוכיח שהמספרים $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, 1, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ הם הקטנים בין המספרים K_3, K_2, K_1 בעלי התכונה שברבוע בעל צלע 1 לכל היותר אחד המרחקים מנקודה בפנים הרבוע לקדקדיו גדול מ- K_1, לכל היותר שנים גדולים מ- K_2 ולכל היותר שלשה גדולים מ- K_3.

בחוברת מס' 3 הוצעה במדור זה הבעיה הבאה:

על קיר אנכי תלויה תמונה AB . (ראה ציור) נתון $BN = b$, $AN = a$. באיזה מרחק מהקיר צריך לעמוד איש שעינו נמצאת בגובה N כך שהזוית בה תראה התמונה תהיה מכסימלית. התר בלי שמוש בחשבון דיפרנציאלי.

בעמוד 72 של חוב.3 הבאנו פתרון לשאלה זו בדרך טריגונומטרית.

בהמשך אנו מפרסמים פתרון נאה ביותר של השאלה בלי שמוש בטריגונומטריה. הפתרון נשלח לנו ע"י מר רפאל זמיר, מורה בביה"ס התיכון שע"י סמינר תלפיות בת.א.



דרך N נעביר אנך ל- NB.
נבנה את המעגל העובר דרך A ו- B
ומשיק לאנך הנ"ל (ב- C).
(בצע בניה זו!)

הזוית $\measuredangle ACB$ היא זוית הראיה המכסימלית מנקודה הנמצאת על NC כי כל נקודה אחרת של NC (למשל C_1 או C_2) נמצאת מחוץ למעגל כך שהזויות

$\measuredangle AC_1B$ ו $\measuredangle AC_2B$ קטנות

מ- $\measuredangle ACB$ (נמק זאת!). לשם חשוב NC נשתמש בעובדה $NC^2=NA.NB$ - נוסחה ידועה בגיאומטריה של המעגל; מכאן $NC = \sqrt{NA.NB} = \sqrt{ab}$.

רשימת פותרי השאלות מס' ת. 31 - ת. 45 (המשך - ראה בסוף החוברת)

25. פרויקט יעל, יא' הריאלי חיפה. 35, *34, *33, 32, *31,
45, *43, *42, *38, *37 (21 נק.)
26. קוזמא אילן, יב' ריאלי חיפה. 36, 35, 34, *33, 32, 31,
45, 44, 43, 42, 41, *40, 39, 38, 37 (43 נק.)
27. קם צבי, יב' הריאלי חיפה. *38, *37, 35, *34, *33, 32, 31,
*45, 43, *40, *39 (24 נק.)
28. קריב עודד, יא' עירוני ה' ת.א. 36, 35, 34, *33, 32, 31,
45, 44, 43, 42, 41, 40, 39, 38, 37 (45 נק.)
29. רזניק שמואל, יא' עירוני ט' חיפה. *40, 38, *36, *33,
45, 43, *42 (15 נק.)
30. שלח אהרון יא', תיכון חדש ת.א. 36, 35, 34, 33, 32, 31
45, *44, *43, 42, 41; 40, 39, 38, 37 (44 נק.)
31. שור אמיר, יא' תיכון בית הכרם ים. *35, 34, 32, *31,
*45, *44, 43, *42; *41, 40, 37, *36 (28 נק.)
32. שטרן יעקב, יא' הריאלי, חיפה. 45, *38, *36, 32 (6 נק.)
33. שילר איתן קבוץ מענית. *40, 39, 38, 37, 36, *34, *33, 32, 31
45, *44, 43, 42 (34 נק.)

על העתקים של מעגל לתוך עצמו (חלק שני)*

מ. רייכבך.

III מושג הקשירות.

יהא נתון הקטע $X = [0,1]$ ונקודה $B \in X$ (ציור מס' 3).
הקבוצות $S_1 = [0;B]$ ו- $S_2 = [B;1]$ מהוות ביחד את X.
הנקודה B שייכת גם ל- S_1 וגם ל- S_2. המצב הזה אפייני לכל חלוקה של X לשתי קבוצות סגורות ב- X בהתאם למשפט הבא:

<u>משפט 1.</u> בחלוקה כלשהי של הקטע $X = [0,1]$ לשתי קבוצות S_1 ו- S_2 סגורות ב- X ולא ריקות קיימת לפחות נקודה אחת של X השייכת גם ל- S_1 וגם ל- S_2.

לא נתן כאן את הוכחת משפט זה שהוא ברור למדי מבחינה אינטואי-טיבית.

<u>הגדרה:</u> קבוצה X כלשהי תקרא <u>קשירה</u> אם בכל חלוקה של X לשתי תתקבוצות לא ריקות S_1 ו- S_2 סגורות ב- X קיימת לפחות נקודה אחת (התלויה בדרך כלל בצורת החלוקה) השייכת גם ל- S_1 וגם ל- S_2.
לאור הגדרה זו נתן לנסח את המשפט 1 בקצור: הקטע $[0;1]$ הוא קבוצה קשירה. לעומת זאת הקבוצה X המורכבת משני הקטעים הסגורים $S_1 = [0\,;\,\frac{1}{4}]$ ו $S_2 = [\frac{1}{2}\,;\,1]$ אינה קשירה - בחלוקת X לקבוצות סגורות ב- X S_1 ו- S_2 אין ל- S_1 ו- S_2 נקודה משותפת. נקבל בלי הוכחה גם את העובדה שכל מעגל הוא קבוצה קשירה.

אם נחלק את המעגל לשתי קבוצות סגורות, למשל, לשני חצאי מעגלים (יחד עם הקצוות), יהיו הקצוות של שני חצאי המעגלים משותפים לשתי הקבוצות.

IV העתקים רציפים של המעגל לתוך עצמו.

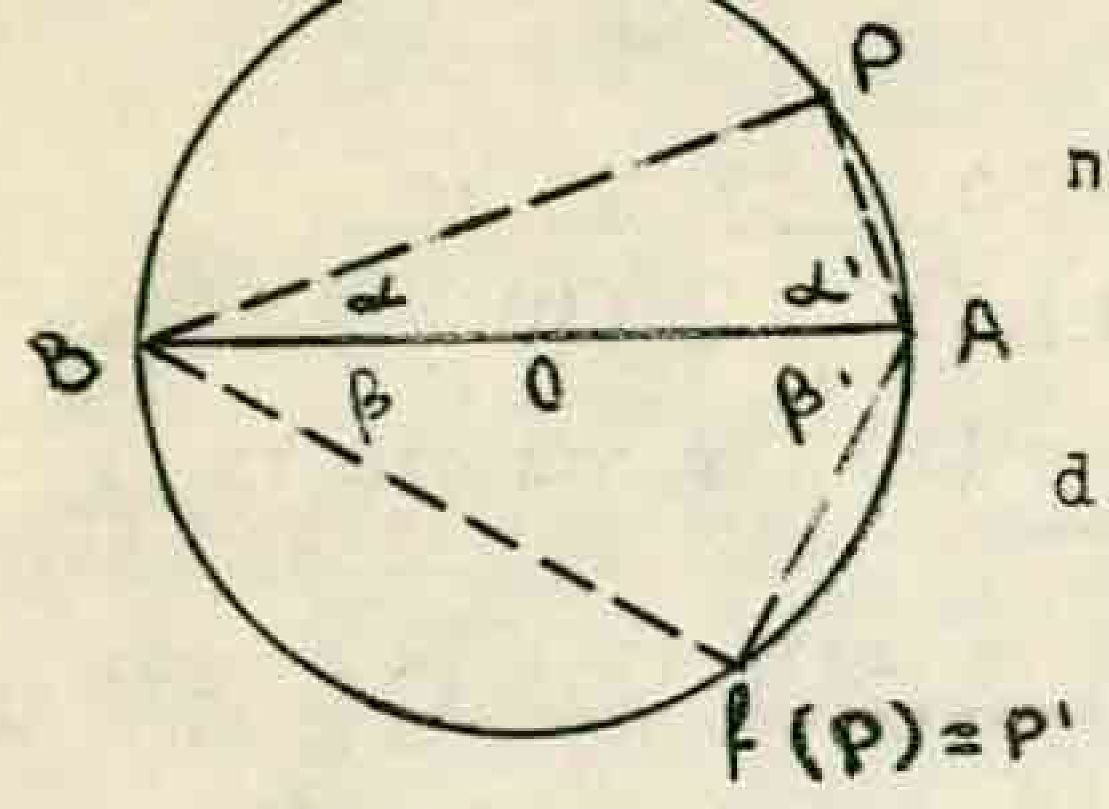
נשתמש במושגים שהוגדרו לעיל להוכחת המשפט הבא:

<u>משפט.</u> יהא X מעגל ו- $f : X \longmapsto X$ העתק רציף של מעגל זה לתוך עצמו. אזי תמיד קיימת אחת משתי האפשרויות הבאות (או שתיהן גם יחד):

(i) ב- X קיימת לפחות נקודת שבת אחת P ז.א. נקודה כזו ש- $f(P) = P$.

