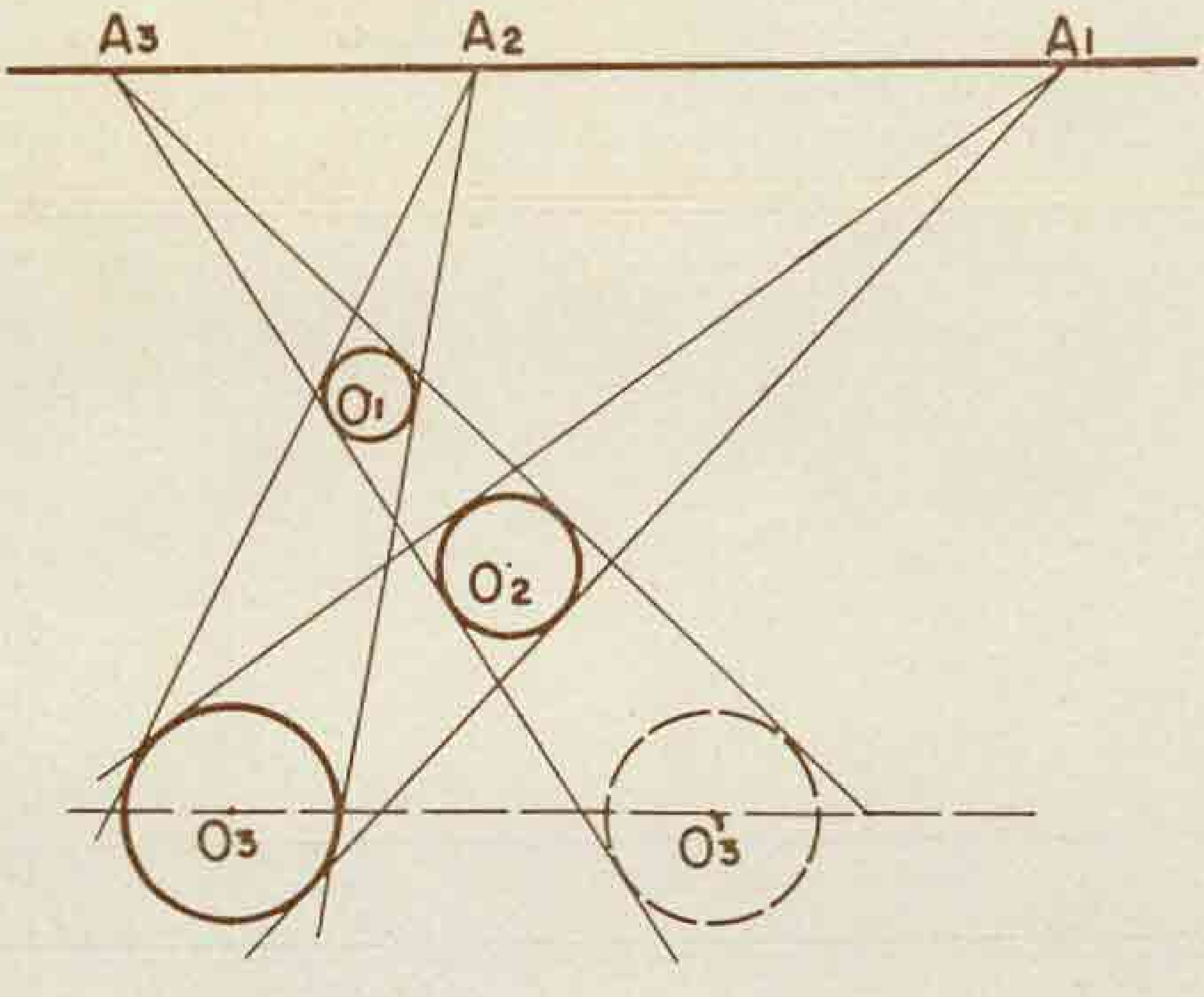
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 1 | חיפה, תשרי תשכ"ב — אוקטובר 1961 | מס' 6

יוצא לאור בחסות
ה"אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: א. גינזבורג
המערכת: ש. אביטל, י. דוד, ש. פ. קלעי, צ. צור

מהמערכת

עם חידוש שנת הלמודים מתרחב חוג הקוראים שלנו גם לתלמידים שעלו השנה לכתות ט' של בית הספר ההיכון (שנת הלמודים התשיעית).

יחד עם זה מקוים אנו שאלה שסיימו השנה את התיכון ימשיכו להתענין במתמטיקה גם להבא וישארו בקשר אתנו הן ע"י קריאת החוברת והן על ידי המשך ההשתתפות בתחרות המתמדת של התרת בעיות.

בגליון זה מתפרסמות תוצאות המחזור הראשון של התחרות (תרגילים ת.1 - ת.60). ברכתנו נתונה לדניאל לובזנס אשר השיג את מספר הנקודות הגדול ביותר, אבל לא פחות לכל שאר משתתפי התחרות ואף לאלה שפתרו בעיות בודדות בלבד.

עיקר הענין הוא כאן כמובן לא במקום הסדורי שבטבלה כי אם בעצם ההשתתפות בתחרות אשר העשירה בלי ספק את תחום הידיעות של המשתתף וחזקה בו את אמונתו באפשרויותיו לפתור בעיות לאו דוקא שגרתיות.

אנו רוצים לקוות שחוג הפותרים יתרחב בהרבה ויקיף עשרות נוספות של תלמידים ובוגרים.

נחזור גם בפתח חוברת זו על בקשתנו המתמדת שלצערנו לא זוכה להד רב בקרב הקוראים. שלחו לנו חומר מכל המינים: מאמרים, שאלות, חידות, סקירות על פעולות חוגים וכן הערות על החוברת ומדוריה השונים. נפרסם כל חומר מתאים ברצון רב.

בהזדמנות זו אנו מברכים את כלל הקוראים בברכת שנה טובה ואת קוראינו הצעירים בברכה נוספת של שנת למודים פוריה ומוצלחת.

אנו מברכים את ד"ר מ. משלר ליציאתו לארה"ב, ומקוים שבשובו יתמסר מחדש לעבודתו בעתון.

אנו שמחים לברך את מר י. דוד להצטרפותו למערכת ובטוחים שנסיונו הרב בעבודה חנוכית ובהקנית מתמטיקה לנוער יתרום רבות לעתון.

פגישה עם הקוראים מחיפה והסביבה

ייסוד חוג אוהדי מתמטיקה בבית ג'ימס א. דה רוטשילד בחיפה:

ביום ג', 24.10.1961 התקיים בבית ג'ימס א. דה רוטשילד (רח' שדרות הנשיא 142, מרכז הכרמל, חיפה) פגישה עם הקוראים מחיפה והסביבה.

הפגישה התקיים בשעות 18.00 - 21.00.

להלן תכנית הפגישה:

א. שתי הרצאות קצרות (25-20 דקות כל אחת) על נושאים מתמטיים.
ב. דיון על ה"גליונות" - החלפת דעות בין הקוראים ובין חברי המערכה על העתון בכללותו ועל המדורים השונים.
ג. יסוד חוג אוהדי מתמטיקה בבית ג'ימס א. דה רוטשילד.
ד. חידון מתמטי.

בקשר לסעיף ג' הרינו להודיע את הדברים הבאים: ביזמת מנהלי בית רוטשילד בחיפה עומד להתארגן שם חוג אוהדי מתמטיקה אשר בעיקרו מיועד לנוער הלומד בכתות י"א ו-י"ב של התיכון אבל יהיה פתוח גם לכל אוהד מתמטיקה בכתות נמוכות יותר וגם מחוץ לבית הספר.

הפעילות המשוערת של החוג תתבטא בפגישות דו-שבועיות המוקדשות להרצאות בנושאים מתמטיים שונים, לארגון תחרויות במתמטיקה וכו'. כל הצעות נוספות להרחבת פעילות החוג תתקבלנה ברצון רב.

החוג יהיה בקשר מתמיד עם ה"גליונות מתמטיקה". אנו נפרסם פרטים על פעילותו ונשמש גם ברצון כבמה ואמצעי בטוי למשתתפיו.

אנו מקוים שתלמידים רבים ככל האפשר ישתתפו בפעילות חוג חדש זה.

כל קוראי חיפה והסביבה מוזמנים לפגישה הנ"ל ולהשתתפות בחוג.

ברור שגם אלה שטרם היו קרובים ל"גליונות מתמטיקה" יתקבלו כאורחים רצויים ויוכלו לעשות בערב זה את הכרותם הראשונה עם העתון ועם חוג קוראיו.

בגליון הבא נפרסם דו"ח על הפגישה ועל הקמת החוג הנ"ל.

תוצאות התחרות במתמטיקה מטעם הפקולטה למדעים של הטכניון

בחוברת מס' 5 (עמ' 131) הודענו על קיום התחרות במתמטיקה מטעם הפקולטה למדעים של הטכניון על פרס ע"ש הפרופסור ירמיהו גרוסמן.

בתחרות השתתפו כאמור 65 תלמידים מכל הארץ.

העבודה הטובה ביותר היתה של צבי דרזנר, תלמיד הכתה י"ב בבית ספר עירוני ה' בת.א.

הפרס המובטח בצורת סטיפנדיה בגובה של 600 ל"י יוענק לצבי דרזנר במדה והוא ילמד בפקולטה למדעים של הטכניון.

פרט לעבודה הנ"ל לא נמצאו עבודות אחרות הראויות לציון.

במדור בעיה ופתרונה בחוברת זו אנו מפרסמים את פתרונות בעיות התחרות הנ"ל.

בעיה ופתרונה

ההתרות של שאלות אלה נמצאות בעמוד 173 . בטרם תפנה לשם, נסה את כוחך .

המדור מוקדש הפעם לבעיות שהוצעו למשתתפי התחרות למתמטיקה מטעם הפקולטה למדעים של הטכניון שהתקיימה ב-11.5.61.

פרסמנו בעיות אלה כבר בחוברת מס' 5, אבל לנוחיות הקוראים נחזור כאן שנית על תכנן.

1. למצא משולש שאורך צלעותיו נמדד במספרים שלמים והיקפו שווה לשטחו. (כדאי להשתמש בנוסחת הרון. יש חמשה פתרונות שונים. נסה למצא את כולם ולהוכיח כי אין פתרונות אחרים).

2. נתונים שלושה מעגלים, בעלי רדיוסים שונים, במישור, באופן שמרכזיהם אינם על ישר אחד ובאופן שאף מעגל אינו נמצא בתוך מעגל שני.

הוכח כי נקודות החיתוך של המשיקים החיצוניים לכל שנים מהמעגלים נמצאות על ישר אחד.

3. נתונים ארבעה כדורים בעלי רדיוסים שונים שמרכזיהם אינם נמצאים במישור אחד כך שאף כדור אינו נמצא בתוך כדור שני. מעבירים את ששה החרוטים החוסמים כל אחד שני כדורים מבחוץ (ז.א. ששני הכדורים משיקים לחרוט לארך מעגל ונמצאים מאותו הצד של קדקד החרוט). הוכח כי ששה הקדקדים של החרוטים נמצאים במישור אחד.

הערה: בעיה זו יש לפתור מתוך הסתמכות על הבעיה מס' (2) וזאת מותר לעשות אפילו אם לא פתרת את הבעיה ההיא.

(המשך מעמוד 190)

ת. 54 נבחר את המים (הנעים במהירות קבועה) כמערכת צירים קבועה. ביחס למערכת זו נמצא הבקבוק במנוחה ואילו החותר נע באותה מהירות קבועה בשני הכוונים. בכוון הראשון נמשכה תנועתו 20 דקות. לכן תנועתו הכוללת נמשכה 40 דקות, שהרי בחזרתו עבר החותר אותה הדרך (ביחס למים).

נראה עתה את האדמה כמערכת הצירים הקבועה. כפי שנוכחנו לעיל, הבקבוק נע ביחס אליה במשך 40 דקות. מהירותו ביחס לאדמה (מהירות המים) תהיה איפוא

$$\frac{1\ \text{ק"מ}}{\frac{40}{60}\ \text{שעה}} = \frac{60}{40} = 1\tfrac{1}{2}\ \frac{\text{ק"מ}}{\text{שעה}}$$

ת.55

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$$

התנאי הכרחי ומספיק לכך שהבטוי לעיל יהיה מספר שלם הוא ש-$(x-1)$ יחלק את 3. מחלקיו השלמים של 3 הם 1, 3, 1-, 3-. בהתאם לערכים אלה

(המשך בעמוד 177)

על מושגים ראשונים בתורת ההסתברות *)

יהודה יוליוש רייכבך

תורת ההסתברות היא פרק המתמטיקה שנוצר במאה ה-XVI על בסיס תורת משחקי יהב והתפתח יחד עם פתוח העבוד המתמטי של בעיות הטבע והטכניקה.

תורת ההסתברות קשורה מאד בחיים המעשיים ויש לה שמושים רבים וישירים במדעי הטבע, הטכניקה והכלכלה; היא מהוה במיוחד בסיס תאורטי של הסטטיסטיקה ותורת השגיאות - שגיאות במדידות פיסיקליות, אסטרונומיות, מטאורולוגיות, גאודטיות ועוד.

חלק I

מושג ההסתברות

מושגים כלליים של תורת ההסתברות

בנית תאוריה מתמטית כלשהי מתחילה מהגדרת מושגיה והמחשתם באמצעות דוגמאות הקשורות לידיעותינו הקודמות. בדרך זו נכניס גם את מושגי תורת ההסתברות. נניח, למשל, שבתנאים מסוימים 94% טילים מונחים מטפוס מוגדר פוגעים במטרה.

פרושו הדבר הוא שבאותם התנאים (למשל מתקני ירי קבועים, חומר דלק קבוע, מזג אויר לא משתנה וכו׳) בכל 100 טילים מטפוס זה 94 בממוצע יפגעו במטרה ו-6 בממוצע יחטיאו.

מובן מאליו שאין להוציא מכאן מסקנה שבכל 100 טילים מהסוג הנ"ל 94 בדיוק יפגעו במטרה. יכולים אלה לפעמים להיות 92, 95, 93, 96 או לפעמים גם בהרבה פחות או יותר מזה. אבל אם נחזור פעמים רבות על סריות ירִיות כנ"ל בתנאים קבועים, אחוז הטילים הפוגעים במטרה יצטבר סביב המספר 94.

יכול גם כך לקרות שבאותם התנאים בין 100 טילים יפגעו במטרה 99 או 74, אבל סריות כאלו של 100 יריות תופענה לעתים רחוקות מאד אם התנאים לא ישתנו.

המספר 0.94, כלומר 94%, יכול לשמש כמדת אפשרותו של טיל מטפוס זה לפגוע במטרה בתנאים הנדונים.

