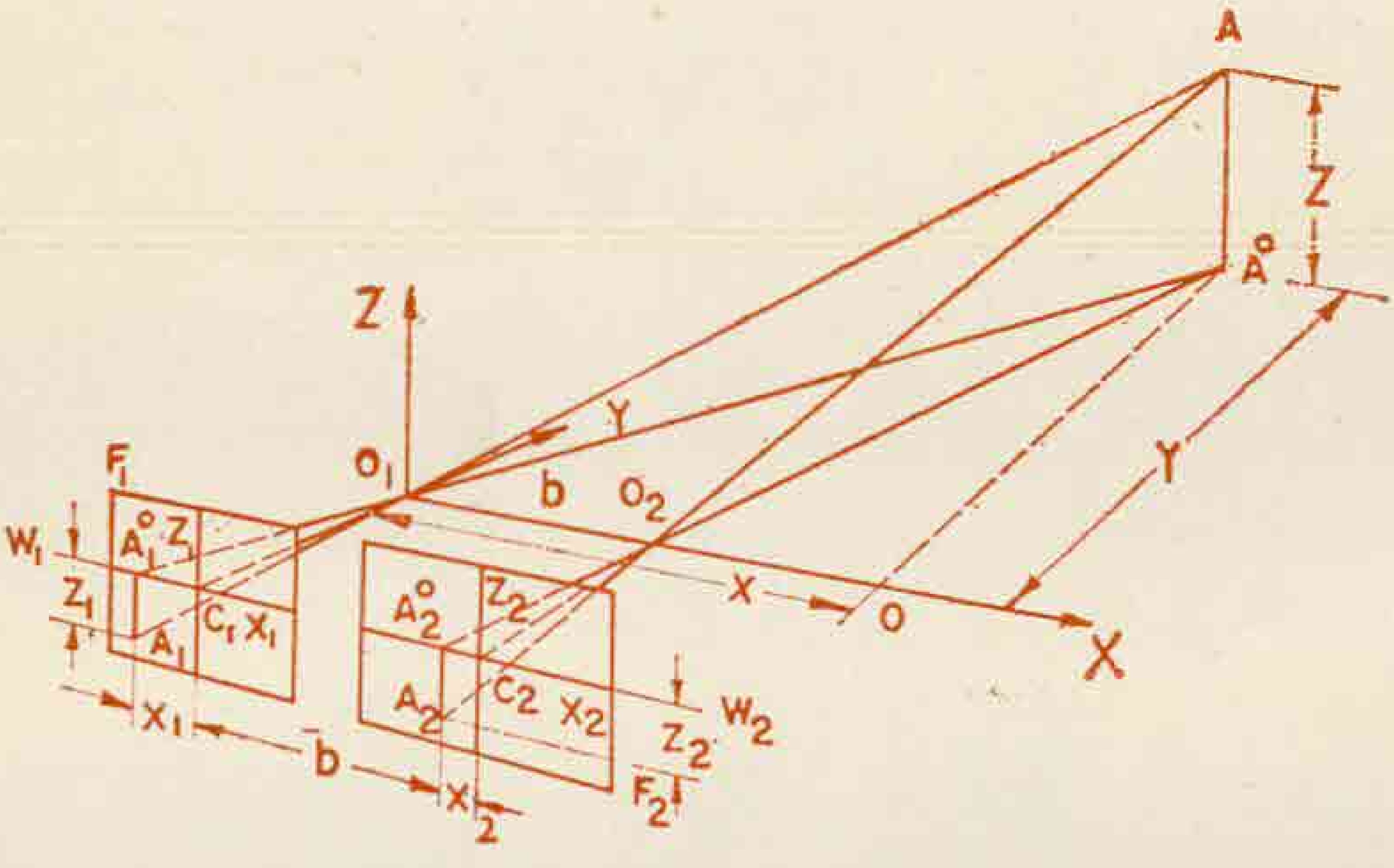
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 1 | חיפה, אייר תשכ"ב — מאי 1962 | מס' 8

יוצא לאור בחסות
ה"אגוד למתמטיקה בישראל"

מ ה מ ע ר כ ת

עברו שנתיים מאז הופיעה חוברת מס׳ 1 של "גליונות מתמטיקה". החוברת הנוכחית מסיימת את הכרך הראשון של העתון.

בתור סיכום בינים אפשר לציין שהעתון השתרש בחוגים אחדים של הנוער הלומד וגם מספר מסוים של חובבים נמנה על קוראיו הקבועים. יחד עם זה מצער הדבר ששכבות רחבות של תלמידי בתי ספר תיכוניים ותיכוניים מקצועיים עדיין לא גילו את ה"גליונות", אשר יכולים ללא ספק לתרום רבות לטפוח ההתענינות במתמטיקה בין הלומדים.