(ii) בשביל קטר כלשהו AB של המעגל קיימת ב- X לפחות נקודה אחת P כזו שהתמונה שלה $P'=f(P)$ סימטרית ל- P ביחס לקטר AB.

*) החלק הראשון של מאמר זה פורסם ב"גליונות מתמטיקה" מס' 4 עמ' 107.



ציור 4.

הוכחה: ראה ציור מס' 4. נסמן ב- S_1 את קבוצת הנקודות P המקיימות את התנאי

$$d(P;B) \leqslant d\,[f(P), B] \qquad (1)$$

כלומר נקודות אשר המרחק שלהן מהנקודה B אינו גדול ממרחק התמונה שלהן מהנקודה B.

S_1 אינה קבוצה ריקה כי, למשל, B בעצמה שייכת ל- S_1(ובאמת $d(B,B) = 0$ ואפס קטן או שוה מאורך קטע כלשהו).

הקבוצה S_1 סגורה במעגל X. ובאמת, אם $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ הן נקודות של S_1

ו- $\lim_{n\to\infty} P_n = P \quad (X \ni P)$

נראה ש- P שייכת ל- S_1. לפי הנתון קיים עבור כל n :

$$d(P_n, B) \leqslant d\,[f(P_n), B] \qquad (2)$$

לא קשה לראות שאם $\lim_{n\to\infty} P_n = P$

הרי $\lim_{n\to\infty} d(P_n, B) = d(P, B)$

מרציפות ההעתק נובע שקיים $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P) = P'$

ומכאן כנ"ל: $\lim_{n\to\infty} d\,[f(P_n), B] = d(P', B)$

במעבר לגבול אישיון (2) נשמר ומקבלים, איפוא:

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n, B) \leqslant \lim_{n\to\infty} d\,[f(P_n), B]$$

ולאחר שנציב את ערכי שני הגבולות

$$d(P,B) \leqslant d(P',B) = d\,[f(P), B]$$

ולכן גם P שייכת ל- S_1, כך ש- S_1 היא קבוצה סגורה ב- X.

באופן דומה נגדיר S_2 כקבוצת נקודות המעגל המקיימות

$$d(P,A) \leqslant d\,[f(P), A] \qquad (1')$$

בדיוק כמו S_1, גם S_2 היא קבוצה סגורה בתוך X.

נראה כעת ש- S_1 ו- S_2 מגדירות חלוקה של המעגל, כלומר כל נקודה של X שייכת לאחת משתי הקבוצות. ואמנם, אם $X \ni P$ יתכנו 3 מקרים:

א) $f(P) = P$ ב) $f(P)$ סמטרית ל- P ביחס לקטר AB

ג) כל מצב אחר של $f(P)$ ביחס ל- P.

במקרים א) ו-ב) קיים:

$$d(P,B) = d\left[f(P), B\right]$$

ו- .

$$d(P,A) = d\left[f(P), A\right]$$

כלומר קיים (1) ו-(1') והנקודה P שייכת גם ל- S_1 וגם ל- S_2,
במקרה ג) (ראה ציור מס' 4) קיים אחד משני המצבים (1) או (1').ובאמת
נניח ש- $d\left[f(P), B\right] < d(P,B)$
ז.א. (1) אינו קיים. פרוש הדבר

$$BP = AB\cos\alpha > BP' = AB\cos\beta$$

α ו- β זויות חדות ו- $\cos\alpha > \cos\beta$. מכאן $\alpha < \beta$.
אבל $\alpha' = 90^\circ - \alpha$ ו $\beta' = 90^\circ - \beta$ ואם $\alpha < \beta$ הרי $\alpha' > \beta'$
ו-

$$PA = AB\cos\alpha' < AB\cos\beta' = P'A$$

כלומר מתקיים (1'). ברור מטעמי סמטריה שאם לא מתקיים (1') מתקיים
(1). עבור כל P מתקיים, איפוא, אחד משני התנאים (1) או (1'), ז.א.
כל P שייכת ל- S_1 או ל- S_2.

החלוקה של הקבוצה X ל- S_1 ו- S_2, איפוא, כפי שראינו לעיל
חלוקה לשתי קבוצות לא ריקות סגורות ב- X. המעגל X היא קבוצה
קשירה כך שקיימת לפחות נקודה אחת P השייכת גם ל- S_1 וגם ל- S_2.
עבור נקודה כזו קיים גם (1) וגם (1'). אבל אם הנקודות $f(P)$
ו- P על המעגל מקיימות בבת אחת

$$d(P,B) \leqslant d\left[f(P), B\right]$$

$$d(P,A) \leqslant d\left[f(P), A\right]$$

אזי או ש $P = f(P)$ - או ש- P ו- $f(P)$ סימטריות ביחס
לקטר AB. (לפי הנ"ל $\alpha < \beta$ ו- $\alpha' < \beta'$ ז.א. $90^\circ - \alpha < 90^\circ - \beta$
כלומר $\beta < \alpha$. מכאן $\alpha = \beta$ ז.א. הנקודות סימטריות ביחס ל- AB
או מתלכדות). בזה הוכח שקיים אחד משני המקרים (i) או (ii).

<u>הערה א':</u> את המשפט הנ"ל אפשר להכליל באופן הבא:
עבור העתק רציף כלשהו $X \xrightarrow{f} X$ של פני כדור X לתוך עצמו עבור
וקטור $\vec{a}$ כלשהו $(\vec{a} \neq 0)$ קיימת נקודה P ומספר K
כזה ש - $\overrightarrow{P, f(P)} = K\vec{a}$.
(משפט דומה אפשר גם להוכיח עבור פני כדור n -מימדי).

<u>הערה ב׳</u>: אחרי הגשת המאמר לדפוס מצא פרופ׳ ח.חנני הוכחה פשוטה יותר של המשפט העיקרי של מאמר זה, הבנויה על מושג המכפלה הסקלרית של שני וקטורים.

<u>(המשך מע׳ 135)</u>
בנגוד לבחירת המצולע הראשון.

אם $n=5$ יהיה $P_iQ_{i+1} < a$

לכן $Q_iQ_{i+1} = a - P_iQ_{i+1} = 2a(\frac{1}{2}-\sin\frac{\pi}{10})=a(1-2\sin\frac{\pi}{10}) < a$

קבלנו סתירה דומה. מ.ש.ל.

אם נקבע במערכת צירים ישרת זוית לשני הצירים יחידות לאו דוקא שוות נקבל מערכת מלבנית. הנקודות ששעוריהן מספרים שלמים מהוות "סריג מלבני". בהוכחת משפט 4 לגבי המקרים $n=5$ ו- $n > 6$ לא השתמשנו בעובדה כי המערכת רבועית. ההוכחה (ללא כל שנוי) כשרה לכן גם לגבי סריג מלבני. במערכת מלבנית אשר בה היחס בין יחידת ציר ה-y ויחידת ציר ה-x הוא $\sqrt{3}$, מהוות נקודות הסריג $(0;0)$, $(2,0)$ ו-$(1;1)$ משולש שוה-צלעות. שש הנקודות $(2;0),(1;1),(-1;1),(-2;0),(-1;-1)$ ו-$(1;-1)$ מהוות משושה משוכלל סריגי. לכן יתקים המשפט הבא:

<u>משפט 5.</u> אם n נקודות סריג מלבני מהוות מצולע משוכלל הרי $n = 3$ או $n = 4$ או $n = 6$. במלים אחרות: במערכת מלבנית המשולש המשוכלל, הרבוע והמשושה המשוכלל הם המצולעים הסריגיים המשוכללים היחידים.

נעיר לבסוף שבעזרת משפט זה אפשר גם להוכיח את הטענה הבאה:
<u>משפט 6.</u> תהי α זוית חדה $\alpha<\pi/2$ ויהי $\cos\alpha$ מספר רציונלי. אזי או $\alpha = \pi/3$ או α/π הוא מספר אירציונלי. במלים אחרות: $\pi/3 = 60^\circ$ היא הזוית החדה היחידה המהוה כפולה רציונלית של π שערך ה- cos שלה רציונלי.