---

*) מאמר זה והמשכו בחוברת הבאה מהוים את הפרק הראשון של ספר מאת ד"ר יהודה יוליוש רייכבך:
"יסודות תורת ההסתברות, סטטיסטיקה ובמיוחד תורת השגיאות"
שיופיע בשנת הלמודים 1961/62

נעבור לדוגמה אחרת.

טיב ההוצרת (משלוח סחורה וכו') נקבע על סמך בדיקתה המוקדמת.

נניח שבמוסד תעשיתי מסוים המיצר מכשירי מדידה (או מכשירים אחרים) שמו לב שבתנאי עבודה מוגדרים בממוצע 4% מהמכשירים הם פגומים ז.א.: שבסריות בנות 100 מכשירים יהיו בממוצע 4 פגומים, בסריות בנות 1000 מכשירים 40 וכו'.

ברור שגם בדוגמה זו יש להניח שתנאי היצור (ארגון העבודה, ארגון התהליך הטכנולוגי, אמון העובדים) אינם משתנים.

המספר 0.04, כלומר 4%, משמש כאן כמדת טיב הייצור, כמדת אפשרות יצור מכשיר פגום ע"י המוסד התעשיתי המדובר.

התכונה משותפת של המאורעות הנדונים בשתי דוגמאות הנ"ל היא בכך שסיבותיהם בתנאים מסוימים אינן ידועות במלואן ובגלל זה נקרא למאורעות אלה מקריים.

התכונה המשותפת השניה של מאורעות אלה היתה ההמוניות שלהם. המוניות או סטטיסטיות של מאורע מקרי מתבטאת בכך שהמצבים הגורמים לקיום המאורע חוזרים באותם התנאים מספר פעמים בלתי מוגבל.

תורת ההסתברות עוסקת רק במאורעות מקריים בעלי אופי המוני והיא מנסחת בלשון מתמטית את החוקיות המאפינת מאורעות כאלה.

בהמשך נעסוק רק במאורעות מקריים בעלי אופי המוני גם כאשר לא נציין זאת במפורש; ז.א. גם כאשר לא נכתוב "מאורעות מקריים בעלי אופי המוני" אלא פשוט "מאורעות".

מאורעות נסמן באותיות A, B, ...

אפשר להביא דוגמאות רבות נוספות של מאורעות מהסוג הנדון. כך למשל כאשר זורקים קובית משחק נקרא למאורע קבלת מספר מסוים של נקודות; כאשר מבצעים מדידות גאודטיות נעשות שגיאות מקריות*) שגם בהן נדון כבמאורעות מקריים.

בדוגמאות כאלה אפשר להרבות.

בכל הדוגמאות האלו ראינו שבפעולות המוניות - (ירי טילים, יצור מכשירים..) - אחוז מסוים של המאורעות (פגיעה במטרה, יצור מכשירים פגומים, ...) נשאר קבוע בממוצע. אפשר להגיד שממוצע זה מאפין את הפעולה ההמונית הנדונה. לכן חשוב מאד לדעת מספרים מאפינים אלה בתחומים שונים של חיינו, כגון בטכניקה, פיסיקה, כימיה, אסטרונומיה, גאודזיה, מטאורולוגיה, כלכלה ועוד; הכרתם תאפשר לנבא תוצאות פעולה המונית נתונה.

---

*) שגיאות מקריות יש להבדיל משגיאות סטטסטיות ז.א. משגיאות חוזרות בכל מדידה, שמקורן ידוע והשפעתן נלקחת בחשבון בתוצאה הסופית.

אם בדוגמה הראשונה מכל 100 טילים מונחים 94 בממוצע פוגעים במטרה, נגיד שבתנאים נתונים הסתברות המאורע: פגיעת הטיל במטרה היא 0.94 (לפעמים אומרים גם כך 94%).

אם בתנאים נתונים בין 100 מכשירים המיוצרים יש בממוצע 4 פגומים, נגיד שהסתברות יצור מכשיר פגום שוה ל-0.04 (או 4%).

מדוגמאות אלו אנו רואים שהסתברות המאורע תלויה בתדירות יחסית של הופעתו - בדוגמה הראשונה התדירות היחסית היא 0.94, בשניה 0.04- כלומר ביחס מספר הנסויים בהם המאורע הופיע למספר הכולל של הנסויים.

במקום להגיד "תדירות יחסית" נגיד בקצור "פרקבנציה", כלומר פרקבנצית המאורע A היא יחס מספר הנסויים בהם הופיע המאורע A למספר הכולל של נסויים שבוצעו.

<u>דוגמה 1</u>: נניח שמבצעים מדידות(למשל מדידות פיסיקליות, כימיות, גיאודטיות, מטאורולוגיות וכו') של גודל מסוים ומאורע A מתבטא בכך שתוצאת מדידה בודדת מוכלת באינטרבל (a;b). במדידה בודדת המאורע A יכול להופיע או לאו ולפני בצוע המדידה איננו יכולים לנבא את תוצאתה, כלומר A הוא מאורע מקרי.

אם באותם התנאים נחזור על המדידה n פעמים ו- k פעמים תמצא תוצאת המדידה באינטרבל (a;b) נגיד שפרקבנצית המאורע A שוה $\frac{k}{n}$.

אם בהמשך נחזור פעמים רבות על סריות המדידות האלו באותם התנאים, נראה שפרקבנצית המאורע A תצטבר סביב מספר מסוים שאותו נקבל כהסתברות המאורע A במדידה בודדת.

באופן כללי, אם באותם התנאים מבצעים סריות נסויים וכמעט תמיד פרקבנצית המאורע A תצטבר סביב מספר p , כאשר מספר הנסויים שואף לאינסוף, הרי מתקבל שהסתברות המאורע A בנסוי בודד שוה ל- p.

אבל הסבר מושג ההסתברות דורש יתר דיוק*). ראשית כל נכניס מושגים מסוימים הנוגעים לעצם המאורעות.

אם המאורע יכול להופיע בנסוי המבוצע נקרא לו מאורע אפשרי.

המאורע יקרא בטוח אם ורק אם הוא מופיע בכל נסוי; נסמנו באות E.

המאורעות A ו- B מונעים זה את זה**) ,

---

*) בסוף הספר נתונה רשימה קצרה של כל ההנחות שבהן משתמשים בתורת ההסתברות.

**) אפשר להגיד גם כך: מתבטלים.

א ם ו ר ק אם הופעה A מונעת הופעת המאורע B ולהיפך הופעת B מונעת הופעת A; ז.א. כאשר A ו-B לא יכולים להופיע בבת אחת בנסוי בודד.

דוגמה 2: נניח שבאופן מקרי אנו זורקים קובית משחק ומאורע A מתבטא בהופעת 2 ו-B בהופעת 4 נקודות. ברור ש-A ו-B מונעים זה את זה.

מאורע בטוח הוא שבכלל יתקבל מספר נקודות בין 1 ל-6, מאורע בלתי אפשרי הוא שיתקבלו 7 נקודות בזריקה בודדת.

מאורע המתבטא בכך שיופיע A או שיופיע B ז.א. שיופיע לפחות אחד משני מאורעות A או B נקרא סכום המאורעות A ו-B, ומסומן ב- $A+B$.

סכום מספר אינסופי של מאורעות $A_1, A_2, \dots$ מסומן ב- $A_1 + A_2 + \dots$. זהו מאורע המתבטא בכך שיופיע לפחות אחד מהמאורעות $A_1, A_2, \dots$.

דוגמה 3: על קרטון צלופן שקוף נסמן נקודה Q. נפיל את הקרטון על מישור עם מערכת צירים קבועה. נסמן ב-A את המאורע המתבטא בכך שהנקודה Q תהיה בעלת שעורים ראשוניים גדולים מ-2, ב-B - שעורים אי-זוגיים ב- C - זוגיים.

המאורעות A ו-C מונעים זה את זה בבירור; כמו כן B ו-C. לעומת זאת A ו-B אינם מונעים זה את זה.

המאורע $A+B$ מתבטא בכך שהנקודה Q תהיה בעלת שעורים אי-זוגיים והוא זהה ל- B :

$$A + B = B$$

$A+C$ מתבטא בכך ש-Q תהיה בעלת שעורים ראשוניים גדולים מ-2 או זוגיים ו- $B+C$ שהנקודה Q תהיה בעלת שעורים זוגיים או אי-זוגיים.

קל להוכיח:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

ובאופן אנלוגי עבור n וגם מספר אינסופי של מאורעות.

נחזור כעת למושג ההסתברות וננסח במשפטים שנקבע כאקסיומות את תכונותיו היסודיות.

כיון שהפרקבנציה היא מספר לא שלילי $\leqslant 1$, הרי בהתאם לאנטואיציה אפשר להניח:

אקסיומה 1. לכל מאורע A מותאם מספר ממשי $P(A)$, הנקרא הסתברות המאורע A והמקיים את אי השויון

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

נעיר שבאקסיומה זו מניחים רק קיום הסתברות $P(A)$, אבל לא נותנים את ערכה שתלוי כל פעם בבעיה הקונקרטית.

פרקבנצית מאורע בטוח שוה באופן קבוע ל-1, ולכן בהתאם לאנטואיציה אפשר להניח:

<u>אקסיומה 2.</u> הסתברות מאורע בטוח שוה ל-1: $P(E) = 1$

אם המאורעות A ו- B מונעים זה את זה וב- n נסויים A הופיע k פעמים, B הופיע m פעמים ו- $A+B$ l פעמים, הרי בגלל העובדה ש- A ו- B אינם יכולים להופיע בבת אחת $l = k + m$, כלומר פרקבנצית המאורע $A+B$ שוה לסכום פרקבנצית המאורע A ופרקבנצית המאורע B:

$$\frac{l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n}$$

אבל בהתאם לאנטואיציה הפרקבנציות $\frac{m}{n}, \frac{k}{n}, \frac{l}{n}$ מגדירות את ההסתברויות המתאימות $P(B), P(A), P(A+B)$. על סמך זה אפשר להניח:

<u>אקסיומה 3.</u> אם המאורעות A ו- B מונעים זה את זה, הרי

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

<u>דוגמה 4.</u> נניח שהמאורע A מתבטא בכך שהטמפרטורה הממוצעת t (לפי צלסיוס) ביום 1 באפריל בחיפה מקיימת את אי השויון $0^\circ \leq t \leq 25^\circ$ ו- B בכך ש $t > 25^\circ$. המאורע $A+B$ מתבטא איפוא בכך ש- $t \geq 0^\circ$.
אם כעת ההסתברות ש- $0^\circ \leq t \leq 25^\circ$ היא 0.8 וההסתברות ש- $t > 25^\circ$ היא 0.18, אזי כיון ש- A ו- B מונעים זה את זה נקבל לפי האקסיומה 3 שההסתברות ש- $t \geq 0^\circ$ שוה ל:

$$P(t \geq 0^\circ) = P(A+B) = P(A) + P(B) = P(0^\circ \leq t \leq 25^\circ) +$$
$$+ P(t > 25^\circ) = 0.8 + 0.18 = 0.98$$

ע"י שמוש $n-1$ פעמים באקסיומה 3 נקבל: אם המאורעות $A_1, A_2, \ldots, A_n$ מונעים אחד את השני בזוגות, הרי:

$$(I.1)\ P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+\ldots+P(A_n)$$

מאורעות נקראים שוי הסתברות אם ורק אם הסתברויותיהם שוות.

נניח שהמאורעות $A_1, \ldots, A_n$ הם שוי-הסתברות ומונעים זה את זה בזוגות. נניח גם כך שבנסוי בודד מוכרח להופיע אחד מהמאורעות $A_1, \ldots, A_n$.

יהי $A = A_1 + \ldots + A_k$, $k \leq n$

ז.א. A הוא מאורע המתבטא בהופעת לפחות אחד מהמאורעות $A_1, \ldots, A_k$.
כיון שלפי ההנחות $A_1+\ldots+A_n$ הוא מאורע בטוח הרי על סמך האקסיומות 2 ו-3:

$$1 = P(A_1+\ldots+A_n) = P(A_1)+\ldots+P(A_n)$$

$$P(A) = P(A_1+\ldots+A_k) = P(A_1)+\ldots+P(A_k)$$

המאורעות $A_1,...,A_n$ הם שוי-הסתברות ולכן מהנוסחה הראשונה נובע:

$$P(A_1)=...=P(A_n) = \frac{1}{n}$$

מכאן על סמך הנוסחה השניה:

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}}_{k\text{-פעמים}} = \frac{k}{n}$$

אם בהתאם לטרמינולוגיה הקלסית נקרא ל- $A_1,..,A_k$ מאורעות נוחים ל- A, נוכל להביע את הנוסחה הסופית בצורה הבאה:

<u>הסתברות המאורע A שוה ליחס מספר k של מאורעות הנוחים ל- A למספר n של כל המאורעות האפשריים שוה הסתברות ומונעים זה את זה בזוגות</u>

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

משפט זה הוא בתורת ההסתברות הקלסית הגדרת הסתברות המאורע A ונקרא לו, איפוא, <u>ההגדרה הקלסית של ההסתברות</u> או פשוט: <u>ההגדרה הקלסית</u>.

כמסקנות פשוטות של ההגדרה הקלסית נקבל:

1. בזריקת מטבע הסתברות הופעת המספר שוה להסתברות הופעת העץ וכל אחת מהן שוה ל-$\frac{1}{2}$.
אכן, כשזורקים באופן מקרי את המטבע קיימים 2 מאורעות אפשריים שוי-הסתברות ומונעים זה את זה: הופעת המספר והופעת העץ. לקבלת המספר יש מאורע נוח אחד, לכן לפי ההגדרה הקלסית הסתברות הופעת המספר בזריקה אחת היא $\frac{1}{2}$.

2. בזריקה אחת של קובית משחק הסתברות הופעת מספר מסוים של נקודות (בין 1 ל-6) שוה ל-$1/6$. ובאמת יש בדיוק מאורע נוח אחד להופעת מספר מסוים (≤ 6) של נקודות מתוך 6 מאורעות אפשריים שוי הסתברות ומונעים זה את זה: הופעת 1, 2, 3, 4, 5 או 6 נקודות. על סמך ההגדרה הקלסית הסתברות הופעת מספר מסוים של נקודות בזריקה אחת היא, איפוא, $1/6$.

<u>דוגמה 5.</u> בית זקוק לנפט מקבל נפט גלמי מ-3 קדוחים שיסומנו במס' 1, מס' 2 ומס' 3. תדירות קבלת הנפט הגלמי מכל קדוח שוה בממוצע.

ברגע מוגדר של הייצור דרוש שבית הזקוק יקבל את הנפט הגלמי מהקדוחים מס' 1 או מס' 2. יש לחשב את הסתברות מאורע זה כלומר הסתברות העובדה שיתקבל הנפט הגלמי מהקדוחים מס' 1 או מס' 2.