אנו תקוה שבשנת הלמודים הבאה יתרחב בהרבה חוג הקוראים של "גליונות מתמטיקה" והמערכת תהנה גם מיתר שתוף פעולה מצידם.

בגליון זה מסתיים המחזור השני של התחרות המתמדת להתרת בעיות. התוצאות יפורסמו בחוברת השניה של הכרך השני. עם הופעת החוברת הראשונה של הכרך השני יתחיל המחזור השלישי של התחרות.

אנו שמחים להודיע שלעתוננו יש כבר אח צעיר ושמו "גליונות לחשבון", הוצאה זו ערוכה ע"י חבר המערכת שלנו ש. אביטל ומיועדת בעיקר לכתות ז׳ ו-ח׳ של בית ספר יסודי וכתות א׳ של בית הספר התיכון (שנת הלמודים התשיעית) . עד כאן הופיעו 2 חוברות והן נתקבלו באהדה ע"י המורים והתלמידים גם יחד.

המעונינים ב"גליונות לחשבון" יוכלו להזמינם לפי הכתובת ת.ד. 4671, חיפה. המחיר הוא 25 אג׳ בהזמנה בודדת ו-20 אג׳ בהזמנה שלמעלה מ-20 חוברות. למחיר יש לצרף את דמי המשלוח.

בהזדמנות זו אנו מאחלים לקוראינו שבשמיניות הצלחה בבחינות הבגרות ולכל קוראינו חופש נעים.

בעיה ופתרונה

התחרות של שאלות אלה נמצאות בעמוד 237 . בטרם תפנה לשם נסה את כוחך.

(שתי הבעיות הבאות לקוחות מספרו של ו. שרפינסקי "על 100 בעיות פשוטות, אך קשות באריתמטיקה").

1. הסדרה החשבונית הידועה הארוכה ביותר הבנויה ממספרים ראשוניים מכילה 12 אברים. המספר הראשון בסדרה זו הוא 23143 והפרשה הוא 30030 (סידרה זו נתגלתה ע"י ו.א. גולוביב).

לא ידוע, אם קיימות סדרות כנ"ל באורך כלשהו.

הוכח, שאם קיימת סידרה חשבונית בת 100 אברים, שכלם מספרים ראשוניים שונים, הרי כל המספרים בסידרה זו פרט אולי לראשון צריכים להיות מורכבים לפחות מכמה עשרות ספרות.

2. קיימת השערה של ו. שרפינסקי שכל מספר שלם אפשר לתאר באינסוף אופנים בצורה $x^3 + y^3 - z^3 - t^3$, כאשר x, y, z, t הם מספרים טבעיים.

השערה זו הוכחה עבור כל המספרים הטבעיים הקטנים או שוים ל-350 פרט ל-148 ו-284 וגם עבור אינסוף מספרים אחרים.

לעומת זאת ידוע:

א) קיימים אינסוף מספרים טבעיים שאינם סכומים של שלש חזקות שלישיות של מספרים שלמים.

ב) כל מספר שלם אפשר באינסוף אופנים לתאר כסכום החזקות השלישיות של חמישה מספרים שלמים.

הוכח משפטים אלה.

תקון טעות.

בשאלה מס' 1 במדור "בעיה ופתרונה" שבחוברת מס' 7 (עמ' 195) נפלע טעות. השאלה היא:

הוכח ש-$n^2 + 8n + 5$ אינו מתחלק ב- 121 עבור אף n טבעי.

הפתרון שבעמ' 203 נשאר ללא שנוי.

שנה "מתהפכת"

השנה 1961 מצטיינת בכך שאם נסובב את העמוד ב- 180° סביב מרכז הסימטריה שלו נמצא ש"השנה לא השתנתה". מהי השנה הקרובה ביותר שעבורה דבר זה יקרה שנית?