<u>חתוך ריבוע.</u> נתון ריבוע. חותכים מכל צד מלבן שצלעותיו מקבילות לצלעות הריבוע ורוחבו 1 ס"מ. באופן זה מתקבל ריבוע חדש. חוזרים על התהליך n פעמים ולבסוף התקבל ריבוע אשר אורך צלעו מחצית האורך של הריבוע הנתון. מה היה אורך הצלע של הריבוע הנתון?

<u>רבוע שלם.</u> 1. איזה מספר מבין המספרים

6^{6} ; 7^{7} ; 9^{9} הוא ריבוע שלם?

<u>רבוע שלם</u> 2. האם קיים מספר טבעי שהוא ריבוע שלם ואשר ספרותיו בשיטת הכתיבה העשירית הן 7; 5; 3; 3; 3; 2

על שרשים של מספרים רציונאליים

דוד גוטגלד

מספר רציונאלי הוא מספר הניתן לתאור כשבר פשוט בעל מונה ומכנה שלמים, למשל $\frac{2}{3}$, $\frac{-5}{8}$, $\frac{97}{-12}$, ובאופן כללי $\frac{p}{q}$, כאשר p ו- q מספרים שלמים, $q \neq 0$.

ברור שכל מספר שלם הוא מספר רציונאלי, כי אם m מספר שלם, הרי הוא ניתן לתאור כשבר פשוט $\frac{m}{1}$. המספרים השלמים מהוים, איפוא, תתקבוצה (קבוצה חלקית) של קבוצת המספרים הרציונאליים.

מספר רציונאלי $r = \frac{p}{q}$ יקרא מצומצם אם p ו- q זרים זה לזה, כלומר אם ל- p ול- q אין גורם משותף השונה מ-1 (או -1). במקרה זה נסמן $(p,q) = 1$ לאמור: המחלק המשותף הגדול ביותר של p ו- q הוא 1.

כמו כן נכניס את הסימון הבא: יהיו a ו- b מספרים שלמים ויהי $b \neq 0$. אזי אומרים כי "b מחלק את a" או: "a מתחלק ב- b" אם קיים מספר שלם c כך ש- $a = bc$. עובדה זו תסומן על ידי b / a. (לפי זה "מחלק" פרושו מחלק בלי שארית).

לא קשה להצביע על דוגמה של מספר שאיננו רציונאלי. למשל המספר $\sqrt{2}$, כלומר המספר שרבועו הוא המספר הרציונאלי 2. והנה ההוכחה: אם נניח ש-$\sqrt{2}$ הוא מספר רציונאלי מצומצם (אחרת – נצמצם אותו) $\frac{p}{q}$, הרי

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$(p; q) = 1$, ולכן גם $(p^2; q^2) = 1$ (ז.א. ל- p^2 ו- q^2 אין מחלקים משותפים) ו- $\frac{p^2}{q^2}$ יכול להיות מספר שלם רק כאשר $q^2 = 1$ אבל אז $p^2 = 2$ וקל לראות שאין מספר שלם שריבועו 2.

<u>הערה:</u> השיקולים המאפשרים להסיק כי $(p^2;q^2)=1$ מתוך $(p;q) = 1$ מסתמכים על אחד המשפטים היסודיים בתורת המספרים, הוא "משפט הפריקות החדערכית של מספרים טבעיים לגורמים ראשוניים". משפט זה טוען שכל מספר טבעי N או שהוא עצמו ראשוני או שהוא ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים, וההצגה היא יחידה עד כדי סדר הגורמים, כלומר אם

$$N = p_1\, p_2 \cdots p_k = q_1\, q_2 \cdots q_h$$

באשר p_i $(1 \leq i \leq k)$ ו- q_j $(1 \leq j \leq h)$ הם מספרים ראשוניים, אזי $h=k$ ולכל p_i מתאים q_j השווה לו,

היינו ששתי המכפלות מכילות בדיוק אותם גורמים (המסודרים אולי באופנים שונים). הוכחת משפט זה חורגת ממסגרת המאמר.

את המספר $\sqrt{2}$ קל להמחיש באופן גיאומטרי כאורך האלכסון של רבוע בעל צלע באורך 1.

קיומם של מספרים שאינם רציונאליים (שיקראו להלן אירציונאליים) היה ידוע כבר ליונים הקדמונים. הקורא יכול בדומה לנ"ל להיוכח ש- $\sqrt{r}$ עבור כל r טבעי הוא מספר אירציונאלי, אלא אם כן, r הוא רבוע של מספר שלם.

מטרת מאמר זה היא להכליל עובדה זו עבור $\sqrt[n]{r}$ כאשר n הוא מספר טבעי ו- r מספר רציונאלי.

ההוכחה מסתמכת על המשפט הבא של גאוס (C.F.Gauss 1777-1855):

אם המספר הרציונאלי <u>המצומצם</u> $\frac{p}{q}$ הוא פתרון של המשואה האלגברית

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

שבה $a_0 \neq 0$ ו- $a_n \neq 0$ וכל המקדמים a_i עבור $0 \leq i \leq n$ הם מספרים שלמים, אזי p מחלק את a_n ו- q מחלק את a_0 (בסמון: p/a_n, q/a_0).

<u>הוכחה:</u> כיון שהמספר $\frac{p}{q}$ פותר את המשואה (1) הרי:

$$a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0 \qquad (2)$$

נכפול את שני האגפים ב- q^{n-1} ונקבל את השויון:

$$-a_0\frac{p^n}{q} = a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1} \qquad (3)$$

אגף הימין של (3) מהוה מספר שלם בתור סכום של מחוברים שכלם שלמים, לכן גם המספר $-a_0\frac{p^n}{q}$ העומד באגף השמאלי הוא שלם וז.א. ש- a_0p^n מתחלק ב- q.

אבל $(p;q) = 1$ ומכאן גם $(p^n; q) = 1$ ולכן q/a_0.
ובדרך דומה, אגף שמאל של 3 מתחלק ב- p ולכן גם אגף ימין הוא כפולה שלמה של p. חלוק אגף ימין של (3) ב- p נותן:

$$a_1p^{n-2} + \dots + a_{n-1}q^{n-2} + \frac{a_nq^{n-1}}{p}$$

$n-1$ המחוברים הראשונים של בטוי זה הם שלמים וכדי שכל הבטוי יתאר מספר שלם הכרחי שגם המחובר האחרון יהיה מספר שלם, ז.א.

$$p/a_n q^{n-1} \quad \text{אבל} \quad (p;q^{n-1}) = 1$$

כנ"ל ולכן a_n חייב להתחלק ב- p .

הערה: נשאיר לקורא את הדיון במקרה כאשר $a_n = 0$

<u>דוגמאות:</u> א) תהי נתונה המשואה $2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 3 = 0$
אם יש למשואה זו פתרונות רציונאליים $\frac{p}{q}$ הרי $p/-3$ $q/2$

ז.א. p יכול לקבל את הערכים ± 3, ± 1 ו-q את הערכים ± 2, ± 1.
הפתרונות הרציונאליים האפשריים יש לחפש בין המספרים

$$3 \ , -3 \ , \frac{3}{2} , -\frac{3}{2} \ , 1 \ , -1 \ , \frac{1}{2} , -\frac{1}{2}$$

ע"י הצבה אפשר לבדוק ש- $x = -1$ ו- $x = \frac{3}{2}$ מקיימים את המשואה הנתונה. אגב, אלה הם הפתרונות הממשיים היחידים של משואה זו. הוכח זאת!

ב) נתונה המשואה $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$

כאן $a_0 = 1$ ואם יש למשואה זו פתרון רציונאלי $\frac{p}{q}$, אזי $q/1$, כלומר $q = \pm 1$. כמסקנה מקבלים שכאשר במשואה כנ"ל כל המקדמים הם שלמים ומקדם החזקה הגבוהה ביותר הוא 1, אזי אם למשואה זו יש בכלל פתרון רציונאלי, הוא מוכרח להיות מספר שלם המחלק את האבר החפשי של המשואה.

נחזור עתה לנושא העיקרי של דיוננו ונוכיח את המשפט הבא:

כל מספר מהצורה $\sqrt[n]{r}$, באשר r מספר רציונאלי מצומצם ו-n מספר טבעי, הוא אי-רציונאלי פרט למקרה כאשר המונה והמכנה של r הם חזקות n-יות של מספרים שלמים.

<u>הוכחה *):</u>

השורש ה-n-י של המספר הרציונאלי (המצומצם) $r = \frac{a}{b}$ מהוה פתרון של המשואה האלגברית $bx^n - a = 0$, המתקבלת כמקרה פרטי של המשואה (1) דלעיל, כאשר מציבים:

$$a_0 = b, \ a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0 \ , \ a_n = -a$$

---

*) כדי להימנע מהבחנה בין n זוגי לאי-זוגי אני מצמצם את הדיון למספרים רציונאליים חיוביים.