על סמך ההגדרה הקלסית הסתברות המאורע שהנפט הגלמי יהיה מקדוח מס' 1 שוה $1/3$ ומקדוח מס' 2 גם כן $1/3$. על כן ההסתברות

שהנפש הגלמי יובא ברגע הנ"ל מהקדוחים מס' 1 או מס' 2 שוה לפי האקסיומה 3:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

<u>דוגמה 6:</u> אבטומט מקבל חלקים מסוימים מ-3 מחרטות המסומנות במס' 1, מס' 2 ומס' 3. דיוק עבודה של המחרטות שונה: מס' 1 מייצר 0.6% חלקים פגומים, מס' 2 - 0.7% ומס' 3 - 0.8%.

ברגע מסוים של הייצור מקבל האבטומט את החלקים לפי הפרוט הבא: ממס' 1 - 2500 חלקים, ממס' 2 - 2000 חלקים וממס' 3 - 1250 חלקים.

חשב הסתברות המאורע שברגע זה יקבל האבטומט חלק פגום. בסך הכל מתקבלים:

$n = 2500 + 2000 + 1250 = 5750$ חלקים

מאלה פגומים:

$$k = 2500\cdot 0.006+2000\cdot 0.007+1250\cdot 0.008 = 15+14+10=39$$

על סמך ההגדרה הקלסית נקבל שהסתברות המאורע הנדון היא:

$$\frac{k}{n} = \frac{39}{5750} = 0.00678$$

המאורע המנוגד למאורע A מתבטא בכך שלא מופיע המאורע A; נסמנו ב- $\bar{A}$.

מהגדרה זו נובע שהמאורעות A ו-$\bar{A}$ מונעים זה את זה. כיון ש-$A + \bar{A}$ הוא מאורע בטוח, נקבל על סמך האקסיומות 2 ו-3:

$$1 = P(A+\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

כלומר:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad (I.2)$$
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \qquad (I.2')$$

כיון שמהאקסיומה 1 נובע $P(\bar{A}) \geq 0$ הרי (I.2') נותן $P(A) \leq 1$ ז.א. שתנאי זה באקסיומה 1 הוא מיותר (הנחנו אותו בגלל הנסוח האנטואיטיבי של אקסיומה זו).

כיון שמאורע בלתי אפשרי מנוגד למאורע בטוח הרי מ-(I.2) והאקסיומה 2 מקבלים:

הסתברות מאורע בלתי אפשרי שוה ל- 0.

בנוסחות (I.2) ו- (I.2') משתמשים לעתים קרובות בחשוב הסתברויות של מאורעות שונים.

באופן אנלוגי לאקסיומה 3 נניח:

<u>אקסיומה 4:</u> אם $A_1, A_2, \ldots$ הם מאורעות המונעים אחד את השני הרי:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

אקסיומה 4 היא גם כן הכללת (I.1).
האקסיומות 4-1 מאפינות בשלמות את המושג האנטואיטיבי של הסתברות המאורע, ז.א. אפשר להוכיח:

אם באותם התנאים נבצע סרית נסויים, אם $\frac{m}{n}$ היא פרקבנצית המאורע A ואם לבסוף p היא ההסתברות של A בנסוי בודד, הרי

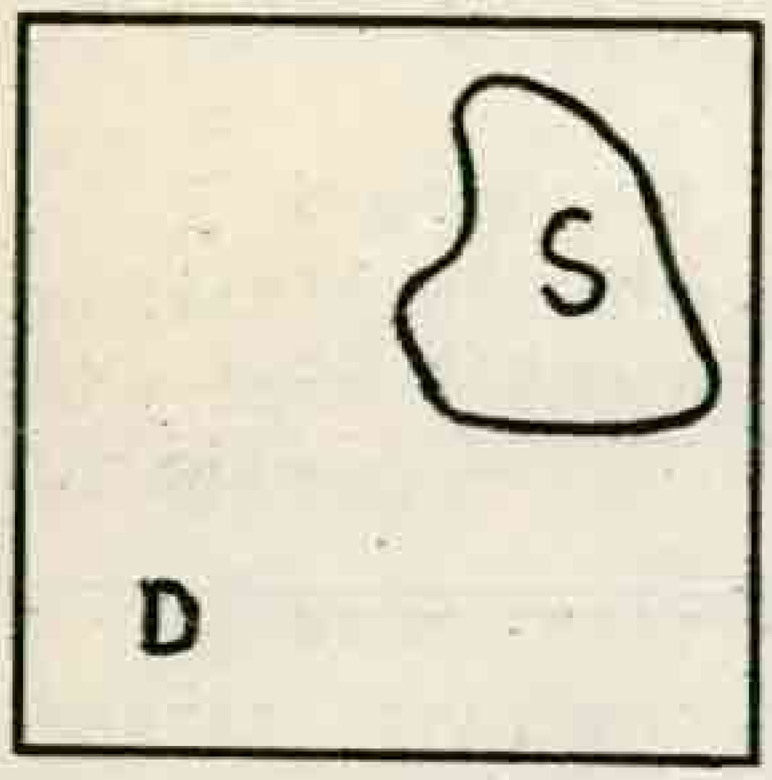
$$(WLB) \qquad P(\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = p) = 1$$

במלים אחרות:
בהסתברות שוה ל-1 אפשר לטעון שעבור כל $0<\varepsilon$ קיים N כזה שאם $n>N$ ו- n הוא מספר הנסוים בסרית נסויים נתונה, הרי

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

המשפט הזה נקרא הכלל החזק של המספרים הגדולים. הראשון הוכיח אותו E. Borel עבור $p=\frac{1}{2}$.*) נפנה את תשומת לב הקורא שאם A הוא מאורע בטוח (בלתי אפשרי) הרי $P(A)=1$ $(P(A)=0)$, אבל אם $P(A)=1$ $(P(A)=0)$ A הוא לאו דווקא מאורע בטוח (בלתי אפשרי).

<u>דוגמה 8.</u> נתבונן במסך D שעליו סומנה סדרה אינסופית של נקודות שונות. על המסך מופיעות נקודות אור ונניח שבכל רגע יכולה להופיע נקודת אור רק במקום אחד של המסך D.



אם S הוא תחום בתוך D (ראה את הציור), הרי נניח שהסתברות הופעת נקודת אור ב- S שוה $\frac{|S|}{|D|}$, כאשר S ו- D הם שטחי S ו- D בהתאמה.**)

חשב את הסתברות המאורע A המתבטא בכך שנקודת אור תופיעה לפחות בנקודה מסומנת אחת.

כיון שהחסרת נקודה אחת לא תשנה את שטח התחום הרי נקבל לפי (I.2) שהסתברות המאורע שנקודת האור תופיעה בנקודה מוגדרת של המסך שוה ל- 0.

---

*) נסוח יותר מדויק של משפט זה והוכחתו נתונים בפרק 2. נעיר שפתוח תורת ההסתברות אפשר לבסס גם באמצעות הכלל החזק של המספרים הגדולים.

**) הקורא יבדוק שההסתברות המוגדרת כאן מקיימת את האקסיומות 4-1.

הופעות נקודות האור במקומות שונים על המסך הן מאורעות מונעים
זה את זה; לכן לפי האקסיומה 4 נקבל שההסתברות המבוקשת $P(A) = 0$,
אף על פי ש-A אינו מאורע בלתי אפשרי. באותו אופן $P(\bar{A})=1$ למרות
ש-A אינו מאורע בטוח.

דוגמה 9. נניח שבקרון מלא חיטה גרעין אחד הוא שחור והשאר לבנים;
מוציאים באופן מקרי גרעין אחד מהקרון. ברור שפרקבנצית גרעין לבן
שואפת ל-1 ופרקבנצית גרעין שחור ל-0. על כן על סמך (WLB) הסתברות
הופעת גרעין לבן היא 1 והסתברות הופעת גרעין שחור היא 0 למרות
שהמאורע הראשון אינו בטוח והשני אינו בלתי אפשרי.

נדגיש שבנוסחת (WLB) אי אפשר לותר על האות P ז.א. הסתברות,
כי המספר שסביבו מצטברות פרקבנציות המאורע A יכול להיות שונה
בסריות שונות של נסויים בגלל סבות מקריות שונות.

על כן, אם A מופיע בממוצע m פעמים ב-n נסויים ו-n הוא
מספר גדול, הרי הכלל החזק של המספרים הגדולים קובע שבהסתברות 1;
$P(A) \approx \frac{m}{n}$ (* וזה מסביר את שם המשפט הנ"ל.

דוגמה 10. כשזורקים מטבע הרי אחרי זריקות רבות נראה שפרקבנציות
הופעות העץ מצטברות סביב $\frac{1}{2}$, כאשר מספר הזריקות שואף לאינסוף.

מדען צרפתי Buffon זרק מטבע 4040 פעמים וקבל 2048 פעמים
את העץ ז.א. פרקבנצית העץ היתה בנסוי זה $\frac{2048}{4040} = 0.50693$.

סטטיסטיקאי אנגלי Pearson זרק מטבע 24000 פעמים וקבל
פרקבנצית העץ שוה ל-0.5005, לעומת זאת סטטיסטיקאי רוסי רומנובסקי
זרק מטבע 80640 פעמים וקבל את העץ 39702 פעמים ז.א. בפרקבנדיה
של 0.4923

אפשר להגיד שתוצאות נסויים אלה מאשרות את התוצאה התאורטית
שקבלנו קודם, דבר שאפשר היה לצפותו על סמך (WLB).

דוגמאות נוספות רבות ניתן בהמשך הפרק.

(* $\approx$ מסמן שוה בקרוב.

בעיה ופתרונה - פתרונות

את הבעיות ראה בעמוד .

1. הפתרון הוצע ע"י א. זברוצקי מהטכניון.

נוסחת הרון היא: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

במקרה הנדון דרוש:

$$2p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ז.א.

$$4p^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

או

$$4p = (p-a)(p-b)(p-c) \qquad (1)$$

נכפיל את שני אגפי (1) ב-8:

$$32p = (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)$$

כל הגורמים באגף הימני הם שלמים ומכפלתם מספר זוגי ז.א. לפחות אחד מהגורמים הנ"ל הוא מספר זוגי. אבל אם למשל $2p-2a$ הוא מספר זוגי ו-$2a$ זוגי לפי הנחון (a שלם!) הרי גם $2p$ חייב להיות זוגי, כלומר p הוא מספר שלם. מכאן שכל הגורמים במשואה (1) הם מספרים שלמים.

נסמן: $p_1 = p-a,\ p_2 = p-b,\ p_3 = p-c$

קיים: $p_1 + p_2 + p_3 = 3p - (a+b+c) = p$

משואה (1) מקבלת את הצורה:

$$p_1p_2p_3 = 4(p_1 + p_2 + p_3) \qquad (2)$$

משואה זו סימטרית ביחס ל- p_1, p_2 ו- p_3 ואפשר להניח מבלי להפסיד בכלליות הפתרון:

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3$$

קל לראות ש- $p_1 = p_2 = p_3$ אינו נותן פתרון במספרים שלמים ב-(2).

מזה נובע $p_1p_2p_3 = 4(p_1+p_2+p_3) < 4(p_3+p_3+p_3) = 12p_3$

מצד שני ברור מ-(2) ש- $p_1p_2p_3 > 4p_3$

בסך הכל

$$4p_3 < p_1p_2p_3 < 12p_3$$

או

$$4 < p_1p_2 < 11$$

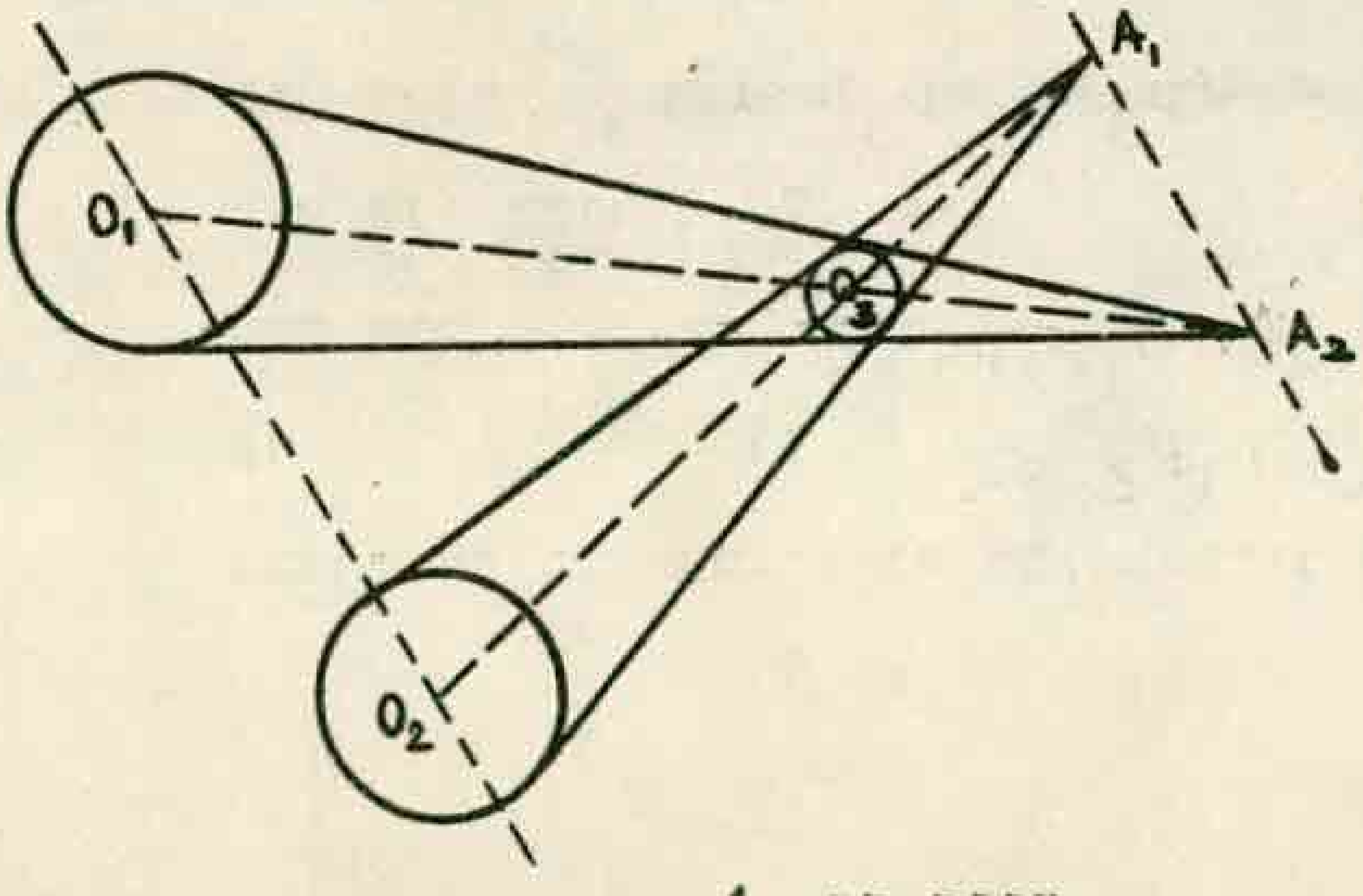
נבדוק את כל האפשרויות בהן מתקיים אי שויון זה:

p_1	p_2	משואה (2)	p_3	p	a	b	c	
1	5	$5p_3 = 24 + 4p_3$	24	30	29	25	6	
1	6	$6p_3 = 28 + 4p_3$	14	21	20	15	7	
1	7	$7p_3 = 32 + 4p_3$	—	—	—	—	—	
1	8	$8p_3 = 36 + 4p_3$	9	18	17	10	9	אותו פתרון
1	9	$9p_3 = 40 + 4p_3$	8	18	17	9	10	
1	10	$10p_3 = 44 + 4p_3$	—	—	—	—	—	
2	3	$6p_3 = 20 + 4p_3$	10	15	13	12	5	
2	4	$8p_3 = 24 + 4p_3$	6	12	10	8	6	
2	5	$10p_3 = 28 + 4p_3$	—	—	—	—	—	
3	3	$9p_3 = 24 + 4p_3$	—	—	—	—	—	

2. הפתרון הוצא ע"י א. זברוצקי מהטכניון.