על בעיות אחדות בג'יאומטריה אלמנטרית

פ. ארדש

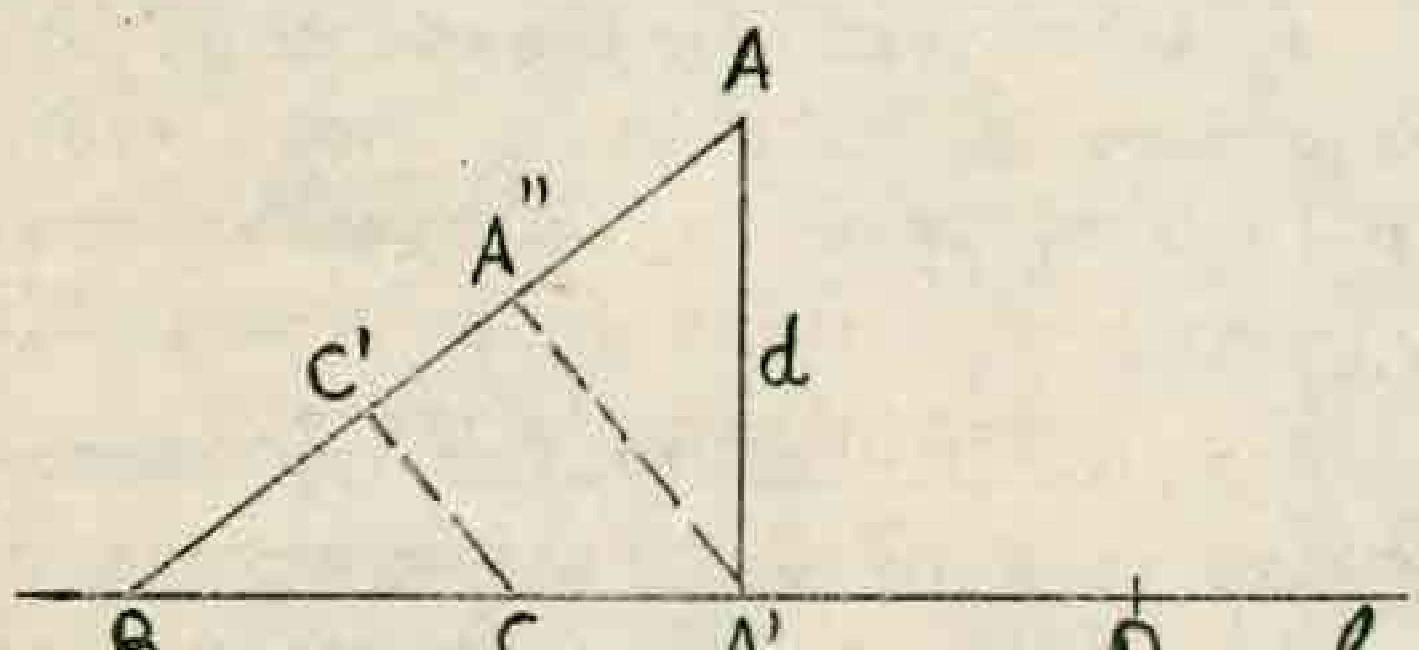
במאמר זה על ג'יאומטריה אלמנטרית נטפל במספר בעיות פתורות ונזכיר בעיות פתוחות אחדות. מקוה אני לשכנע את הקורא בכך כי גם בג'יאומטריה אלמנטרית, מקצוע בו עוסקים זה אלפי שנים, אפשר עדיין למצוא בעיות רבות חדשות הנתנות לפתרון באמצעים פשוטים למדי.

ב-1933 כשקראתי את ספרם של Hilbert *), Cohn-Vossen "Geometry and Imagination" התעוררה אצלי הבעיה הבאה: בהנתן n נקודות במישור, לא כלן על ישר אחד, האם קיים תמיד ישר העובר דרך שתיים מהן בדיוק?

למרות שהדבר נראה פשוט ביותר לא הצלחתי להתירו. ספרתי על הבעיה למתמטיקאי ההונגרי T. Gallai שמצא פתרון נאה לבעיה.

בשנת 1936 בקונגרס המתימטי באוסלו הוזכרה בעיה זו ע"י המתמטיקאי היוגוסלבי פרופ' Karamatar. הוא מצא משפט זה מנוסח ללא הוכחה בספר מכניקה ישן והתקשה להוכיחו בעצמו. ב-1943 פרסמתי שאלה זו במדור השאלות של American Math. Monthly ונתקבלו פתרונות שונים. היפה שביניהם הוא פתרונו של המתמטיקאי האמריקאי A. Kelly הנתון להלן:

נניח כי קיים סידור מישורי של n נקודות, לא כלן על ישר אחד, ובכל זאת אין אף ישר אחד העובר בדיוק דרך שתי נקודות, כלומר כל ישר העובר דרך שתי נקודות חייב להכיל גם נקודה שלישית. נתבונן באוסף הישרים המוגדרים ע"י כל n הנקודות ובמרחקים של כל אחת מהנקודות אל אחד מהישרים. בקבוצת מרחקים זו קיים בהכרח מרחק מינימלי d המתקבל למשל בין הנקודה A והישר ℓ מסוימים. (ראה ציור מס' 1) ישר ℓ הוא אחד מהישרים המחברים נקודות, לכן נמצאות עליו לפי ההנחה לפחות שלש נקודות. לא ייתכן כי שתיים מהן תמצאנה מצדו האחד של עקב האנך AA' על ℓ, שכן אם B ו- C הן במצב כזה נעביר את הישר AB והאנך CC' קטן מ- $AA'=d$ בנגוד להנחתנו כי d הוא הקטן במרחקים בין נקודה לישר בקבוצת הנקודות והישרים שלנו.