ועתה אם $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$ $r =$ $((p;q)=1)$ מהוה פתרון של המשואה הנ"ל

פירוש הדבר כי $b\left(\frac{p}{q}\right)^n - a = 0$ או $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{a}{b}$ (4)

לפי משפט גאוס p/a ו- q/b, כלומר קיימים מספרים טבעיים a_1 ו- b_1 שעבורם $a = pa_1$, $b = qb_1$

ולכן $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{pa_1}{qb_1}$

יחד עם זה $(a_1, b_1) = 1$ כי a ו- b זרים ביניהם.

על ידי חלוק שני אגפי (4) ב- $\frac{p}{q}$ מקבלים:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} = \frac{a_1}{b_1} \qquad (4')$$

ז.א. המספר $\frac{p}{q}$ הוא פתרון המשואה האלגברית $b_1x^{n-1} - a_1 = 0$

לפי משפט גאוס p/a_1 ו- q/b_1 וקיימים מספרים טבעיים a_2 ו- b_2 שעבורם $a_1 = pa_2; \quad b_1 = qb_2$

כתוצאה מכך: $a = pa_1 = p^2a_2, \quad b = qb_1 + q^2b_2$

כלומר p^2/a ו- q^2/b

ע"י חלוק (4') ב- $\frac{p}{q}$ מקבלים: $\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} = \frac{a_2}{b_2}$ (4")

ו- $(a_2; b_2) = 1$.

כך נמשיך בצעדים כנ"ל תוך שימוש חוזר במשפט גאוס. בכל שלב יורד מעריך החזקה של $\frac{p}{q}$ ב- 1. אחרי n שלבים

נקבל $\left(\frac{p}{q}\right)^0 = \frac{a_n}{b_n}$ כלומר $a_n = b_n$

וכמו בצעדים הראשונים שפותחו בפרוטרוט מקבלים גם כאן $(a_n;b_n) = 1$
אבל שויון בין שני מספרים שאין להם מחלק משותף גדול מ-1 מגביל אותם לערכים ± 1 בלבד ובהתאם להערה שבסוף העמוד הקודם $a_n = b_n = 1$

הצבת הערך 1 עבור a_n ו- b_n בשויונות (5) נותנת:

$$a = p^n \qquad b = q^n$$

כלומר ש- a ו- b הן חזקות n-יות של מספרים שלמים. הוכחנו,

איפוא, שאם $\sqrt[n]{r}$ (r מספר רציונאלי מצומצם) הוא מספר רציונאלי אזי המונה והמכנה של r הן חזקות n-יות של מספרים שלמים, אחרת $\sqrt[n]{r}$ הוא מספר אירציונאלי. ובפרט נכון הדבר שהשורש ה-n-י של מספר שלם m הוא אירציונאלי כל עוד m אינו חזקה n-ית של מספר שלם.

פתרון הבעיות של התחרות המתמדת

בגליון הבא (מס' 6) נפרסם את פתרונות השאלות ת.46-ת.60 ובזה יסתיים סבוב ראשון של התחרות המתמדת. שמות הזוכים בסבוב זה יפורסמו אף הם בגליון מס' 6.

הערות: 1. בתרגיל ת.57 בחוברת מס' 4 נפלה טעות. צריך להיות:
א. הוכח כי בין המספרים שנבחרו נמצאים לפחות שני מספרים אשר האחד מהם הוא כפולה של השני.

2. כמה קוראים לא הבינו את שאלת הרמזורים (שאלה ת.24). שגיאתם היא בכך שלא שמו לב לכך שנתוני המעבר ברמזורים הם לגבי כל רמזור אשר בו נבחר. בפתרון שהובא בחוברת 4 הפעלנו את העובדה הזו הן למעבר מרמזור A אל רמזור B והן למעבר מרמזור B אל רמזור A. במלים אחרות, לפי נתוני השאלה, גם אם תצא מכונית מרמזור B באור ירוק ותסע אל רמזור A, היא תגיע אל האחרון באור ירוק. בנגוד לטענת אחדים, אין הכרח שהרמזורים יאירו ירוק באותו זמן. יתכן, למשל, שרמזור A יאיר ירוק בדקות 1, 3, 5, וכו' ורמזור B ידלוק בדקות 2, 4, 6, 8,.... משך זמן האורה - "הרף עין", והזמן הדרוש למכונית הנתונה להגיע מרמזור אחד לשני הוא דקה.

3. לא נכנס לוכוח עם קוראים הטוענים שפסלנו חלקית או בשלמות פתרון ששלחו. בדרך כלל נפסל חלק של שאלה אם חסרים פרטים בפתרון, אם הניסוח אינו ברור או אם התשובה מסובכת שלא לצורך. מכל מקום, נשתדל לבדוק כל טענה ואם תמצא צודקת, נזכה את המתחרים בנקודות.

הפוך האפודה. בפנים הצד האחורי של אפודה (סוודר) תפור סימן בית החרושת. הופכים את הסוודר - עם הצד הפנימי החוצה ולובשים אותו ע"י הכנסת יד ימין בשרוול שמאל ויד שמאל בשרוול ימין. איפה עכשיו הסימן?

להלן פתרונות השאלות ת.31 - ת.45 של התחרות המתמדת.

ת.31. מוכיחים בנקל בתוקף הנתונים כי הישרים AB ו- CD מקבילים וכי הנקודה O מונחת על הישר המקביל לשניהם וחוצה את המרחק שביניהם. כל קטע PO (המחבר נקודה P כלשהי על אחד הישרים עם O) חותך בהמשכו את הישר השני ב -Q וקיים בבירור PO = QO.

ת.32. אם $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ (a;b שלמים וזרים זה לזה) הרי $\frac{a^2}{b^2} = 3$

ז"א $a^2 = 3b^2$ לכן a מתחלק ב-3 . נניח $a = 3m$

נציב $9m^2 = 3b^2 \Longleftarrow 3m^2 = b^2$ ובכן

b^2 (ולכן גם b) מתחלק ב-3 סתירה להנחה ש-a ו b זרים.

השוה את המאמר "על שורשים של מספרים רציונליים" המתפרסם בחוברת זו.

ת.33. יהיו a ו- b רציונליים $a \neq b$ מותר להניח $a < b$.

א) המספר $N = \frac{a+b}{2}$ הוא ודאי רציונלי וקיים $a < N < b$.

ב) $a < b \Longleftarrow b - a > 0$ לכן ודאי קיים n

טבעי שעבורו $b - a > \frac{\sqrt{2}}{n}$ ומכאן $a < a + \frac{\sqrt{2}}{n} < b$

המספר $a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ הוא מספר אירציונלי.

ג) יהיו α ו- β שני מספרים אירציונליים שונים. נניח $\alpha > \beta$. בשבר העשרוני האין-סופי המתאר את α יש בהכרח ספרה S הגדולה מן הספרה המתאימה במספר β . המספר הרציונלי N שהוא הקטע הסופי ("הראש") של השבר המתאר את α ואשר מסתיים ב- S הנ"ל מקיים $\beta < N < \alpha$

ד) הואיל ו-$\alpha - \beta > 0$ הרי קיים n טבעי שעבורו $\alpha - \beta > \frac{1}{10^n}$.

המספר $N = \beta + \frac{1}{10^n}$ הוא אירציונלי וקיים $\beta < N < \alpha$.

ת.34. לפי הנתון הנקודות אינן על מעגל אחד, לכן סכום זוג אחד של זויות נגדיות במרובע שקודקודיו ב-4 הנקודות שונה מסכום הזוג השני. מותר לכן להניח $\measuredangle B + \measuredangle D > 180^\circ$

המעגל החוסם את המשולש $\triangle ABC$ ישאיר את D בפנים המעגל.

ת.35.

$$(1) \qquad \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$$

נחלק ב 2^x

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1$$

$$(2) \qquad \sin^x 15^\circ + \cos^x 15^\circ = 1$$

לכן $x = 2$ הוא שורש המשוואה (2) ולכן גם של (1) וכן כל שורש של (1) הוא גם שורש של (2)

נוכיח ש $x = 2$ הוא יחיד.

$$1 = \sin^x 15^\circ + \cos^x 15^\circ$$

נכתוב

$$1 = \sin^2 15^\circ \sin^{x-2} 15^\circ + \cos^2 15^\circ \cos^{x-2} 15^\circ$$

$1 < \sin 15^\circ < 0 \;;\; 1 < \cos 15^\circ < 0$. אם $x > 2$ הקטנו כל מחובר באגף ימין וכן הסכום קטן מ־1, ואם $x < 2$ הגדלנו כל מחובר באגף ימין ולכן הסכום יהיה גדול מ־1.