נסמן את מרכזי המעגלים ב- O_1, O_2, O_3 ואת רדיוסיהם ב- r_1, r_2, r_3 בהתאמה. את נקודות החתוך של המשיקים החצוניים למעגלים O_1 ו- O_2 נסמן ב- A_3, ל- O_2 ו- O_3 ב- A_1 ול-O_3 ו- O_1 ב- A_2. תחילה נוכיח: אם $r_1 = r_2$ אזי $O_1O_2 \parallel A_1A_2$

ראה ציור מס. 1



ציור מס. 1

$$\frac{A_2O_1}{A_2O_3} = \frac{r_1}{r_3}$$

$$\frac{A_1O_2}{A_1O_3} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_1}{r_3}$$

מכאן:

$$\frac{A_2O_1}{A_2O_3} = \frac{A_1O_2}{A_1O_3}$$

נחסיר 1 משני האגפים:
$$\frac{A_2O_1-A_2O_3}{A_2O_3} = \frac{A_1O_2-A_1O_3}{A_1O_3}$$

ז.א.
$$\frac{O_1O_3}{A_2O_3} = \frac{O_2O_3}{A_1O_3}$$

ומכאן בבירור:
$$O_1O_2 \parallel A_1A_2$$

נפנה כעת למקרה הנתון כאשר, $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_1$ (ציור השער)

נעביר את המשיקים המשותפים ל- O_1ו- O_2 ונחסום להוך זוית זו מעגל O_3 שרדיוסן r_3. לפי המוכח לעיל $O_3O_3' \parallel A_1A_3$ (המיגלים O_2, O_3, O_3) ו- $O_3O_3' \parallel A_2A_3$ (המעגלים O_1, O_3, O_3') אבל דרך A_3 יכול לעבור רק ישר מקביל אחד ל- O_3O_3' לכן הנקודות A_1 , A_2 ו- A_3 נמצאות על ישר אחד.

פתרון קצר לשאלה זו נמסר לנו ע"י פרופ. ע.ז'בוטינסקי.

נבנה שלשה כדורים שמרכזיהם O_1, O_2, O_3 ורדיוסיהם r_1, r_2, r_3 בהתאמה. נבנה גם את החרוטים המשיקים מבחוץ לכדורים - O_1O_2; O_2, O_3 ו- O_1, O_3 . (כמוסבר בשאלה מס' 3).

קדקדי חרוטים אלה הם כמובן הנקודות A_3, A_1 ו-A_2.
נעביר כעת מישור המשיק לשלשת הכדורים. מישור זה משיק גם בבירור לשלשת החרוטים כך שהוא עובר דרך A_1, A_2 ו- A_3. יחד עם זה **שלוש** נקודות אלה נמצאות במישור המרכזים O_1, O_2, O_3 . בהיותן משותפות לשני המישורים נמצאות הנקודות A_1, A_2, A_3 על ישר החתוך שלהם ז.א. על ישר אחד.

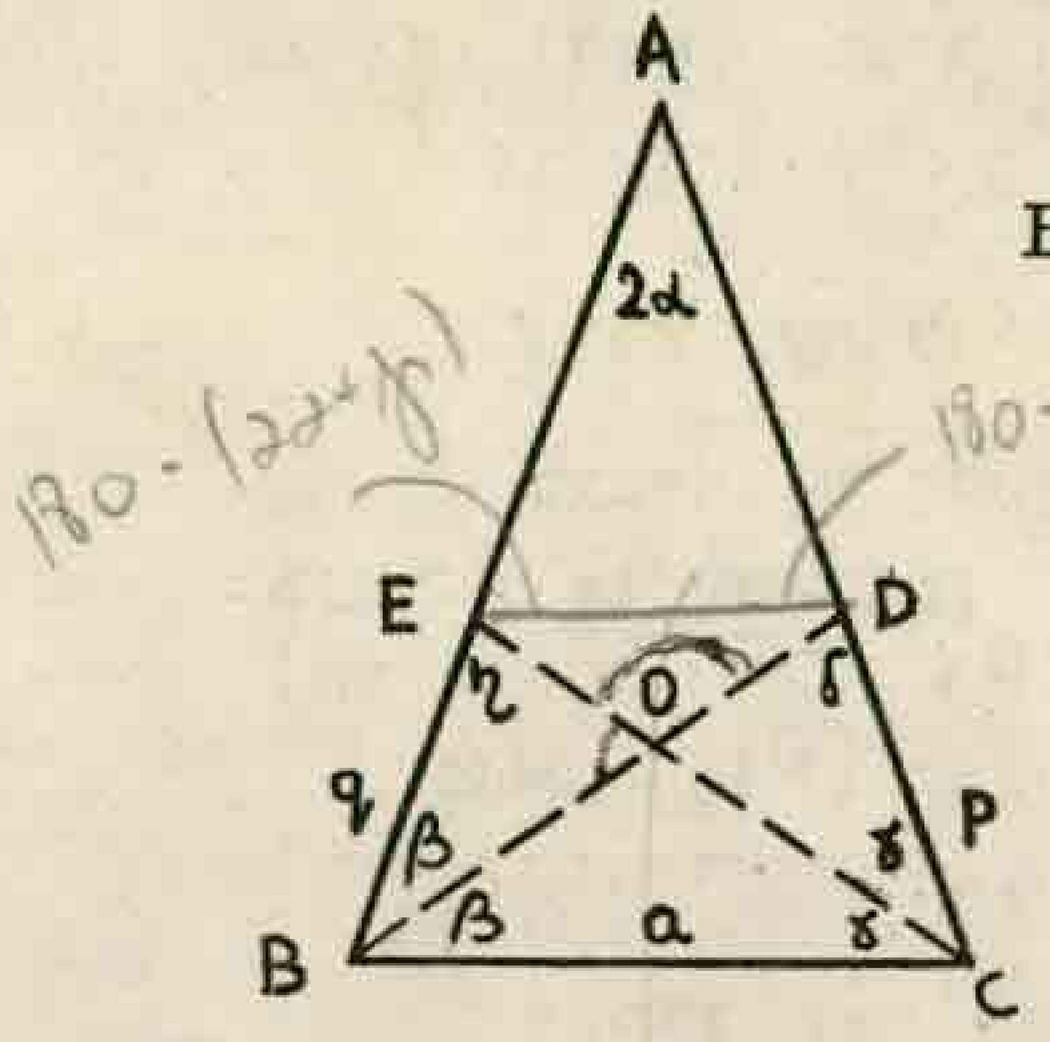
3. יהיו מרכזי ארבעת הכדורים O_1, O_2, O_3, O_4. נסמן ב- A_{12}, A_{13} וכו' את קדקדי החרוטים המשיקים מבחוץ לכדורים O_1 ו- O_2 O_1 ו- O_3 וכו' בהתאמה. לפי הנ"ל הנקודות A_{12}, A_{13}, A_{23} נמצאות על ישר אחד. באותו אופן הנקודות A_{12}, A_{14}, A_{24} . שני ישרים אלה קובעים מישור בו נמצאות 5 הנקודות A_{12}, $A_{13}, A_{23}, A_{14}, A_{24}$. הנקודות A_{24}, A_{23}, A_{34} נמצאות אף הן על ישר אחד ולישר זה 2 נקודות משותפות עם המישור הנ"ל, כלומר גם הנקודה הששית A_{34} נמצאת באותו המישור.

פתרון נוסף לבעיה מפורסמת

בחוברת מס' 4 עמ' 106 הובא פתרון לבעיה הידועה:

הוכח שמשלש בעל שני חוצי זויות שוים הוא משלש שוה-שוקיים.

פרופ' פוזנר מרחובות מסר לנו שני פתרונות נוספים לשאלה זו, אחד גיאומטרי ושני חשבוני.



ההוכחה הגיאומטרית:

נתון: $BD = CE = k$

צ.ל. $AB = AC$

הוכחה:

$$\eta = 2\alpha + \gamma$$

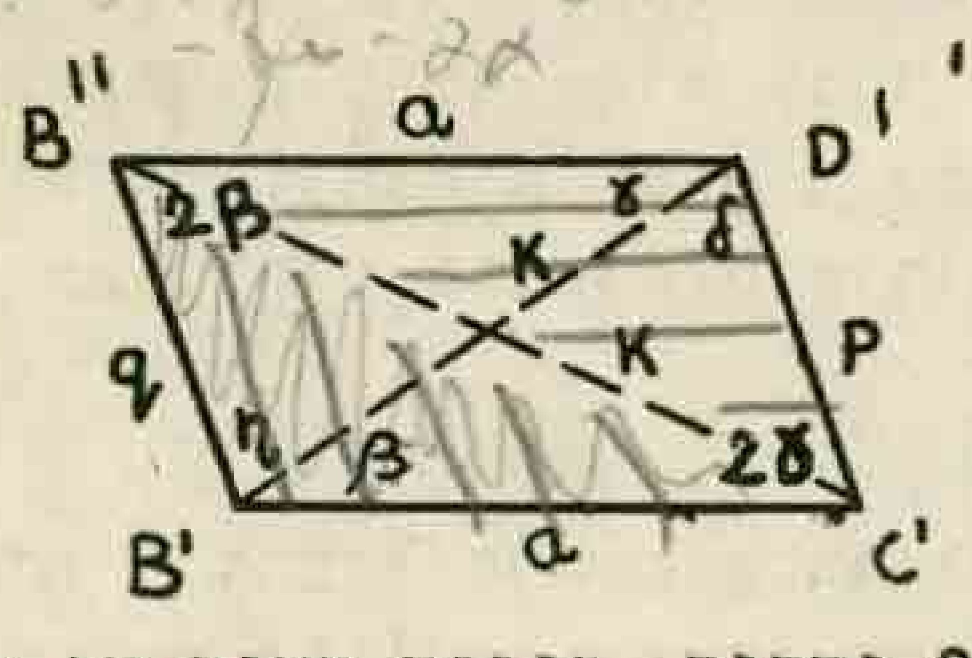
$$\eta + \beta = 2\alpha + \beta + \gamma > \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

ז.א. $\eta + \beta$ זוית קהה.

כמו כן $\delta + \gamma = \eta + \beta$ כי כל אחד מהסכומים משלים את $\measuredangle BOE$ ל- 180°.

נבנה כעת $\triangle B'C'D' \cong \triangle BCD$

$360 - 180 + 2\alpha + \gamma + 2\alpha + \beta$ $\triangle B''B'D' \cong \triangle BEC$



נעביר $B''C'$

כעת: $\triangle B''B'C' \cong \triangle B''D'C'$

כי $B''C'$ צלע משותפת,

$B''D' = B'C' = a$ וכאמור $\eta + \beta = \delta + \gamma$ ובתור זויות קהות הן מונחות מול הצלעות הגדולות במשלשים אלה.

מחפיפת המשלשים נובע $p = q$

ובהמשך $2\beta = 2\gamma$ ו-

$AB = AC$

ההוכחה החשבונית.

נתון: חוצה הזוית A שוה לחוצה הזוית C $(AD = CE = k)$

לפי תכונת המיתרים הנחתכים במעגל:

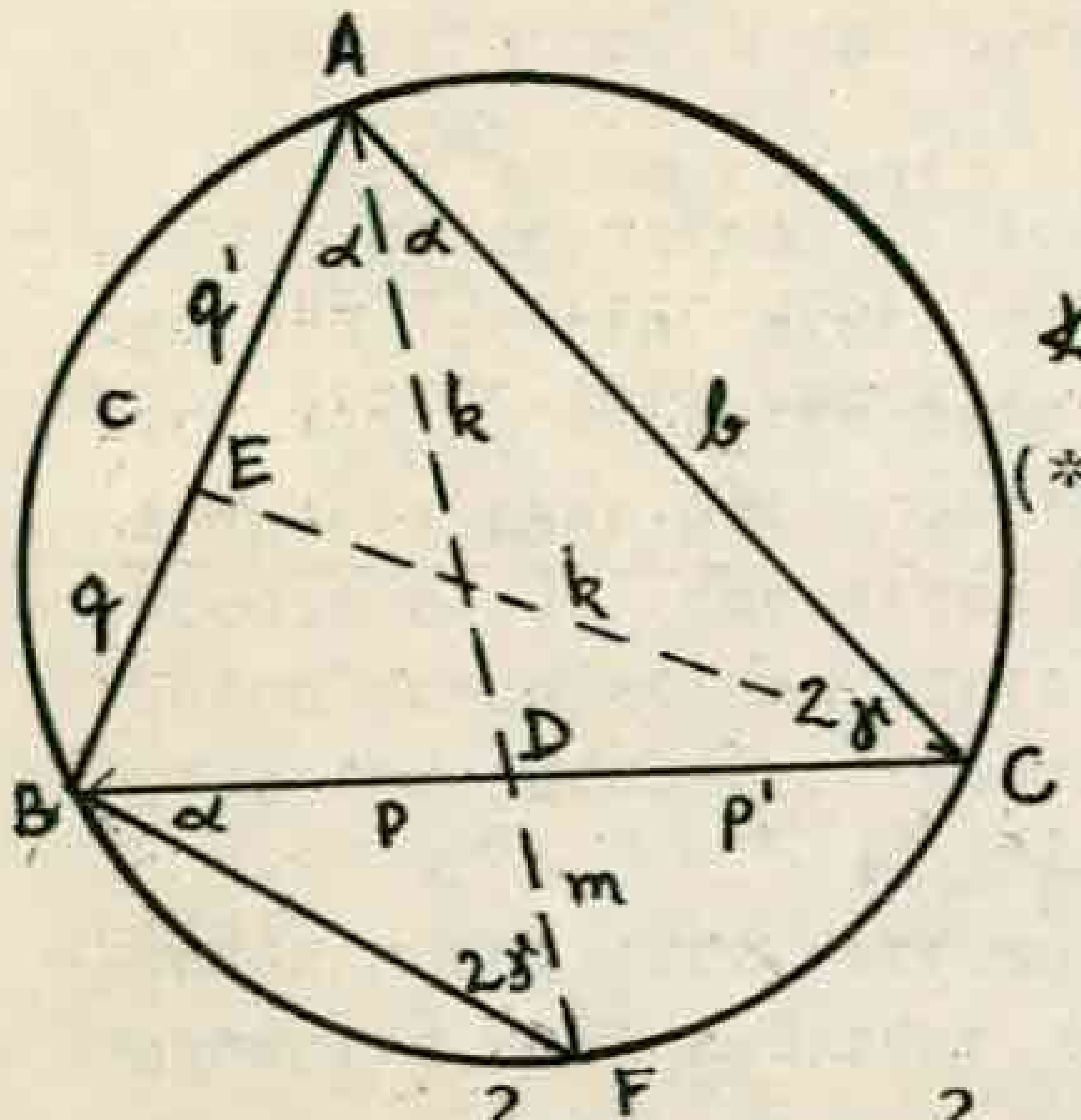
$$pp' = km$$

מדמיון המשלשים $\triangle ABF \sim \triangle ADC$

מקבלים: $\frac{k+m}{c} = \frac{b}{k}$

ז.א. $k^2 + km = bc$

וע"י הצבה: $k^2 = bc - pp'$



באותו אופן נקבל עבור חוצה הזוית $\sphericalangle C$
$k^2 = ab - qq'$

כלומר: $(*)\quad bc - ab = pp' - qq'$

מהשויונות הידועים

$p+p'=a,\quad \frac{p}{p'} = \frac{c}{b}$

נקבל $p = \frac{ac}{b+c} \quad p' = \frac{ab}{b+c}$

באותו אופן $q = \frac{ac}{a+b} \quad q' = \frac{bc}{a+b}$

נציב זאת ל-(*):

$$b(c-a) = \frac{a^2bc}{(b+c)^2} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} \qquad c-a = \frac{ac}{(b+c)^2(a+b)^2}\left[a(a+b)^2 - c(b+c)^2\right] =$$

$$= \frac{ac}{(b+c)^2(a+b)^2}\left[a^3 - c^3 + 2b(a^2 - c^2) + b^2(a-c)\right] =$$

$$= \frac{ac}{(b+c)^2(a+b)^2}(a-c)(a^2 + ac + c^2 + 2ab + 2bc + b^2)$$

אם נניח $a > c$ הרי באגף השמאלי של שויון זה הוא שלילי והאגף הימני חיובי. לסתירה דומה מביאה ההנחה $a < c$. נשאר, איפוא, $a=c$ משצ"ל.

(המשך מעמוד 163)

נקבל

$x-1=-3$	$x-1=-1$	$x-1=3$	$x-1=1$
$x=-2$	$x=0$	$x=4$	$x=2$

ת.56 באינדוקציה. עבור $k=8$ הטענה נכונה $8=5+3$. נניח כי היא נכונה לגבי $k \geq 8$ ועל סמך זאת נוכיח נכונותה לגבי $k+1$. אם בצרוף הנותן k מופיע לפחות בול אחד בן 5 אגורות – נחליפו בשני בולים בני 3 אגורות ונקבל $k+1$. אם לא מופיע כל בול בן 5 אגורות – מופיעים לפחות שלושה בני 3 אגורות $(k>8)$. נחליף שלושה בולים בני 3 אגורות בשני בולים בני 5 אגורות ונקבל $k+1$.

ת.57 ראה תקון לשאלה בחוברת 5. פתרונה יופיע עם פתרונות בעיות אותה חוברת.

הערה: מחוסר מקום נאלצנו לדחות את פרסום פתרונות השאלות ת-58 עד ת.60 לחוברת הבאה.

ממוש בטויים בוליאניים ע"י רשתות חשמליות

יהושפט גבעון

במאמר הקודם *) דנו בקופסה השחורה הפשוטה, כלומר במערכת M בעלת n נקודות קליטה (כפתורים מתגים וכו') $x_1,...,x_n$ ונקודת פלט אחת Y . נקודת הפלט וכל אחת מנקודות הקליטה יכולות להמצא באחד ורק באחד משני המצבים: "מופעל" (נסמן אותו ב-1) ו-"לא מופעל" (נסמנו ב-0). לכל קופסה שחורה התנהגות משלה, כלומר כל קופסה שחורה מגיבה על מצב מסוים של נקודות הקליטה בהפעלה או אי-הפעלה של נקודת הפלט. במלים אחרות לכל קופסה שחורה מתאימה הפונקציה $\varphi(x_1,x_2...,x_n)$ של n משתנים (כמספר נקודות הקליטה) שכל אחד מהם יכול לקבל את הערכים 1 או 0 וגם ערכי הפונקציה האפשריים הם 1 ו-0 בלבד.

ראינו שפונקציה זו אפשר לתאר ע"י בטוי בוליאני $\varphi(x_1,...,x_n)$ אשר יתאים לפי חוקי הפעולה של אלגברה בוליאנית לכל קומבינציה של ϕ ו- I (המחליפים את 0 ו-1 בהתאמה) שחוצב במקום $x_1,...,x_n$ את ϕ או I .

ראינו גם איך לחשב את $\varphi(x_1,x_2...,x_n)$ ולקבל בדרך זו את הפתרון התיאורטי של הבעיה, מתוך הטבלה המתארת את התנהגות המערכת M .

<u>ה ע ר ה:</u> נזכיר שאנו דנים כאן במערכת "בלי זכרון", כלומר במערכת שמצב נקודת הפלט שלה בזמן מסוים נקבע אך ורק ע"י המצב של נקודות הקליטה <u>באותו</u> הזמן.

כעת אנו עומדים לפני השלב האחרון בדיון בקופסות השחורות הפשוטות, הוא שלב הפתרון הממשי: בהנתן בטוי בוליאני $\varphi(x_1,...,x_n)$ עלינו להציע מבנה של <u>מערכת ממשית</u> אשר התנהגותה תתואר ע"י בטוי זה בדיוק. למערכת זו נקרא <u>ממוש</u> של $\varphi(x_1...,x_n)$.

במאמר זה ובמאמר הבא נלמד לממש בטויים בוליאניים ע"י רשתות חשמליות עם ממסרים; יותר מאוחר נראה שמצאנו פתרון המאפשר לממש בטויים בוליאניים גם ע"י מערכות ממשיות אחרות (בתנאים מסוימים).

לשם פשטות הדיון נשתמש תחילה בממסרים מיוחדים, שנקרא להם <u>אלמנטריים</u>, ואשר ע"י הרכבתם ברשתות חשמליות נקבל מימושים לכל הבטויים הבוליאניים.

---

*) ראה "גליונות מתמטיקה" מס' 3 עמ' 78.

נכיר, איפוא, את מבנה הממסרים האלמנטריים:

I. <u>הממסר המעביר</u>

<u>סמון</u> הממסר המעביר כקופסה שחורה

המבנה הפנימי של הממסר המעביר

ציור מס׳ 1

אם נחבר את z (ראה ציור מס׳ 1) למקור מתח, אז כאשר נקודת x תהיה במתח, הלשון הקפיצית L תימשך אל הסליל ויווצר חבור בין y ובין z. אם ננתק את x ממתח תחזור הלשון L למקומה והחבור ייפסק.

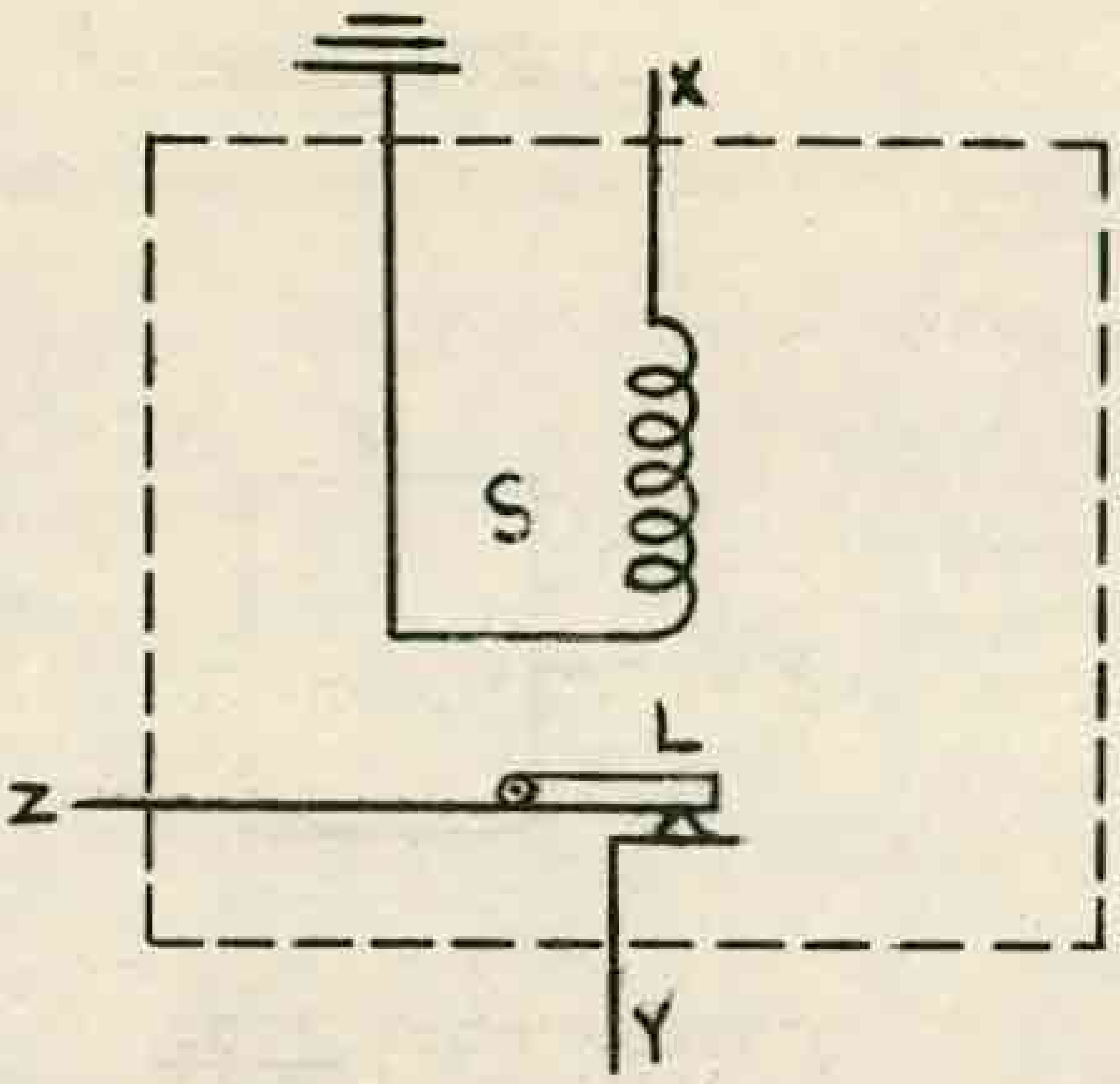
הממסר המעביר הוא קופסה שחורה בת שתי נקודות קליטה x ו- z ונקודת פלט אחת y. התנהגות מערכת זו מתוארת ע"י הטבלה

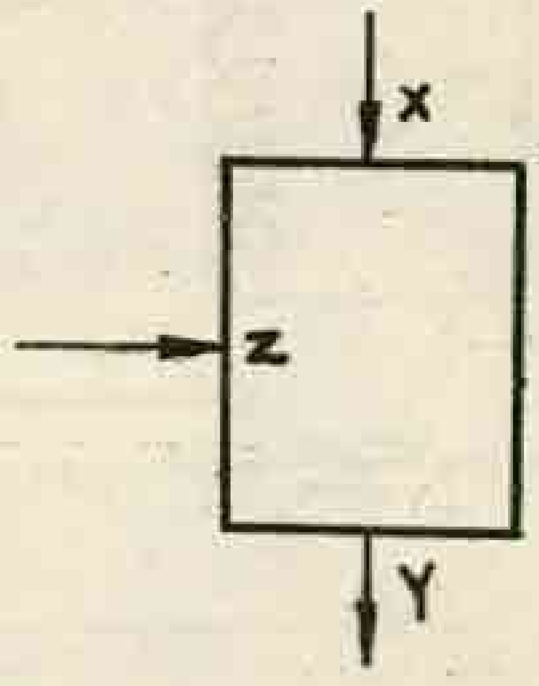
z	x	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

הקורא יאשר בלי קושי שהבטוי הבוליאני המתאר את הממסר המעביר הוא:

$$y = x \cap z$$

II . הממסר המחליף





סמון הממסר המחליף כקופסה שחורה

המבנה הפנימי של הממסר המחליף

ציור מס' 2

בממסר זה הפעלת הסליל S (ראה ציור מס' 2) גורמת לתוצאה הפוכה לזו של הפעלת הסליל שבממסר מעביר; במשכו את L הסליל מנתק את החבור של z עם y ולפיכך התנהגות הממסר המעביר מתוארת ע"י הטבלה:

z	x	y
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

הבטוי הבוליאני המתאר את הממסר המחליף הוא $y = x' \cap z$.

בעזרת הממסרים האלמנטריים הנ"ל אנו יכולים מיד לממש בטויים בוליאניים פשוטים.

להלן מספר דוגמאות:

דוגמה 1: ממוש $y = \Phi$

בטוי זה אפשר לממש ע"י ממסר אלמנטרי כלשהו שנקודת הקליטה שלו z אינה קשורה למקור מתח.
(במקרה של ממסר מעביר מקבלים $y = x \cap \Phi = \Phi$
ובמקרה של ממסר מחליף $y = x' \cap \Phi = \Phi$)

דוגמה 2: ממוש $y = x$

יתקבל ע"י ממסר מעביר שנקודת קליטה שלו קשורה למקור המתח.
ובאמת $y = x \cap I = x$.

דוגמה 3: ממוש $y = x'$

יתקבל ע"י ממסר מחליף שבו z קשורה למקור המתח. במקרה זה
נקבל $y = x' \cap I = x'$.