ציור מס' 1

---

*) D. Hilbert (1862-1943) אחד המתמטיקאים הגדולים של התקופה האחרונה. עבד בעיקרו בגטינגן שבגרמניה.

באותו אופן לא ייתכן כי תמצאנה שתי נקודות מצדו השני של העקב.
האפשרות הנותרת היא כי נקודה אחת תתלכד עם הנקודה A' ושתי הנקודות
האחרות תמצאנה משתי צידיה. אך גם אז עדיין $d < A'A''$ בנגוד למינימליות
של d.

קבלנו סתירה להנחתנו וז.א. שהישר בעל המרחק המינימלי עובר דרך
שתי נקודות משני צידי העקב.

Kelly הצביע גם על מקור השאלה. ב-1893 פרסם אותה המתמטיקאי
היהודי Sylvester (המיסד של עתון מתמטי אמריקאי ראשון) ב-Educational
Times (שאלה 11851 כרך 59 עמ' 98) אך לא נתקבל כל פתרון, וגם לא
ידוע, אם סילבסטר ידע את הפתרון. משפט זה ידוע, איפוא, בשם משפט
גאלאי.

נציין שהוכחת Kelly הופיעה גם בעבודתו של Coxeter ב-American
Math. Monthly (כרך 55 עמ' 26-28).

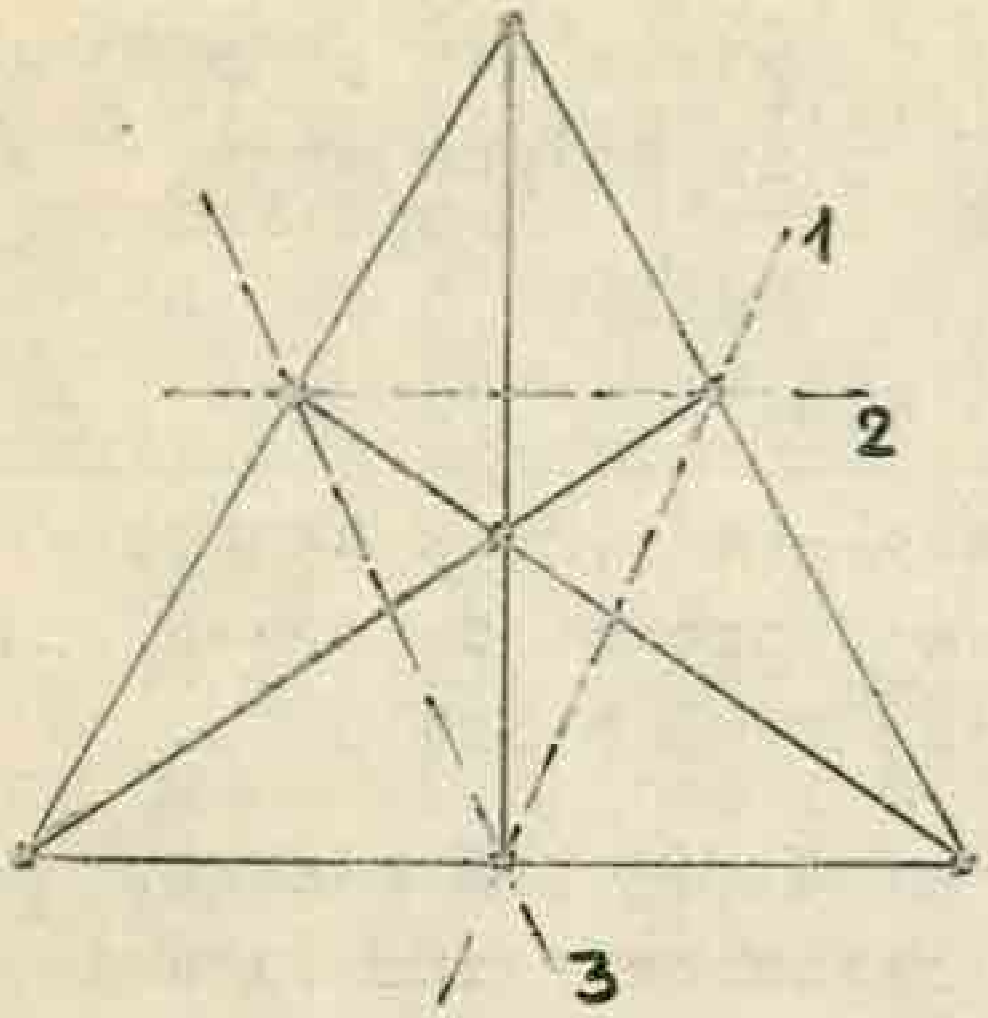
ב-1949 הכרתי את המתמטיקאי הישראלי מוצקין העובד כעת בארה"ב.
התברר שהוא נתקל בשאלה זו ב-1933 והמתמטיקאי א. רובינזון (כעת פרופסור
באוניברסיטה העברית) מצא פתרונה ב-1939.