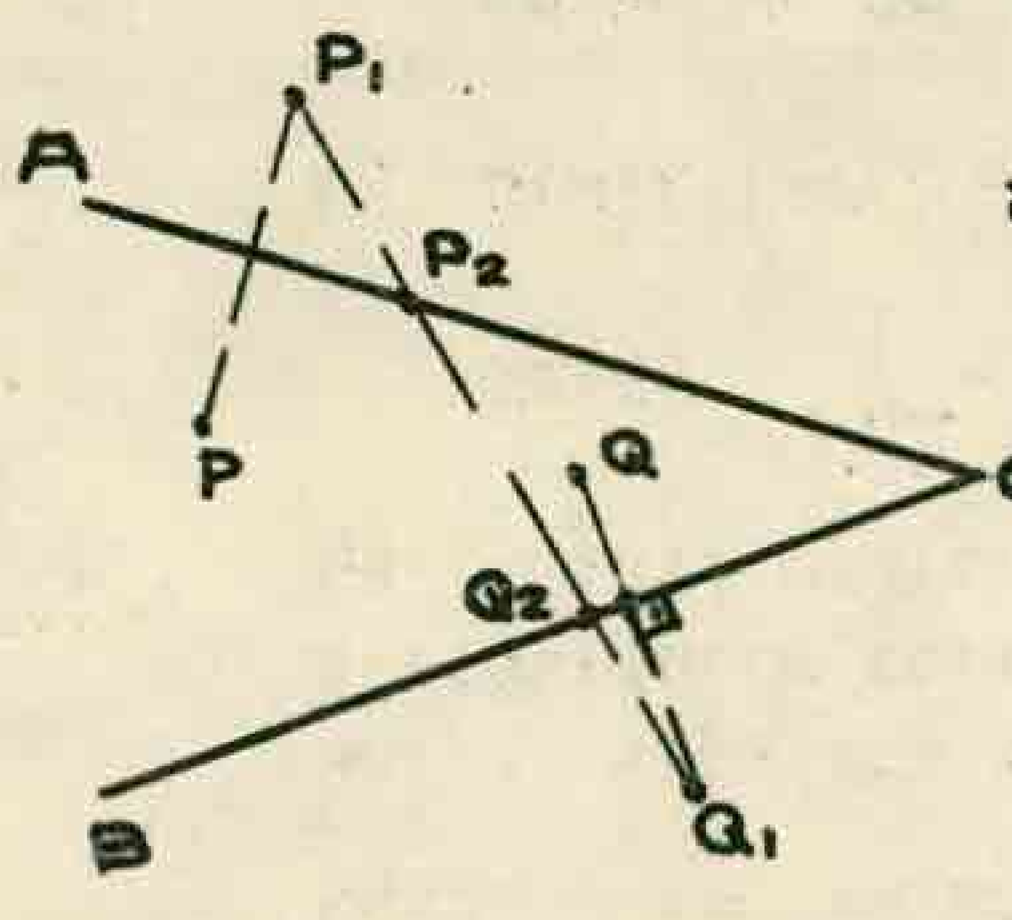
ת.36. $x^2 + 5 = y^2$ כלומר $y^2 - x^2 = 5$ או $(y+x)(y-x) = 5$
הגורמים של 5 (האגף הימני) הם 1 ו־5 או 5-; 1- ולכן אלה גם הגורמים שבאגף השמאלי

כלומר

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ y - x = 1 \end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases} y + x = -5 \\ y - x = -1 \end{cases}$$

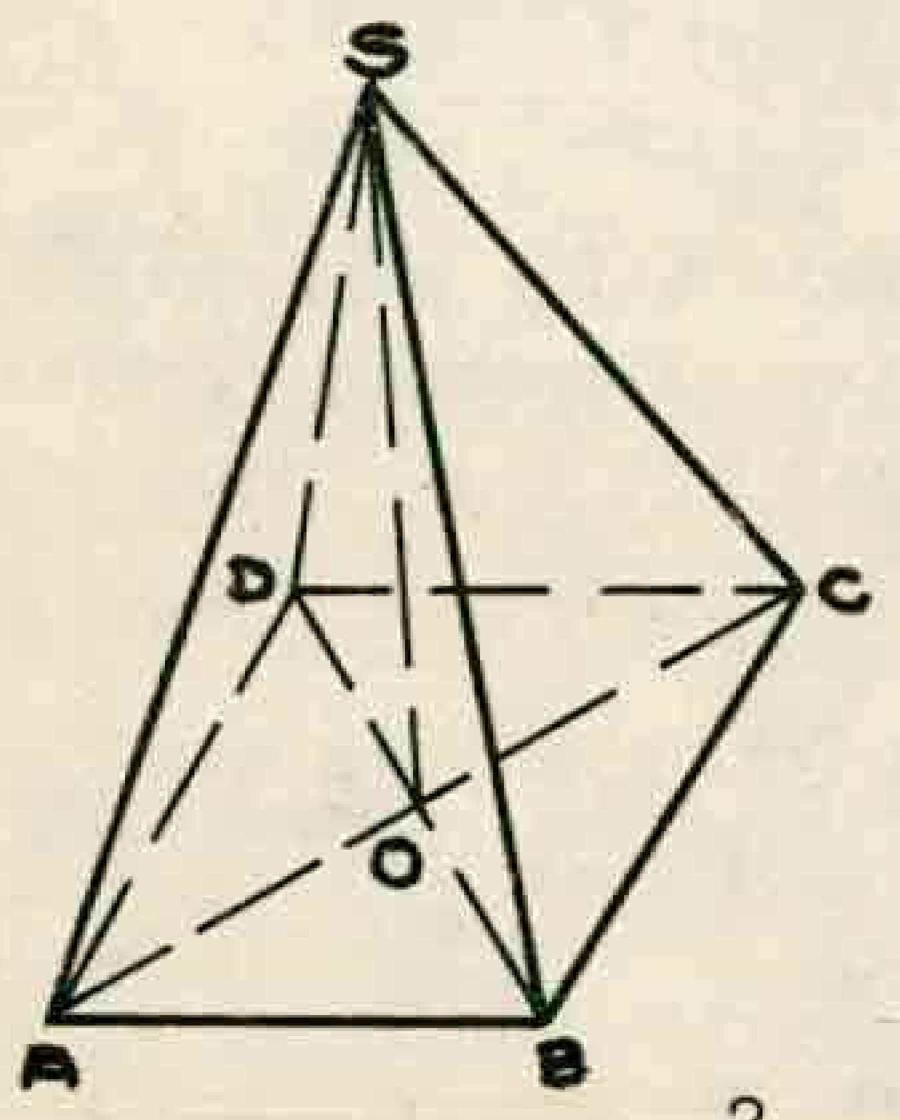
נקבל $x = 2 \quad y = 3$ או $x = -2 \quad y = -3$

ובשני המקרים $x^2 = 4$.



ת.37. הדרך הקצרה ביותר היא זו אשר תעשה קרן אור במהלכה מ־ P ל־ Q אחרי החזרות פעם בשוק אחת דפעם בשוק השניה של הזוית הנתונה. תהיינה $P_1 \; Q_1$ הנקודות הסימטריות ל־ P ול־ Q ביחס ל־ AO ו־ BO.
הקטע הישר P_1Q_1 שוה לדרך הקצרה ביותר מ־ P ל־ Q כאשר פוגעים תחילה ב־AO ואח"כ ב־ BO.

באותו אופן תהיינה P' ו- Q' נקודות סימטריות ל- P ו- Q ביחס ל- OB ו- OA בהתאמה. הפעם תגע הדרך מ- P ל- Q תחילה ב-OB ואח"כ ב- OA . בין הקטעים P_1Q_1 ו- $P'Q'$ יש לבחור את הקצר יותר. כאשר הנקודות O, P ו- Q נמצאות על ישר אחד תשותה שתי הדרכים ולבעיה שני פתרונות.



ת.38. $\triangle BDA$ שוה צלעות

לכן $BD = a$ $AC = a\sqrt{3}$.

בכל משולש שצלעותיו a; b; c

קיים

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

כאשר m_a התיכון לצלע a

SO תיכון במשולשים $\triangle ASC$

ו- $\triangle BSD$ ומכאן

$$2SD^2 + 2SB^2 - BD^2 = 2SA^2 + 2SC^2 - AC^2$$

$$2SD^2 + 2SB^2 - a^2 = 2a^2 + 2SC^2 - 3a^2$$

$$SD^2 + SB^2 = SC^2$$

ת.39. נוכיח בדרך האינדוקציה.