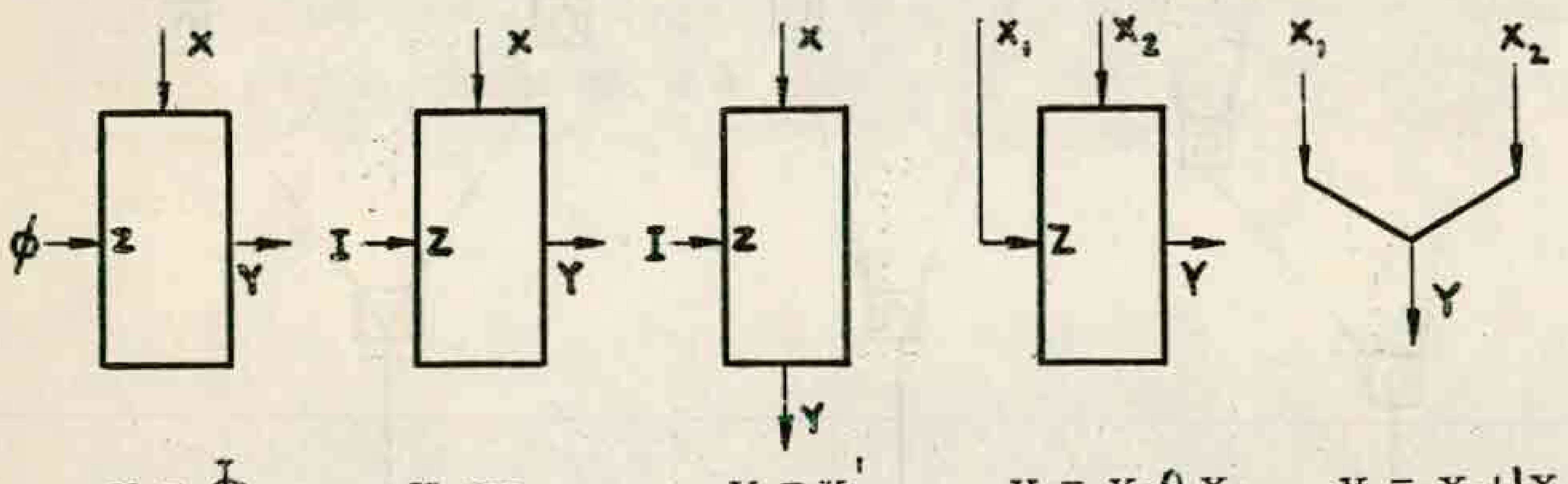
דוגמה 4: ממוש $y = x_1 \cap x_2$

יתקבל, בעזרת ממסר מעביר כאשר z יקושר עם x_1 ו- x עם x_2

דוגמה 5: ממוש $y = x_1 \cup x_2$

אינו דורש, שום ממסר שהרי מספיק לקשור את y במישרין אל x_1
ואל x_2 בכדי שב- y יהיה מתח אם ורק אם יש מתח ב- x_1 או ב- x_2
או בשניהם.

נתאר סכמטית את הממושים הנ"ל בציור מס' 3:



$y = \Phi$ $\quad$ $y = x$ $\quad$ $y = x'$ $\quad$ $y = x_1 \cap x_2$ $\quad$ $y = x_1 \cup x_2$

ציור מס' 3

קבלנו, איפוא, ממוש של 5 בטויים בוליאניים: $\Phi, x, x', x_1 \cap x_2$
ו- $x_1 \cup x_2$. כיצד נרכיב ממסרים בכדי לקבל ממושים של בטויים
בוליאניים מורכבים יותר? לשם כך עלינו לחזור ולסקור את הגדרת
הבטויים הבוליאניים בסימנים $x_1, \ldots, x_n, \Phi, I$:

(i) כל אחד מן הסימנים $x_1, \ldots, x_n, \Phi, I$ כשלעצמו הוא בטוי
בוליאני.

(ii) אם α הוא בטוי בוליאני אז α' הוא בטוי בוליאני.
(נזכיר: אם $\alpha = I$ הרי $\alpha' = \Phi$ ואם $\alpha = \Phi$ הרי $\alpha' = I$).

(iii) אם α ו- β הם בטויים בוליאניים אז $\alpha \cap \beta$ הוא בטוי
בוליאני.

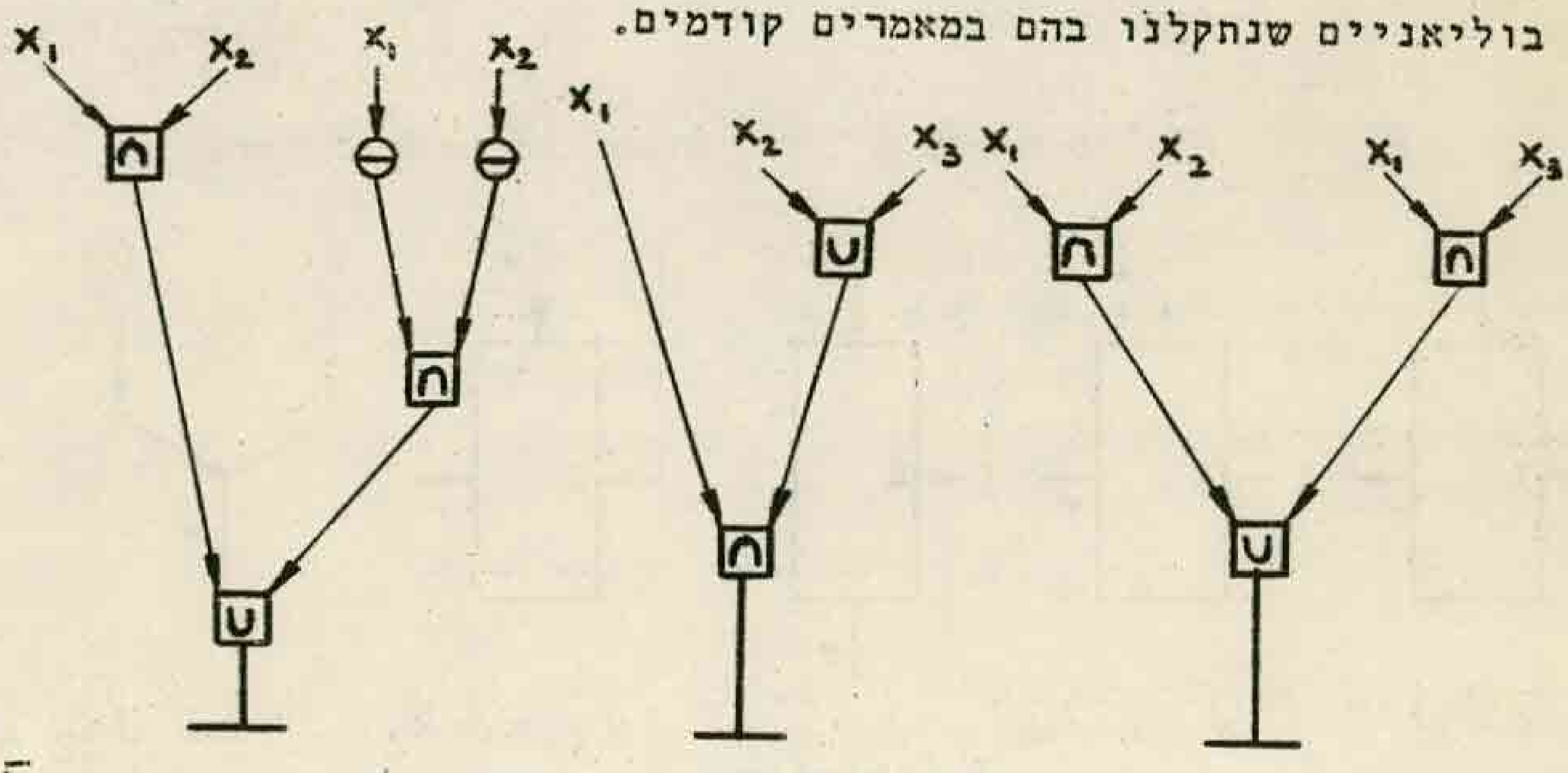
(iv) אם α ו- β הם בטויים בוליאניים אז $\alpha \cup \beta$ הוא בטוי
בוליאני.

(v) כל בטוי בוליאני הוא -
או בטוי מאלה המוגדרים ב(i)
או בטוי המתקבל מבטויים בוליאנים אחרים ע"פ (ii),
(iii) או (iv).

לפיכך אנו יכולים לתאר את המבנה של כל בטוי בוליאני ע"י "נהר" אשר "מקורותיו" הם בטויים המוגדרים ב-(i), ולפני שהוא "משתפך אל הים" כבטוי בוליאני הוא עובר שנויי צורה אחדים ע"פ (ii), (iii) או (iv).

נסמן את (ii) ע"י $\ominus$ את (iii) ע"י $\boxed{\cap}$ ואת (iv) ע"י $\boxed{\cup}$

בעזרת סמנים אלה נוכל לתאר כל בטוי בוליאני בצורת ה"נהר" המיוחד שלו. לדוגמה נביא בציור מס' 4 כמה "נהרות" של בטויים בוליאניים שנתקלנו בהם במאמרים קודמים.



$[[x_1 \cap x_2] \cup [x_1' \cap x_2']]$ $[x_1 \cap [x_2 \cup x_3]]$ $[[x_1 \cap x_2] \cup [x_1 \cap x_3]]$

ציור מס' 4

בעקבנו אחר בנית בטוי בוליאני נתון, אנו יכולים לשרטט, צעד בצעד, את ה"נהר" המתאר את מבנהו. באיזו מדה שרטוט ה"נהר" מקרב אותנו לפתרון בעית הממוש של בטויים בוליאניים נראה במאמר הבא.

פתרון משואות ממעלה שלישית

רפאל זמיר

תכנית הלימודים של ביה"ס התיכון כוללת פתרון משואות ממעלה ראשונה ושניה.

במאמר הבא נסביר שיטה כללית לפתרון משואות ממעלה שלישית.

א. פישוט המשואה ממעלה שלישית.

כל משואה ממעלה שלישית שמקדמיה ממשיים אפשר להביא לצורה $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ כאשר a_1, a_2, a_3 הם מספרים ממשיים.

ע"י הצבה מתאימה אפשר להפוך כל משואה כזאת למשואה ממעלה שלישית שאין בה האבר עם x^2. ובאמת, נציב $x = y+t$ נקבל:

$$(y+t)^3 + a_1(y+t)^2 + a_2(y+t) + a_3 = 0$$

אחרי פתיחת הסוגריים וסדור הביטוי לפי חזקות יורדות של y נקבל:

$$y^3 + y^2(3t + a_1) + my + n = 0$$

כאשר m ו- n הם ביטויים אלגבריים המכילים את a_3, a_2, a_1 ו-t.

אנו חפשיים לבחור את הערך של t כרצוננו.
נדרוש $3t + a_1 = 0$ ז.א. $t = -\frac{a_1}{3}$ ע"י כך ייעלם הבטוי המכיל y^2 והמשואה תקבל את הצורה

$$y^2 + my + n = 0$$

הואיל וכל משואה ממעלה שלישית אפשר להביא לצורה זאת, לכן אפשר לטפל במשואות מצורה אחרונה זו בלבד.

הקורא ישים לב, כי השיטה הנ"ל שהביאה להעלמות הביטוי שהכיל את הנעלם במעלה השניה היא כללית לגמרי. ע"י הצבה $x = y+t$ ובחירה מתאימה של t אפשר להביא לאפוס המקדם של האבר מהמעלה $n-1$ בכל משואה מהצורה

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

נציע לקורא כתרגיל לפתור לפי שטה זו את המשואה הרבועית $x^2 + kx + p = 0$ ולהשוות את הפתרון עם הנוסחה הידועה לו מביה"ס.

ב) פתרון המשואה מהצורה $y^3 + my + n = 0$

לשם נוחיות ההמשך - כדי להימנע משברים - נסמן $m=3p$ ו- $n=2q$
המשואה תקבל את הצורה:

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

נניח $y = u + v$. אחרי ההצבה נקבל:

$$(u + v)^3 + 3p(u + v) + 2q = 0$$

אחרי פיתוח מקבלים:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 3p(u+v) + 2q = 0$$

על הסכום $u+v$ היטלנו דרישה יחידה והיא $u+v=y$ ז.א. שסכום זה צריך לקיים את המשואה הנתונה. אנו חפשיים, איפוא, להטיל קשר כלשהו נוסף על u ו-v. נדרוש $uv + p = 0$ ז.א. $u = -\frac{p}{v}$

בדרך זו נגיע למערכת משואות

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -2q \\ uv + p = 0 \end{cases}$$

או בצורה אחרת:

$$u^3 + v^3 = -2q \quad ; \quad u^3 v^3 = -p^3$$

ע"ס התכונות הידועות של שורשי המשואה הרבועית u^3 ו- v^3 הם שרשי המשואה $z^2 + 2qz - p^3 = 0$
פתרונות משואה זו יתנו את u^3 ו- v^3. מקבלים:

$$u^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}$$
$$v^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3}$$

ומכאן

$$y = u + v = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

לאלה מבין הקוראים שלמדו על מספרים מרוכבים ידוע כי לכל מספר ממשי שונה מ-0 ישנם 3 שורשים שונים ממעלה שלישית, אחד ממשי ושנים מרוכבים. ע"י כל הצרופים שלהם נקבל לכאורה 9 ערכים שונים בשביל y ?! אבל כפי שראינו צריך להתקיים התנאי $uv=-p$ ז.א. יש לבחור ערכים כאלה בשביל u ו- v שמכפלתם תתן את המספר הממשי $-p$. בין 9 הזוגות האפשריים יהיו רק שלושה המקיימים זאת והם נותנים את 3 השורשים של המשואה ממעלה שלישית.

הקורא ישים לב כי הפתרונות הנוספים הוכנסו למשואה כאשר במקום $uv = -p$ השתמשנו ב- $u^3v^3 = -p^3$; מצב דומה למתהוה, כאשר במקום $x = 1$ למשל משתמשים במשואה $x^2 = 1$ ונוסף ע"י כך פתרון $x = -1$.

ג. <u>ניתוח הפתרונות של המשואה הקובית.</u>

1) $q^2 + p^3 > 0$. במקרה זה רואים שישנו שורש ממשי אחד. ישנם עוד שני שורשים מרוכבים, המתקבלים ע"י הכפלת הערכים הממשיים של u ו- v בערכים המורכבים המתאימים של $\sqrt[3]{1}$ בשמירה על התנאי ש- uv ייתן מספר ממשי.

אנו משאירים לקורא השולט במספרים מרוכבים לבצע דיון מפורט במקרה זה.

2) $q^2+p^3=0$. מקבלים פתרון ממשי $y=2\sqrt[3]{-q}$. בקלות אפשר להיוכח כי גם $\sqrt[3]{q}$ הוא פתרון המשואה. בסך הכל יהיו 3 פתרונות ממשיים אשר שנים מהם שוים $\sqrt[3]{q}, \sqrt[3]{q}$ והשלישי הוא $2\sqrt[3]{-q}$

3) $q^2+p^3<0$. מקרה זה מעניין במיוחד. כאן $\sqrt{p^2+q^3}$ איננו ממשי ובכל זאת יהיו במקרה זה למשואה $y^3+3py+2q=0$ 3 שורשים ממשיים.