בעקבות בעיה זו מתעוררות שאלות נוספות כגון: תהינה נתונות $n > 2$
נקודות במישור, לא כלן על ישר אחד. ישר נקרא <u>ישר רגיל</u>, כאשר הוא עובר
דרך שתי נקודות בדיוק. לפי משפט גאלאי קיים לפחות ישר רגיל אחד.
אפשר גם לתאר מצב כללי ביותר בו אף שלש נקודות אינן נמצאות על ישר
אחד ואז יהיה מספר הישרים הרגילים $\binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$. אם תמצאנא $n-1$
נקודות על ישר אחד והאחרונה מחוצה לו קיימים בדיוק $n-1$ ישרים רגילים.

נסמן ב- $f(n)$ את המספר המינימלי של ישרים רגילים שאפשר לקבל
בסידור כל שהוא של n נקודות. המתמטיקאי ההולנדי de Bruijn
ואני שערנו כי $f(n) \to \infty$ כאשר $n \to \infty$. כלומר לכל A גדול כרצוננו
אפשר למצא מספר n_0 כך שלכל n נקודות במישור שלא כלן נמצאות על ישר
אחד ושמספרן גדול מ- n_0 (ז.א. $n > n_0$) מספר הישרים הרגילים מקיים
$f(n) > A$.

המתמטיקאי האנגלי G. Dirac הראה כי $f(n) \geqslant 3$. עבור $n=3$
ו-$n=7$ מקבלים שויון: $f(n)=3$. (עבור $n=7$ השוה את הציור מס' 2
בו הקוים הרגילים צוינו במקווקו).

מוצקין הוכיח כי $f(n) > \sqrt{n}$ ובזה אימת את השערתנו. לאחרונה הצליחו
Kelly ו-Moser להוכיח כי $f(n) \geqslant \frac{3}{7}n$. גם כאן מתקיים שויון עבור $n=7$.
יתכן שאפשר לשפר תוצאה זו ל-n גדולים יותר. קיימת, למשל, ההשערה כי
קיים n_0 כזה שעבור כל $n > n_0$ מתקיים $f(n)=n-1$. Dirac שיער שעבור
$n > 7$ קיים $f(n) > \frac{n}{2}$.



ציור מס' 2

בשנת 1933 הבחנתי כי ממשפט גלאי נובעת גם התוצאה הבאה: n נקודות במישור, שלא כלן נמצאות על ישר אחד, מגדירות לפחות n ישרים. (אין לשפר תוצאה זו כפי שאפשר לראות מן המקרה כאשר $1-n$ נקודות נמצאות על ישר אחד).

שערתי גם שקיים n_0 (גדול למדי) שכל n נקודות במישור עם $n > n_0$ ומסודרות כך שאף $n-1$ מהן אינן על ישר אחד, מגדירות לפחות $2n-4$ ישרים.

עבור $n=7$ אין עדיין ההשערה נכונה כיון שבציור מס' 2 אפשר לספור רק 9 ישרים בשעה ש- $2n-4=10$ במקרה זה.