עבור $k = 1$ $a_n = c_o + c_1 n$ זהו איבר כללי של סדרה חשבונית מסדר ראשון. כי עבור כל t

$$a_{t+1} - a_t = c_o + c_1(t+1) - c_o - c_1 t = c_1$$

נניח, כי הסדרה שאיברה הכללי הוא $a_n = c_o + c_1 n + \ldots + c_k n^k$

היא סדרה חשבונית מסדר k . נוכיח על סמך זה כי

$$a_n = b_o + b_1 n + \ldots\ldots + b_{k+1} n^{k+1}$$

הוא איבר כללי של סדרה חשבונית מסדר $k+1$.

נרשום: $a_{n-1} = b_o + b_1(n-1) + \ldots\ldots\ldots + b_{k+1}(n-1)^{k+1}$

ההפרש

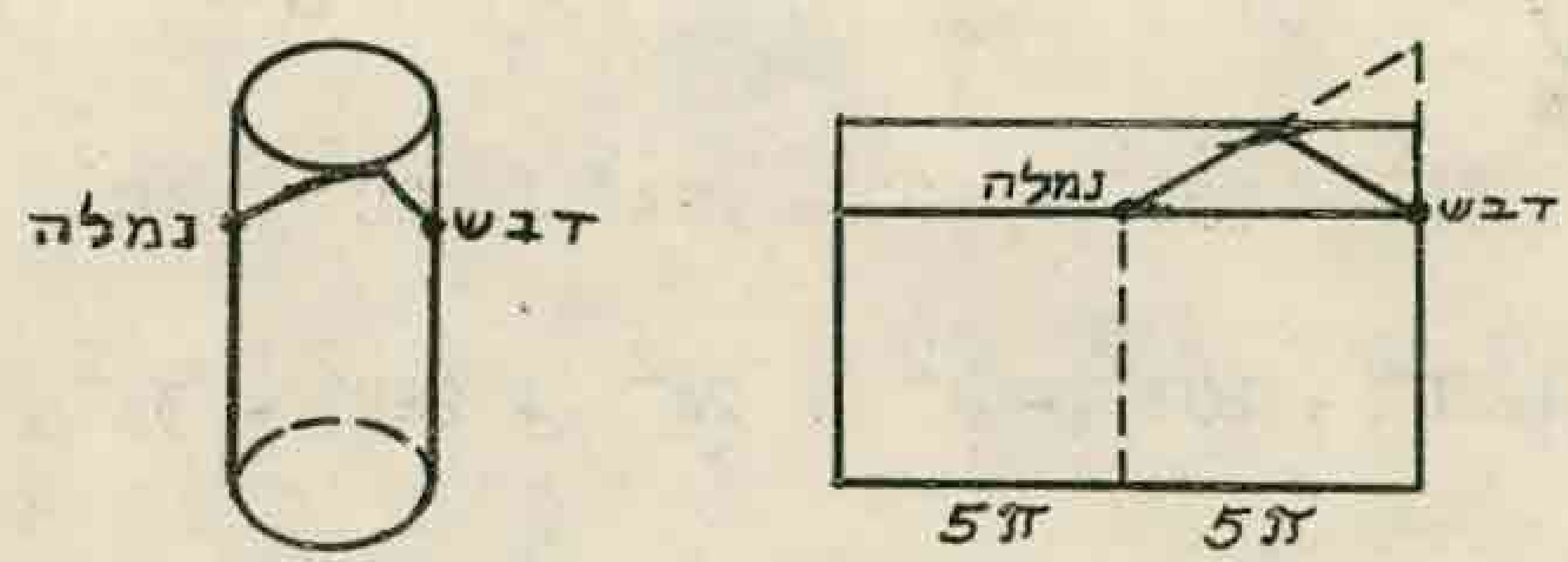
$$a_n - a_{n-1} = b_1\left[n-(n-1)\right] + b_2\left[n^2-(n-1)^2\right] + \dots$$
$$+ b_{k+1}\left[n^{k+1}-(n-1)^{k+1}\right] = D_k n^k + D_{k-1}n^{k-1} + D_{k-2}n^{k-2} + \dots$$

המקדמים D_i הם קבועים ואינם תלויים ב- n. קיבלנו בטוי אשר לפי הנחת האינדוקציה הוא איבר כללי של סדרה חשבונית מסדר k . לכן הביטוי

$$a_n = b_{k+1}n^{k+1} + \dots + b_1 n + b_o$$

הוא איבר כללי של סדרה חשבונית מסדר k+1

ת.40.



הדרך הקצרה ביותר של הנמלה היא קו הבורג שהוא קו ישר על המעטפת הפרוסה של הגליל.

אורך הדרך $\sqrt{25\pi^2 + 36}$

ת.41. א' יחלק את העוגה לשני חלקים שוים לפי מיטב הכרתו. ב' בוחר מהם את החלק הרצוי לו.
אחרי כך מחלקים א' ו-ב' כל אחד את המחצית שלו ל-3 חלקים שוים וג' בוחר לעצמו שליש מן המחצית שבידי א', ושליש מזו שבידי ב'.

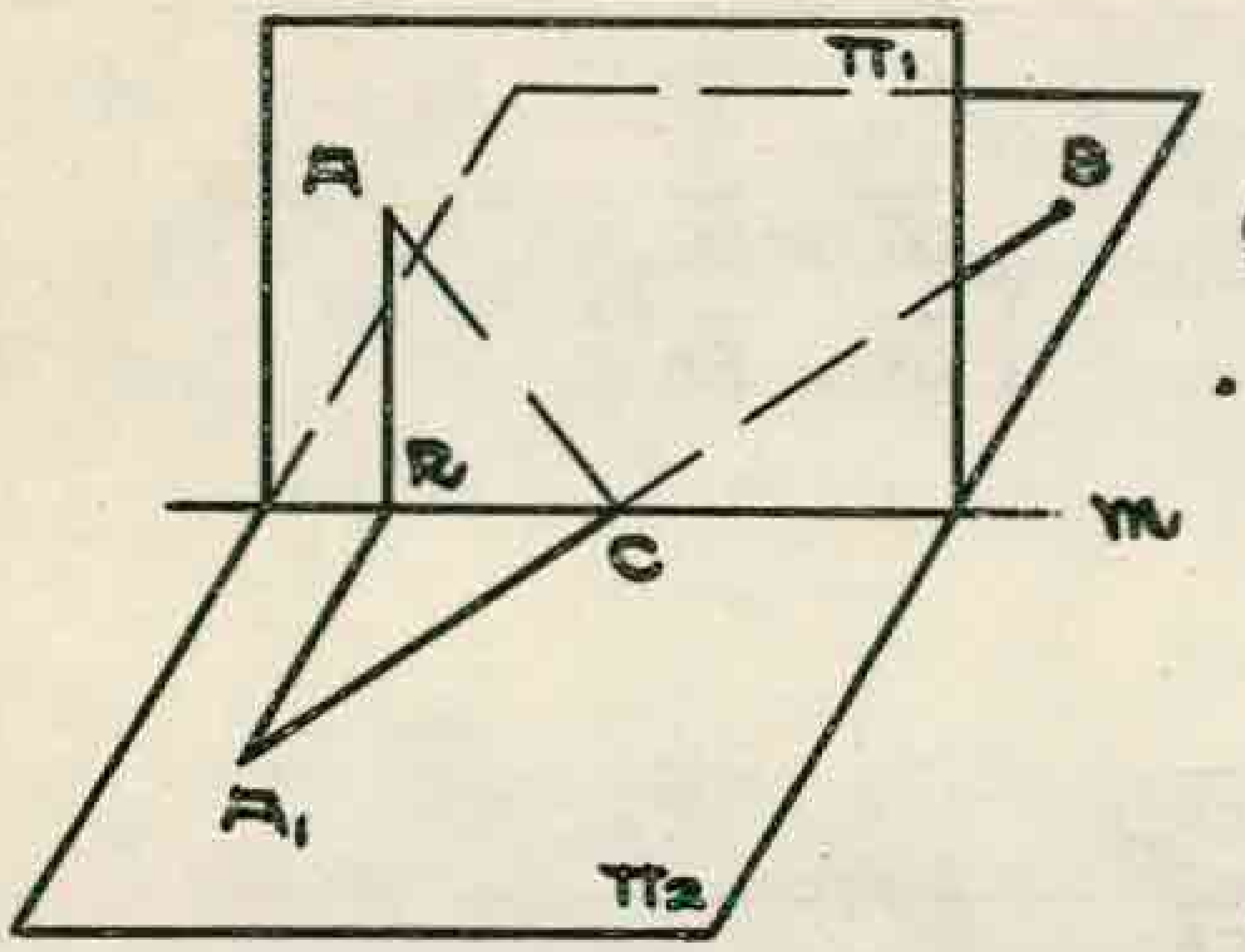
ת.42. כל מספר טבעי נכתב בשיטה העשירית בצורה

$$N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_o =$$
$$= \left[a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1}-1) + \dots + a_1(10-1)\right] +$$
$$+ \left[a_n + a_{n-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 + a_o\right] = A + B$$

כל אחד מהמחוברים ב- A מתחלק ב-9 כי $10^k - 1$ מתחלק ב-9. לכן N יתחלק ב-9 כאשר B מתחלק ב-9, אבל B הוא סכום הספרות בשיטה העשירית. באופן כללי: מספר הכתוב בשיטה d מתחלק (ללא שארית) ב- $d-1$ אם ורק אם סכום ספרותיו מתחלק ב- $d-1$. ההוכחה כמו לעיל.