לשם מציאת שורשים אלה נשתמש בהצבה טריגונומטרית.
נסביר זאת תחילה ע"י דוגמה.

נתבונן במשואה $x^3+3x^2-18x-40=0$ לשם ביטול האבר עם x^2 נציב $x=y-1$. אחרי פיתוח המשואה נקבל $y^3-21y-20=0$

או $y^3+3(-7)y+2(-10)=0$, כלומר $q=-10,\ p=-7$

ו- $q^2+p^3=100-343=-243<0$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

נוכל לרשום זהות זו גם בצורה הבאה:

$$\cos^3\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha - \frac{1}{4}\cos 3\alpha = 0$$

נניח במשואה שאנו רוצים לפתור $y=t\cos\alpha$. נקבל

$$t^3\cos^3\alpha - 21\,t\cos\alpha - 20 = 0$$

או

$$\cos^3\alpha - \frac{21}{t^2}\cos\alpha - \frac{20}{t^3} = 0$$

($t\neq 0$ בבירור).

נקבע כעת $-\frac{21}{t^2}=\frac{-3}{4}$ ז.א. $t^2=28$, וכן

$$-\frac{1}{4}\cos 3\alpha = -\frac{20}{t^3}$$

ז.א.

$$\cos 3\alpha = \frac{80}{t^3}$$

מכאן $t=2\sqrt{7}$ $\quad 3\alpha \sim \pm 57^\circ 18' + 360^\circ n$

או $\alpha \sim \pm 19^\circ 6' + 120^\circ n \quad (n=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$

לבסוף מקבלים:

$y_1 \sim 2\sqrt{7}\cos 19^\circ 6' \sim 5$

$y_2 \sim 2\sqrt{7}\cos 139^\circ 6' \sim -4$

$y_3 \sim 2\sqrt{7}\cos 259^\circ 6' \sim -1$

הערה: האגף השמאלי של המשואה נתונה נתן לפרוק:

$$y^3-21y-20=y^3-y-20y-20=y(y^2-1)-20(y+1) =$$
$$=(y+1)(y^2-y-20)=(y+1)(y+4)(y-5)$$

פתרונותיה: $y=-1;\ y=-4;\ y=5$

הם בהתאם למה שקבלנו לעיל.

3 הפתרונות של המשואה המקורית $x^3+3x^2-18x-40=0$

נקבל לפי $x=y-1$: $x_1=4,\ x_2=-5,\ x_3=-2$

באופן כללי, אם במשואה $y^3+3py+2q=0$ קיים $q^2+p^3<0$

נניח $y=t\cos\alpha$ ונקבל: $t^3\cos^3\alpha+3pt\cos\alpha+2q=0$

נחלק ב- t^3 (נוכל להניח $t\neq 0$ כי אם $t=0$ גם $q=0$ ופתרון המשואה הוא פשוט). מקבלים

$$\cos^3\alpha+\frac{3p}{t^2}\cos\alpha+\frac{2q}{t^3}=0$$

נשתמש כעת בזהות $\cos^3\alpha-\frac{3}{4}\cos\alpha-\frac{1}{4}\cos 3\alpha=0$

נניח $\frac{3p}{t^2}=-\frac{3}{4}$ $\qquad t=2\sqrt{-p}$

(ההנחה $t=-2\sqrt{-p}$ לא תתן פתרונות נוספים),

וכן $\frac{2q}{t^3}=-\frac{1}{4}\cos 3\alpha$ ז.א. $\cos 3\alpha=-\frac{8q}{t^3}$

פתרון משואה זאת מבטיח 3 פתרונות שונים למשואה המקורית.

דרך זו אפשרית רק כאשר $q^2+p^3\leq 0$, כי $q^2+p^3<0$ מבטיח $p<0$ ($q^2\geq 0$ תמיד) ולכן $t=2\sqrt{-p}$ הוא מספר ממשי.

נוסף לכך העובדה כי $q^2<-p^3$ מבטיחה $\left|\frac{q^2}{-p^3}\right|<1$ לכן גם $\left|\frac{-8q}{t^3}\right|<1$

(בהנחה $t=2\sqrt{-p}$) קיימים α המספקים את המשואה $\cos 3\alpha=-\frac{8q}{t^3}$

הקורא ישים לב כי לפי שיטה זאת אפשר גם לפתור את המקרה כאשר $q^2+p^3=0$ כי במקרה זה $p=\sqrt[3]{-q^2}$ לכן $t=2\sqrt{-p}=2\sqrt[3]{q}$.

$$\cos 3\alpha=\frac{-8q}{t^3}=\frac{-8q}{8q}=-1=\cos\left[180^\circ(2n+1)\right]$$

ו- $\alpha=60^\circ(2n+1)$

מקבלים:

$$y_1=t\cos\alpha_1=2\sqrt[3]{q}\cos 60^\circ=\sqrt[3]{q}$$
$$y_2=t\cos\alpha_2=2\sqrt[3]{q}\cos 180^\circ=-2\sqrt[3]{q}$$
$$y_3=t\cos\alpha_3=2\sqrt[3]{q}\cos 300^\circ=\sqrt[3]{q}$$

סיכום. הראינו כי לכל משואה ממעלה שלישית עם מקדמים ממשיים יש פתרון ממשי אחד או 3 פתרונות ממשיים. פתרונות אלה מתקבלים מהמקדמים של המשואה ע"י נוסחה המכילה פעולות רציונליות והוצאות שורשים. על משואות ממעלה גבוהה יותר נדון במאמר נוסף.

פתרון בעיות של התחרות המתמדת.

להלן פתרונות השאלות ת.46 - ת.60 של התחרות המתמדת.

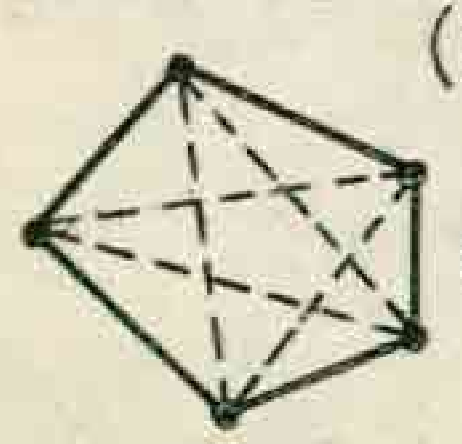
ת.46 נסמן ב- a_{kl} את המספר הנמצא בשורה k ובעמודה l.
אם a_{rs} ו- a_{pq} מקימים את נתוני המשפט הרי

$$a_{rs} \leq a_{rq} \leq a_{pq}$$

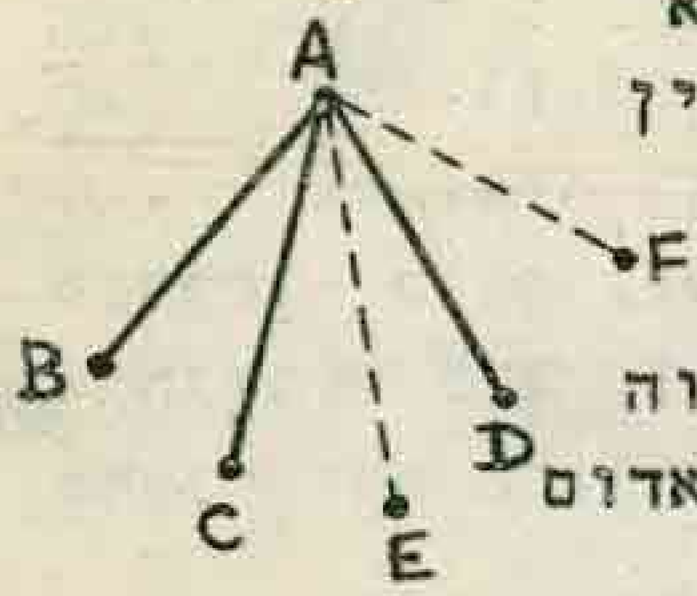
$$a_{rs} \geq a_{ps} \geq a_{pq}$$

$$\therefore \quad a_{rs} \leq a_{pq} \leq a_{rs} \qquad \therefore \quad a_{rs} = a_{pq}$$

ת.47 א) חמש נקודות נתנות לחבור (בדרכים שונות) מבלי שיתקבל משולש חד-גוני. לדוגמא:



לעומת זאת בשש נקודות נקבל תמיד משולש חד-גוני.



הוכחה: תהי A אחת מנקודות הקבוצה. מאחר שהיא מחוברת עם כל חמש הנקודות הנותרות, מופיעים בין חמשת הקטעים היוצאים ממנה לפחות שלושה (נאמר AD, AC, AB) בני אותו גון (נאמר אדום). אם אחת מצלעות המשולש BCD תצבע באדום - היא תהוה עם A משולש חד-גוני. אם אף אחת מהן לא תצבע אדום הרי BCD יהוה משולש חד-גוני (ירוק).

ב) בפתרון (א) לא השתמשנו בעובדה שקבוצת הנקודות נמצאת במישור. לכן נסוח ופתרון הבעיה יהיו זהים עם מקרה (א).

הערות: 1) היו שהציעו את הבעיה הבאה למרחב: נתונות n נקודות במרחב כך שאף ארבע מהן אינן על מישור אחד. מחברים כל שתים מהן בקטע אדום או ירוק. מה מספר הנקודות המינימלי ההכרחי כדי שיווצר ארבעון אשר קדקדיו הם מהנקודות הנתונות וכל מקצועותיו בני גון אחד?

2) היו שהציעו לצבוע את המשולשים המתקבלים (כל משולש באחד משני הצבעים) ושאלו מהו המספר המינימלי של נקודות כך שיתקבל ארבעון שכל פאותיו בנות גון אחד.

אולם אף אחד לא הצליח לפתור את הבעיה שהציע. אנו מבקשים את עזרת הקוראים בפתרון הבעיות.

3) עין בעיה ת.61 בחוברת הנוכחית.

ת.48 (תשובתו של חפרי מיכה)

$$tgA+tgB+tgC = tgA\,tgB\,tgC$$

$$tgA(1-tgB\,tgC) = -(tgB+tgC)$$

$$tg\,A = -\frac{tgB + tgC}{1 - tgB\,tgC} = -\,tg(B + C)$$

$$tg\,A + tg\,(B + C) = 0 \qquad \therefore \quad tg(A+B+C) = 0$$

$$A + B + C = n\pi \qquad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$$

ת.49 נסדר את n המספרים הרציונליים לפי גדלם

$$A = \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_3}{b_3} \leq \ldots \leq \frac{a_n}{b_n} = B$$

a_k ו- b_k טבעיים. לפי הנחון: $A \leq \frac{a_k}{b_k} \leq B$

מאחר שכל המספרים חיוביים $Ab_k \leq a_k \leq Bb_k$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \geq \frac{Ab_1+Ab_2+\ldots Ab_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = \frac{A(b_1+\ldots+b_n)}{b_1+b_2+\ldots b_n} = A$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leq \frac{Bb_1+Bb_2+\ldots+Bb_n}{b_1+b_2+\ldots b_n} = B$$

ת.50 לפתרון שאלה זו יש להניח כי האנשים מסודרים וזכות התגובה (להפסיק לצחוק מתוך מסקנה שאף הוא עצמו מלוכלך) נתנת להם כסדרם. כלומר, כל אחד נותן שהות מספקת לכל הקודמים לו לחשוב ולהגיב. כמו כן אנו מניחים כי כל מי שמסיק שהוא מלוכלך ורק מי שמסיק זאת מפסיק לצחוק.

אילו היה מתקים הדבר לגבי שני חכמים בלבד היה הפתרון כדלהלן: השני חושב: אילו הייתי נקי חברי לא היה צוחק. מאחר שהוא צוחק הריני מלוכלך.

אילו נוכחו שלושה חכמים. השלישי חושב: אם אני נקי לא נותרו אלא שני מלוכלכים (שניהם רואים שאני נקי). אך בקבוצה של שני מלוכלכים, כפי שראינו לעיל, יכל השני להסיק שהוא מלוכלך ולכן יפסיק (חיב להפסיק) לצחוק. אולם השני המשיך לצחוק. לכן אף אני מלוכלך.

נפנה עתה לאינדוקציה.

נניח כי בקבוצה בת n חכמים ($n \geq 2$) שלוכלכו וצוחקים זה מזה יסיק האחרון שאף הוא מלוכלך ולכן יפסיק לצחוק. על סמך הנחה זו נוכיח כי אף בקבוצה בת $n+1$ חכמים חיב האחרון להפסיק לצחוק. האחרון חושב: נניח כי אני נקי. זאת רואים כל n חברי ולכן אני מוצא מכלל המלוכלכים. נותרו n מלוכלכים. לפי הנחת האינדוקציה חיב האחרון להפסיק לצחוק. אך הוא לא הפסיק. לכן גם אני מלוכלך ועלי להפסיק לצחוק.

ת.51 כדי שיהיה מובן לבטוי אנו מניחים $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\quad tgx + \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} =$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} = \frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2}$$

הסמך לפני השורש הוא חיובי, כלומר $=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\left|\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\right|$

המונה $1-\sin x$ לעולם אינו שלילי לכן $=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{1-\sin x}{|\cos x|}$

א) אם $\cos x > 0$ $\quad |\cos x| = \cos x$

ב) אם $\cos x < 0$ $\quad |\cos x| = -\cos x$

לכן במקרה א $=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\dfrac{1}{\cos x}$

במקרה ב $=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\dfrac{2\sin x-1}{\cos x}=\dfrac{(2\sin x-1)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}$

$$=\frac{2\sin x-1+2\sin^2 x-\sin x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\sin x-(1-2\sin^2 x)}{\cos x(1+\sin x)}=$$

$$=\frac{\sin x-\cos 2x}{\cos x(1+\sin x)}$$

הערה: רבים מהפותרים פתחו נכון את כל הפתוחים המופיעים לעיל. אולם לא הטעימו נכון את השמוש בסמנו של $\cos x$.

<u>ת. 52</u> תנאי הכרחי לכך שאפשר יהיה לציר ציור במשיכת קולמוס אחת (מבלי לחזור על קטעים מצוירים) הוא שמספר נקודות ההסתעפות מהן יוצאים מספר בלתי זוגי של קטעים יהיה שנים לכל היותר. הסבה לכך היא שמכל נקודה אליה נכנסים חיבים גם לצאת ולהיפך, פרט לשתי נקודות לכל היותר: נקודת התחלת המשיכה ונקודת סיומה. בצורות א ו-ג תנאי זה אינו מתמלא. לכן אי אפשר לצירן במשיכת קולמוס אחת. לעומת זאת, קל להוכח כי את השרטוטים ב ו-ד אפשר לציר במשיכה אחת. אולם בציור ד חובה להתחיל (וממילא לסים) באחת הנקודות מהן מסתעפים 3 קטעים.