Kelly ו- Moser הוכיחו בעבודתם המוזכרת (ראה בסוף המאמר רשימת הספרות) את המשפט הכללי הבא:

נניח ש- n נקודות במישור מסודרות כך, שאין יותר מ- $n-k$ מהן נמצאות על ישר אחד וש-

$$n \geqslant \tfrac{1}{2}\left[3\,(3k-2)^2 + 3\,k - 1\right] \tag{1}$$

אזי מספר הישרים שהן מגדירות הוא לפחות

$$k\,n - \tfrac{1}{2}\,(3\,k + 2)\,(k - 1) \tag{2}$$

בסוף זה הוא ההערכה הטובה ביותר כפי שאפשר להיוכח בעזרת הדוגמה הכללית הבאה שנתנה ע"י המחברים:

תסודרנה k נקודות במישור כך שאין שלש מהן על ישר אחד. נסמן ב- ℓ ישר רצזני שאינו עובר דרך אף אחת מהן. נעביר את כל הישרים המחברים את k הנקודות ונגדיר $\binom{k}{2}$ נקודות נוספות כנקודות החיתוך של $\binom{k}{2}$ ישרים אלה עם הישר ℓ. אליהן נצרף עוד $n - k - \binom{k}{2}$ נקודות רצזניות על ℓ. בסך הכל יש לנו n נקודות, מהן לכל היותר $n-k$ נמצאות על ישר אחד (במקרה שלנו על ℓ). n הנקודות מגדירות

$$1 + k\,(n - k) - \binom{k}{2} = kn - \tfrac{1}{2}\,(\,3k + 2)\,(k - 1)$$

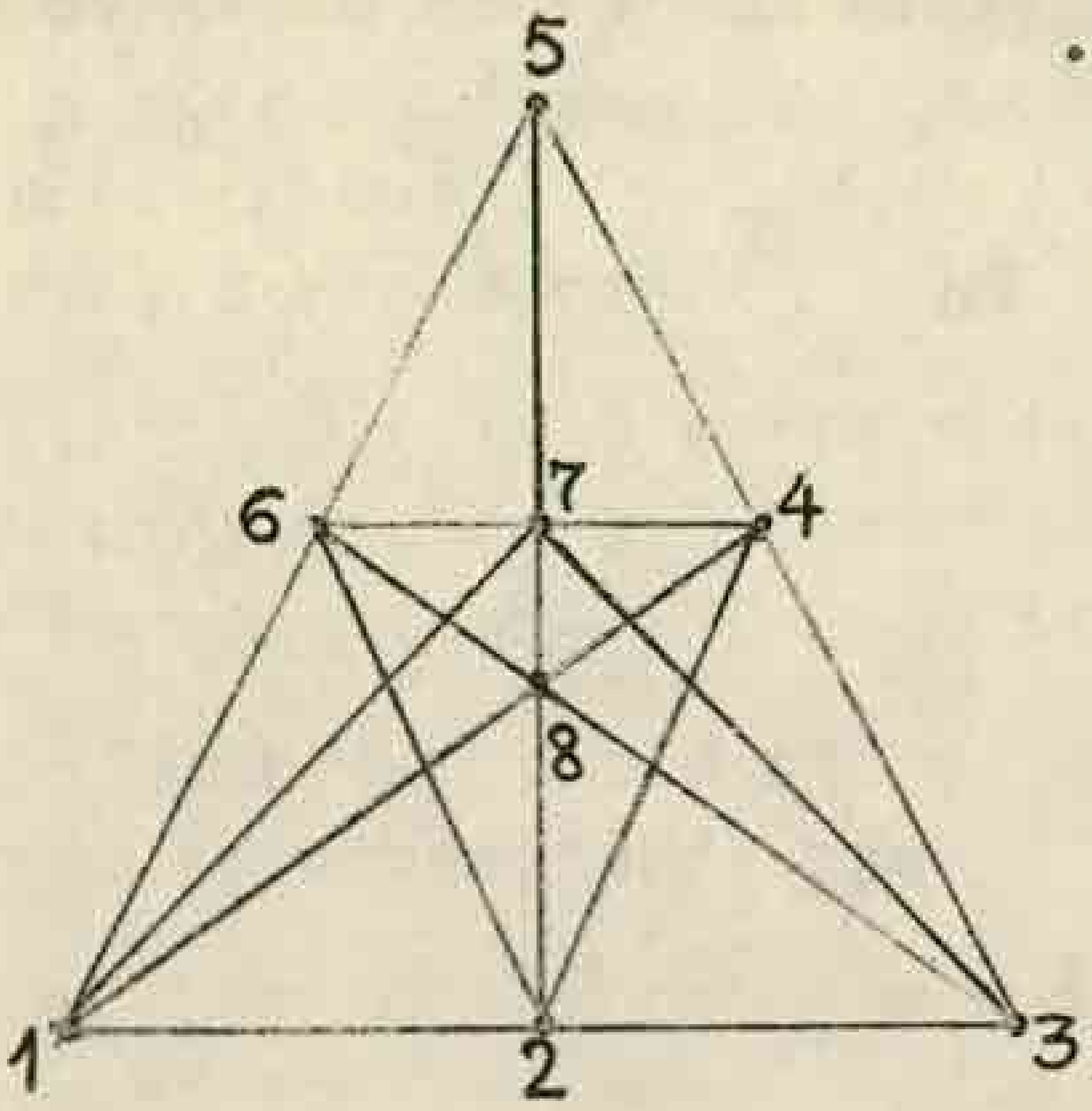
ישרים.