ת.43. נאמר כי המכונית המוליכה אל א חונה ליד הבית בשעות 8; 8^{15}; 8^{30}; 8^{45}; .... וכו' המכונית השניה חונה ליד הבית בשעות 8^{5}; 8^{20}; 8^{35}; 8^{50};... האדם היוצא באורח מקרי מביתו ההסתברות שייצא במשך 10 הדקות שבין חניית המכונית השניה לבין חניית המכונית הראשונה כפולה מזו שייצא ב-5 הדקות שבין חניית המכונית הראשונה לבין חניית המכונית השניה.

ת.44. נעביר דרך A ו- m מישור π_1 ודרך B ו- m מישור π_2. נוריד $AR \perp m$ ונקצה במישור π_2 (מצד של m הנגדי לזה שבו נמצאת B) $\overline{A_1R} = \overline{AR}$ נחבר BA_1. הוא חותך את m בנקודה C שהיא מקיימת את התנאי המבוקש.



כי $\overline{AC} = \overline{A_1C}$

לכן $\overline{A_1C} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CB}$

וזה חלק מקו ישר.

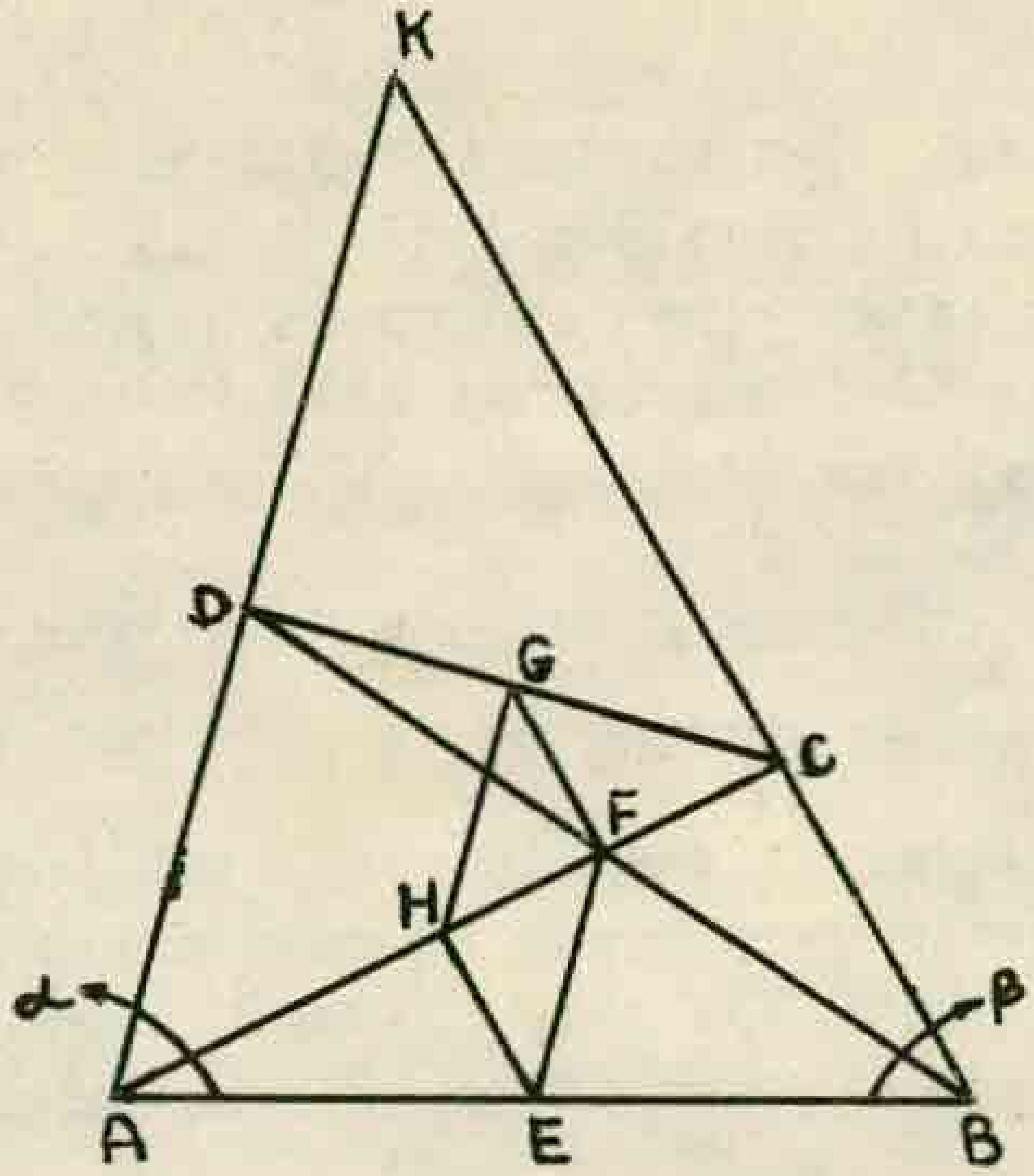
בשביל כל נקודה אחרת C_1 על m יהיה

$$\overline{AC_1} + \overline{C_1B} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1B} > \overline{A_1C} + \overline{CB}$$

<u>מהו המספר</u>

מהו המספר הקטן ביותר אשר בחילוק ב-2 נותן שארית 1; בחילוק ב-3 נותן שארית 2; בחילוק ב-4 נותן שארית 3; בחילוק ב-5 נותן שארית 4; ובחילוק ב-6 נותן שארית 5.

ת.45.



נתון: $\begin{cases} \overline{AE} = \overline{EB} \\ \overline{AH} = \overline{HC} \end{cases}$ ולכן $\left.\begin{matrix} \overline{HE} = \frac{1}{2}\overline{CB} \\ \overline{HE} \parallel \overline{CB} \end{matrix}\right\}$

$\begin{cases} \overline{DG} = \overline{GC} \\ \overline{DF} = \overline{FB} \end{cases}$ ולכן $\left.\begin{matrix} \overline{GF} = \frac{1}{2}\overline{CB} \\ \overline{GF} \parallel \overline{CB} \end{matrix}\right\}$

מכאן: $\begin{cases} \overline{HE} = \overline{GF} \\ \overline{HE} \parallel \overline{GF} \end{cases}$

כלומר: EFGH מקבילית.

הזוית FGH שוה לזוית K (שוקיים מקבילות).
או משלימות זו לזו. הזוית K שוה $180^\circ - (\alpha+\beta)$
ולכן אחת הזויות של המקבילית היא: $(\alpha+\beta)$
והשניה היא: $180^\circ - (\alpha+\beta)$

הצלעות של המקבילית הן: $\overline{HE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ו- $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AD}$

תחרות מתמדת להתרת בעיות

עם שאלות חוברת זו מתחיל הסבוב השני של התחרות המתמדת שגם הוא יכיל 60 שאלות מת.61 עד ת.120.

תנאי התחרות פורטו בחוברות מס' 1 ו-2.

את הפתרונות יש לרשום בצורה ברורה (בדיו ולא צפוף מדי) ולפרטם ככל האפשר. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל. פתרון כל שאלה יש לרשום על דף לחוד (מצדו האחד של הדף) ולציין לידה את מספרה הסדורי. כמו כן יש לציין על כל דף את שם הפותר ואת מקום עבודתו או למודיו (גם את שנת הלמודים שלו לפי 12 שנות למוד).

ההתרות של בעיות גליון זה צריכות להגיע למערכת לא יאוחר מ-1.10.1961.

הערה: הבעיות המצוינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' י" בלבד (שנות הלמודים התשיעית והעשירית).

ת.61*. (5 נקודות) האם אפשר לכתוב באמצעות הספרות 0,9,8,7,6,5,4,3,2,1 קבוצה של מספרים טבעיים כך שסכומם יהיה 100 וכל ספרה תופיע פעם אחת ויחידה?