<u>ת. 53</u> ההתערבות כדאית.

תחת לחשב את ההסתברות שיהיו שני אנשים (לפחות) בעלי אותו יום הולדת, נחשב את ההסתברות ל"מאורע ההפוך", ז.א. את ההסתברות לכך <u>שלא יימצאו</u> שני אנשים בעלי אותו יום הולדת. יהי מספר האנשים n . אם $n > 365$ הכרח שיהיו לפחות שני בעלי אותו יום הולדת. נניח לכן $n \leq 365$. הנחה מובנת מאליה היא כי ההסתברות להולד בכל אחד מימות השנה הן שוות. מאחר שכל אחד יכל להולד בכל אחד מ-365 ימי

השנה, יש לגבי n אנשים 365^n אפשרויות שונות של צרופי ימי-הולדת.

לעומת זאת מספר האפשרויות שלאף שנים לא יהיה יום הולדת משותף יחושב כדלהלן. נסדר את n האנשים. לראשון יש 365 אפשרויות של ימי הולדת. לשני רק 364 אפשרויות על כל אחת מאפשרויותיו של הראשון. לשלישי רק 363 אפשרויות על כל אחת מ-365.364 האפשרויות של שני הראשונים. וכן הלאה. מספר האפשרויות של n אנשים להולד כך שלאף שנים לא יהיה יום הולדת משותף יהיה איפוא

$$365 \cdot 364 . \ldots . (365-n+1)$$

ההסתברות למאורע זה תהיה לכן

$$p_n = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

לכן ההסתברות שיהיה יום הולדת משותף לשנים לפחות הוא $1-p_n$

בחשוב פשוט (אך אורך) מוצאים $1-p_{30} \sim 0.706 > 0.5$

לכן ההתערבות כדאית.

כמו כן מוצאים

$$1-p_{23} \sim 0.507 > 0.5$$

$$1-p_{22} \sim 0.476 < 0.5$$

מסקנה: ההתערבות כדאית אפילו לגבי 23 איש. אך אינה כדאית לגבי 22 איש. (המשך בעמוד 163)

תחרות מתמדת להתרת בעיות

תנאי התחרות פורטו בחוברות מס' 1 ו-2. את הפתרונות יש לרשום בצורה ברורה (בדיו ולא צפוף מדי) ולפרטם ככל האפשר. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל. פתרון כל שאלה יש לרשום על דף לחוד (מצדו האחד של הדף) ולציין לידה את מספרה הסדורי. כמו כן יש לציין על כל דף את שם הפותר ואת מקום עודתו או למודיו (גם את שנת הלמודים שלו לפי 12 שנות למוד).

ההתרות של בעיות גליון זה צריכות להגיע למערכת לא יאוחר מ-1.1.1962.

כדי לאפשר גם לקוראים החדשים את ההשתתפות במחזור השני של התחרות המתמדת שהחל משאלה ת.61 - ת.75 בחוברת מס' 5 אנו דוחים את התאריך האחרון לקבלת פתרונות של שאלות אלה עד ל-5.11.1961.

<u>הערה:</u> הבעיות המצוינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט', י' בלבד (שנות הלמודים התשיעית והעשירית).

<u>ת.76*</u> (3 נקודות) (השוה בעיה ת.47 מחוברת מס' 4). נתונות n נקודות (א) במישור ((ב) במרחב) כך שאף שלש מהן אינן על ישר אחד. מחברים כל שתים מהן בקטע אדום או ירוק. מה מספר הנקודות המינימלי ההכרחי כדי שייוצר בשרטוט משולש (קדקדיו לאו דוקא מהנקודות הנתונות!) אשר כל צלעותיו בנות צבע אחד?

ת. *77 (3 נקודות) בנה משולש ABC לפי המשולש AMO, בהיות M האמצע של BC ו- O צומת הגבהים של $\triangle$ ABC . (הוצעה ע"י מיכה חפרי).

ת. 78 (4 נקודות) אברה הראשון של סדרה הוא 3 וכל אחד מאבריה הבאים קטן ב-2 מרבוע האבר הקודם לו. מצא דרך קלה לבדיקה אם האבר החמישי $a_5 = 4870847$ הוא מספר ראשוני. (הוצעה ע"י צבי דרזנר).

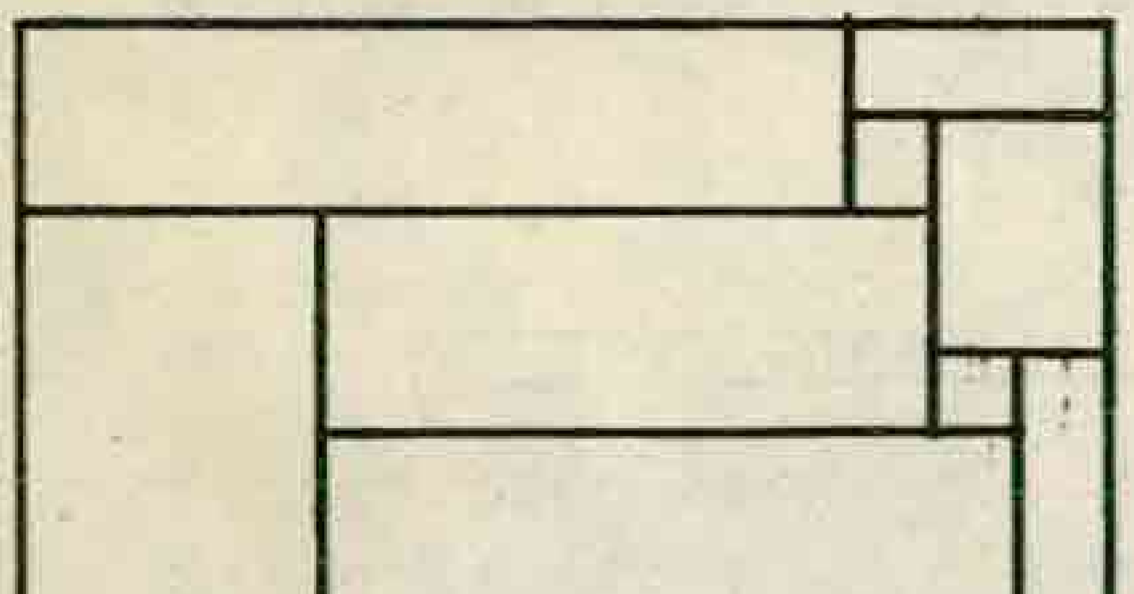
ת. *79 (2 נקודות) אדם קנה מספר בלתי זוגי של ספרים במחיר 10 ל"י הספר ונוסף לכך קנה אטלס שמחירו קטן מ-10 ל"י. הסכום הכולל ששלם היה רבוע שלם. מה מחיר האטלס?

ת. 80 (3 נקודות) הוכח שאם a , b ו- c הם בהתאמה ארכי הנצבים והיתר במשולש ישר זוית אזי

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a . \log_{c-b} a$$

ת. *81 (3 נקודות) תערובת שני נוזלים, שמשקליהם הסגוליים בהתאמה $1,2 \frac{g}{cm^3}$ $1,6 \frac{g}{cm^3}$ שוקלת 60 ג'. כמה ג' מכל נוזל מכילה ההערובת אם 8 סמ"ק מתוכה שוים במשקל לכל הכהל הקל שהיא מכילה.

ת. *82 (5 נקודות) המלבן שבציור הבא מחולק לתשעה רבועים (הנראים בציור כמלבנים בגלל עוות המדות). צלעות הרבועים נמדדות במספרים שלמים שאין להם מחלק משותף (מחלק משותף לכולם!) מצא את צלעות הרבועים.



ת. 83 (3 נקודות) פתור את המשואה

$$2^{2x+2} - 9.10^x = 4.25^{x+1}$$

(הוצעה ע"י יגאל פולקמן)

ת. 84 (3 נקודות) כדור משיק לכל שנים-עשר מקצועות קוביה שנפחה V . מצא את נפח חלק הכדור הנמצא בתוך התיבה.

ת. *85 (2 נקודות) יהיו x ו- y מספרים שלמים. הוכח כי x^2+y^2 מתחלק ב-7 אם ורק אם x מתחלק ב-7 ו-y מתחלק ב-7.

ת. *86 (3 נקודות) הוכח כי ערך הבטוי

$$\big|\,|x-y| + x + y - 2z\big| + |x - y| + x + y + 2z$$

אינו משתנה אם מחליפים את x , y ו- z ביניהם.

ת.87 (4 נקודות) נתון $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$

הוכח כי ישנם שני מספרים מתוך a , b ו-c כך שסכומם שוה אפס.

ת.88 (4 נקודות) פתור את המשואה

$$2\cos^2 x = \sqrt{\sin^2 x - 16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x+\cos^2 x}$$

ת.89 (5 נקודות) התר את המשואה

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$$

ת.90* (4 נקודות) הוכח: תנאי הכרחי ומספיק לכך שמספר בן שלוש ספרות אשר סכום ספרותיו שוה 7 יתחלק ב-7 הוא שספרת העשרות תשוה לספרת היחידות.

תוצאות המחזור הראשון של התחרות המתמדת להתרת בעירת (שאלות ת.1-ת.60)

1.	לובזנס דניאל	י"א "חוגים" חיפה	166 נק.
2.	דרזנר צבי	י"ב תיכון עירוני ה' תל-אביב	162 נק.
3.	קודמא אילן	י"ב הריאלי, חיפה	148 נק.
4.	פולקמן יגאל	י"ב הריאלי, חיפה	144 נק.
5.	קם צבי	י"ב הריאלי, חיפה	141 נק.

חמישה המצטיינים בין תלמידי הכתות ט' - י'.

1.	גינגולד אריה	י'	הריאלי חיפה	105 נק.
2.	סחוי יונתן	ט'	הריאלי חיפה	95 נק.
3.	לוי אליהו	ט'	הריאלי חיפה	89 נק.
4.	זלסקין מיכאל	י'	הריאלי חיפה	62 נק.
5.	עקביה גדעון	ט'	הריאלי חיפה	50 נק.

אלוף מחזור זה הוא לובזנס דניאל.

שנים הראשונים בכל קבוצה יקבלו פרסי ספרים שישלחו להם לפי כתובותיהם הפרטיות.

שאר ששת המצטיינים יקבלו בתור פרס התימה שנתית ל"גליונות מתמטיקה".

כל עשרת המצטיינים יקבלו תעודות מתאימות מטעם המערכת.

רשימת פותרי השאלות מס' ת.46-ת.60

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגרים רשום מספר הנקודות שצבר כל פותר מתוך השאלות ת.46-ת.60.

1. אורבך אברהם, י"א"מעלה", ירושלים. 59,56,55,54,52,50,49*,48,46 (24נק.)
2. גברון אביגדור, י"ב עירוני ט', ת"א. 59,58,56,55,54,49,48,46 (24 נק.)
3. גינגולד אריה, הריאלי, חיפה. *60,59,*58,56,*55,54,*52,50,49,48,46
4. גרוס ראובן, י"א אלוני יצחק. ,55,54,*53,*52,*49,48,46 (30 נק.)
*60,*59,58,*56 (27 נק.)
5. גוט משה, י"ב עירוני ב', ת"א. 59,58א,56,55,54,52,46 (18 נק.)
6. דרזנר צבי, י"ב תיכון עירוני ה' ה"א. 60-58 ,56-46 (46 נק.)
7. זלטקין מיכאל, י' הריאלי, חיפה. *60,*59,58,55,54,50,49,48,46 (28נק.)
8. חן אהוד, ט' הריאלי, חיפה. 59,56,54,47,46 (14 נק.)
9. חפרי מיכה, קורס א', הטכניון. 60,59,58,56,55,54,52,49,48,46 (32 נק.)
10. לביא נתן, י' התיכון, ירושלים. *60,58,55,53,52,47,46 (20 נק.)
11. לובזנס דניאל, י"א "חוגים", חיפה. ,55,54,53,52,51,*50,49,48,47
60,59,58,56 (43 נק.)
12. לוי אליהו, ט' הריאלי, חיפה. 60,59,58,56,55,54,*53,52,49,48,46, (34נק.)
13. מימן אורי, ט' הריאלי חיפה. 56,55,54,52,47,46 (13 נק.)
14. סתוי יונתן, ט' הריאלי, חיפה. 60-58,56-54,52-46 (41 נק.)
15. פוטשניק צבי, י"א "חוגים", חיפה. 58ב',56,*55,52,*49;48,46 (15 נק.)
16. פולקמן יגאל, י"ב הריאלי, חיפה. 59,58,56,55,54,52,51,49,48,47,46 (34נק.)
17. פינקלשטין אורי, י"א הריאלי, חיפה. ,58,56,55,54,52,49,48,47,46
60,59 (35 נק.)
18. פינקלשטין דן, י"א הריאלי, חיפה. 59,58,56,55,54,52,49,48,47,46
60 (35 נק.)
19. פרגון עמנואל, י"א הריאלי, חיפה. 58,56,55,52,49,47,46 (22 נק')
20. פרדיקס יעל, י"א הריאלי, חיפה. 60,59,58,56,55,54,53,52,48,47,46 (32נק.)
21. פרידלנד שמואל, י' הריאלי, חיפה. 56,55,54,52,51,49,48,47,46 (24 נק).
22. עקביה גדעון, ט' ההיאלי, חיפה. 59,58,56,54,52,49,47,46 (27 נק.)
23. קוזמא אילן, י"ב הריאלי, חיפה. 58,56,54,52,51,49,48,47,46 (28 נק.)
24. קם צבי, י"ב הריאלי, חיפה. 60,59,58,56,55,54,52,50,49,48,47,46 (39נק.)
25. קריב עודד, י"א עירונית ה', ת"א. 60,59,58,56,55,54,52,51,49-46 (35נק.)
26. רזניק שמואל, י"א תיכון עירוני ט', ת"א. 59,56,54,49,48,46 (17 נק.)
27. שהרן שלח, י"א תיכון חדש, ת"א 60-58,56-54,*52,51,*50,49-46 (39 נק.)
28. שילר איתן, קבוץ מענית (כתה?) 60-58,55-52,*51,50-46 (36 נק.)
29. שלם אברהם, י"א "חוגים", חיפה 56,54,46 (7 נק.)

התכן

הציורים בוצעו במחלקה לשרטוט ותכנון של בית הספר המקצועי ע״י הטכניון
בהדרכתו של מר **א. הריש**

כתובת המערכת:

א. גינזבורג, המחלקה למתמטיקה, הטכניון, חיפה.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל״י.

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.