אם נציב $k=2$ נקבל כי עבור $n \geqslant \frac{1}{2}\left[3\,(6 - 2)^2 + 3.2 - 1\right] = 26\frac{1}{2}$

מספר הישרים הוא לפחות $2n - \frac{1}{2}\ (3.2 + 2)(2 - 1) = 2n - 4$
ז.א. השערתי מתקיימת עבור $n \geqslant 27$.

יתר על כן Kelly ו- Moser הוכיחו כי השערתי נכונה גם עבור $n = 10$ והם סבורים כי היא מתקיימת גם עבור $11 \leqslant n \leqslant 26$.

במקרים 9, 8, $n=7$ מקבלים לפחות $2n-5$ ישרים. זו גם התוצאה הטובה ביותר כפי שאפשר לראות עבור $n=7$ מציור מס' 2 עבור $n=8$ מציור מס' 3 ועבור $n=9$ מציור מס' 4.



ציור מס' 3

התוצאות של Kelly ו- Moser עדיין אינן ממצות את מכלול הבעיות הקשורות לנושא זה.

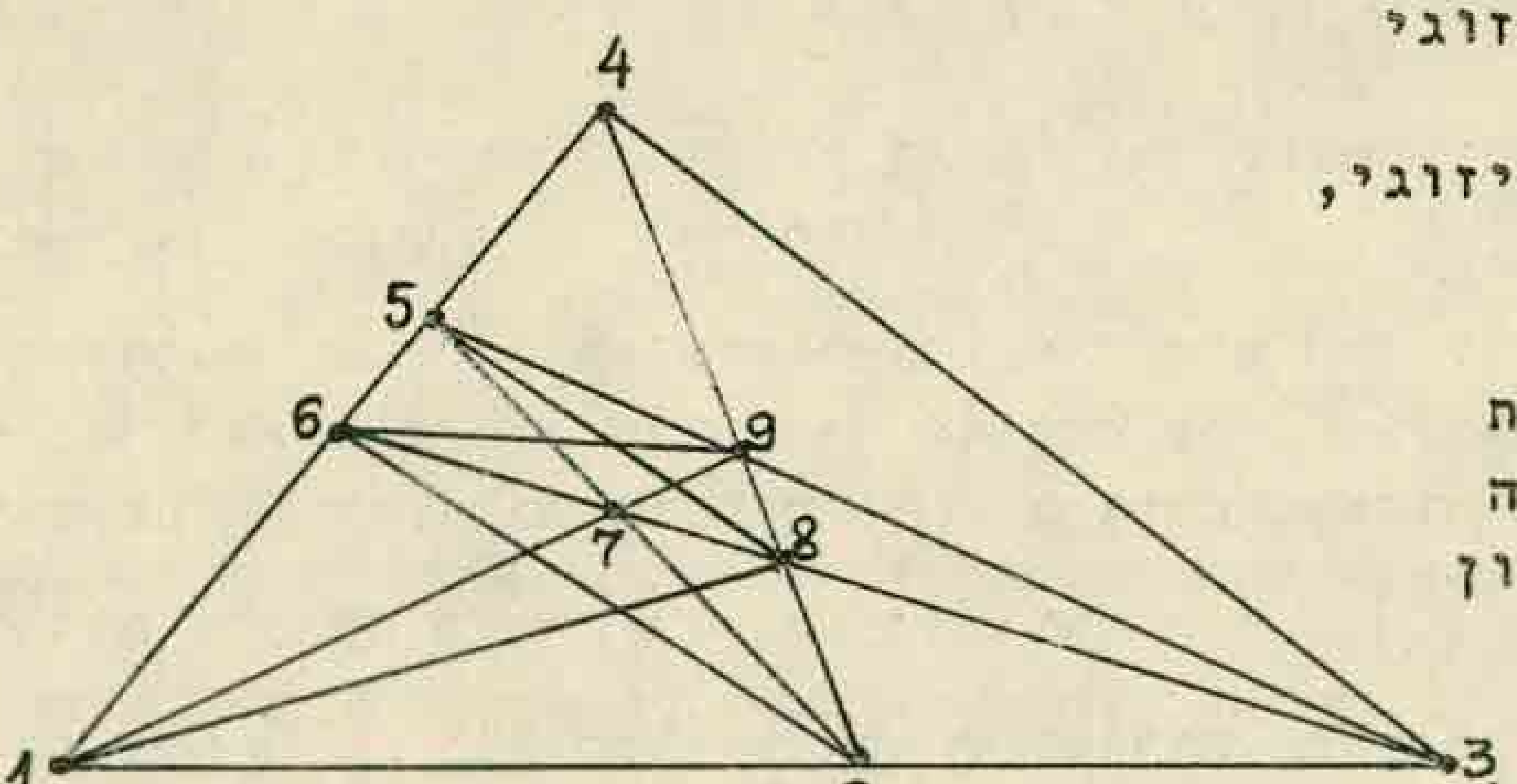
מועלית למשל ההשערה הבאה: קיים מספר קבוע C שאינו תלוי ב- n וב- k, כך ש- n נקודות במישור, שלכל היותר n-k מהן נמצאות על ישר אחד, מגדירות לפחות Cnk ישרים. (נראה שהשערה זו נכונה עבור $C = \frac{1}{10}$).