ת.62*. (3 נקודות). (הוצע ע"י משה מוהל).
יהיו a, b, c מספרים חיוביים, $a+b+c = 1$. הוכח כי

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9$$

ת.63*. (3 נקודות) (הוצע ע"י משה מוהל).
מצא עבור איזה תחום ערכי x תהיה הפונקציה

$$y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 24 - 10\sqrt{x - 1}}$$

גודל קבוע.

ת.64*. (4 נקודות) הוכח כי החזקה החמישית של מספר טבעי מסתיימת באותה ספרה, כמו המספר עצמו.

ת.65*. (2 נקודות) הוצע ע"י אביגדור גברון.
נתון משלש ABC . העבר מקביל DE לצלע BC , כך שיחתוך את AB ב- D ואת AC ב- E , ושיתקיים $AD = CE$.

ת.66 . (3 נקודות) מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור α, שמהן רואים קטע AB (שאינו נמצא דוקא במישור), בזוית ישרה?

ת.67*. (5 נקודות) (הוצע ע"י יגאל פולקמן).
הוכח כי נקודות פגישת הגבהים, פגישת התיכונים, פגישת האנכים האמצעיים במשלש, נמצאות על ישר אחד. (ישר Euler).

ת.68*. (3 נקודות) (הוצע ע"י יגאל פולגמן).
בנה משלש ABC אם נתונים מקומות הנקודות H, A^{*} - H נקודת פגישת הגבהים, ו-A^{*} אמצע הצלע BC.
<u>הדרכה:</u> העזר במשפט שהופיע בתרגיל הקודם.

ת.69. (4 נקודות). הוכח שהמספר $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$ הוא אי-רציונלי.

ת.70*. (4 נקודות). אחת השיטות שנוקטים כדי לקבל סדרת מספרים אשר אבריה הן 0 ו-1 באופן שמספרים אלה יופיעו באופן מקרי, אך בהסתברות שוה היא הטלת מטבע. בכל פעם שמופיע "מספר" רושמים 0. בכל פעם שמופיע "עלה" רושמים 1. שיטה זו אינה מדוייקת די צרכה, כי ההסתברות שמטבע תפול על "מספר" אינה בדיוק $\frac{1}{2}$ אלא מספר אחר P, בלתי ידוע המקיים $0 < P < 1$. כיצד אפשר לשכלל את השיטה ולקבל בכל זאת סדרה אשר בה יופיע 0 בהסתברות $\frac{1}{2}$ ו-1 בהסתברות $\frac{1}{2}$?

ת.71* (4 נקודות). קבוצה של $2n$ צופים (n טבעי) יוצאת לטיולים, כשהצופים צועדים בזוגות. המדריך מעוניין בחיי חברה מלאים, ולכן הוא רוצה שבמשך $2n-1$ טיולים יצעדו בכל פעם זוגות שונים בטיול. כיצד יבצע זאת?

ת.72 . (3 נקודות). מה ההסתברות לכך שב- n זריקות של שתי קוביות יופיע פעם אחת המספר 12? כמה זריקות יש לבצע כדי שההסתברות לכך תהיה $\frac{1}{2}$ (בקרוב ככל האפשר).

ת.73 . (4 נקודות).
א. הוכח כי בכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש מספר קטן ביותר.
ב. הוכח כי אם נבחר במשפט המנוסח ב-א, כאכסיומה, נוכל להוכיח בעזרתו את אכסיומת האינדוקציה.

ת.74*. (4 נקודות). חצה קטע הנתון ע"י קצותיו בלבד, בעזרת מחוגה בלבד.

ת.75*. (5 נקודות). נתון קטע AB וישר l אשר אינו חותך אותו. מצא על l נקודה, אשר ממנה רואים את AB בזוית מכסימלית.

רשימת פותרי השאלות מס' ת. 31 - ת. 45

תשובות חלקיות תסומנה בכוכב. בסוגרים רשום המספר הכולל של נקודות שצבר כל פותר מתוך השאלות ת. 31 - ת. 45 בלבד.

1. אורבך אברהם יא' מעלה ירושלים 31, *33, 35, *36, *39, 42, 43, 45 (18 נק.)
2. אורנשטיין שמואל יב' מקצועי ליד הטכניון, חיפה. 32, *36, 38, 40, 44, 45 (14 נק.)
3. גוטפרוינד אמנון, גולדנברג מנחם, י' תיכון רמלה-לוד. 31, *36, *37, 45 (7 נק.)
4. גינגולד אריה, י' הריאלי, חיפה. 31,32,*33,34,35,36,37,*38,40,*42,44,*45 (28 נק.)
5. דרזנר צבי יב' עירוני ה' ת.א. 31,32,33,34,35,36,37,38,39,*40,42,44,45 (38 נק.)
6. הס מיכאל, י' תיכון רמלה-לוד. 31,32,*33,*36,*40, 45 (10 נק.)
7. וולק אפרים יב' קרית מוצקין. 32,*35,36,*40,41,42,45 (17 נק.)
8. וולק דוד, י' קרית מוצקין. *45 (1 נק.)
9. ויסמן ישעיהו, יא' עירוני ט' ת.א. *40, 41 (5 נק.)
10. זלטקין מיכאל י' ריאלי חיפה. 31,32,*33,34,*35,36,37,*40,*41,42,43,44,45 (34 נק.)
11. חבשוש דני, יב' עירוני א' ת.א. *31,*32,*34,*35,*37,38,*40,*45 (15 נק.)
12. חפרי מיכה קורס א' טכניון. 31,32,*33,34,35,36,*37,38,39,*40,42,44,45 (34 נק.)
13. לביא נחון, י'תיכון ליד האוניברסיטה ים. 32, *35, 42 (6 נק.)
14. לובזנס דניאל, יא' חוגים חיפה. 31,32,*33,34,35,36,38,39,40,41,42,43,44,45 (39 נק.)
15. לוי אליהו יא' ריאלי חיפה. 31,32,*33,35,36,37,*40,*41,*42,43,*44,45 (31 נק.)
16. מלניק דוד, י' תיכון רמלה-לוד. 31, 32, *33, 40, 45 (10 נק.)
17. סחייק צ'ארלי, יא' עירוני בני-ברק. 31, *35, 38, *42, *45 (10 נק.)
18. סתוי יוחנן, יא' ריאלי חיפה. 31, 32, *33, *34, 35, 36, 37, *39, *40, 41, 42, 43, 44, 45 (37 נק.)
19. עקביה גדעון, ט' ריאלי חיפה. 32,36,40,42,45 (12 נק.)
20. פולקמן יגאל יב' ריאלי חיפה. (21,27,30 ביחד 11 נקודות. בטעות לא נכללו פתרונות אלה ברשימה הקודמת). 31,32,*34,36,37,38,39,*40,*42,*44,45 (28+11 נק.)
21. פילמוס דניאל יא' קבוץ כברי, 31,32,*33,34,36,37,38,39,*40,42,43,45 (34 נק.)
22. פינקלשטין אורי יא' הריאלי, חיפה. 31,32,*33,34,35,36,*37,38,40,42,45 (28 נק.)
23. פינקלשטין דן יא' הריאלי חיפה. 31,32,34,35,36,37,38,40,42,45 (28 נק.)
24. פרידלנד שמואל, י' ריאלי, חיפה. *32,*33,36,*37,*43,*45 (11 נק.)

(המשך ראה דף - 143 -)

התכן

מהמערכת 129
דו"ח מפגישה עם הקוראים מת.א והסביבה 129
בעיה ופתרונה 130
תחרות במתמטיקה מטעם הפקולטה למדעים של הטכניון . . . 131
בעיות קומבינטוריות אחדות בגיאומטריה . . . . צ. שור 132
על לוגיקה מתמטית — יסודות המתמטיקה . . . . י. רייכבך 136
בעיה ופתרונה — פתרונות 140
על העתקים של מעגל לתוך עצמו (חלק שני) . . . . . . מ. רייכבך 144
על שרשים של מספרים רציונליים . . . . ד. גוטגלד 148
פתרון בעיות של התחרות המתמדת 152
תחרות מתמדת להתרת בעיות 159
שאלות שונות . . . .
רשימת פותרי שאלות התחרות המתמדת . . . .

הציורים בוצעו במחלקה לשרטוט ותכנון של בית הספר המקצועי ע"י הטכניון
בהדרכתו של מר **א. הריש**

כתובת המערכת:
א. גינזבור, המחלקה למתמטיקה, הטכניון, חיפה.

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.
מחיר התימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.