או השערתו של Dirac.:
בהינתן n נקודות במישור, לא כלן על ישר אחד, קיימת ביניהן נקודה אחת שממנה נמתחים אל שאר הנקודות

לפחות $\frac{n}{2}$ עבור n זוגי

ו- $\frac{n-1}{2}$ עבור n אי־זוגי,

ישרים שונים.



ציור מס' 4

נזכיר עוד את הבעיה הבאה שהוצגה ע"י סילבסטר: נתון סידור מישורי של n נקודות. מהו המספר המקסימלי של ישרים העוברים בדיוק דרך 3 נקודות.
סילבסטר הוכיח למשל שעבור $n=9$ יתכנו לכל היותר 10 ישרים.

ננסה עתה להכליל בעיות גיאומטריות - מישוריות אלה לבעיות קומבינטוריות.

ינתנו n אלמנטים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ו- m קבוצות חלקיות , A_1
$A_2, \ldots, A_m$ המורכבות מהם כך שכל אחת מכילה לפחות שני אלמנטים.
נתנה שכל זוג אלמנטים a_i, a_j מופיע ב- A_k אחד ובאחד בלבד.

כדוגמה למערכת כזו ישמשו הנקודות במישור והישרים המחברים אותן בהם דנו בבעיות הקודמות.

אך קיימות מערכות מסוג זה שאינן נתנות לממוש ע"י נקודות וישרים במישור, למשל, עבור $n=m=7$, מקבלים את המערכת

$$
\begin{array}{ccc}
a_1 & a_2 & a_3 \\
a_1 & a_5 & a_6 \\
a_1 & a_4 & a_7 \\
a_2 & a_4 & a_6 \\
a_2 & a_5 & a_7 \\
a_3 & a_4 & a_5 \\
a_3 & a_6 & a_7
\end{array}
$$

מערכת זו המקיימת את הדרישות הנ"ל אינה ניתנת למימוש במישור כי אין פה אף ישר רגיל בנגוד למשפט גאלאי.

כאן קיים המשפט הבא:

אם $m > 1$, הרי $m \geq n$

אם נמשיך לכנות אלמנטים מוכללים אלה בשם נקודות וקבוצות חלקיות שלהם בשם קוים, נוכל לנסח את המשפט בצורה הבאה:

בסידור בו אין כל הנקודות על קו אחד מספר הקוים אינו קטן ממספר הנקודות.

זוהי הרחבה מהותית של המשפט המישורי הטוען כי n נקודות שאינן על ישר אחד מגדירות לפחות n ישרים.

משפט זה הוכח לראשונה ב-1938 ע"י המתמטיקאי ח. חנני (כעת פרופסור בטכניון) ובאופן בלתי תלוי ב-1941 ע"י המתמטיקאי היהודי מהונגריה Szekeres .

ההוכחה הפשוטה ביותר של עובדה זו שייכת ל- de Bruijn והיא תובא להלן:

כל שתי נקודות a_{i_1} ו- a_{i_2} מגדירות קו יחיד A_i שהוא הקבוצה המכילה אותן, (קיימת רק אחת כזו).

ב-k_i נסמן את מספר הקוים העוברים דרך a_i וב s_j את מספר הנקודות הנמצאות על A_j . ברור כי $1 < k_i < n$ וכן $1 < s_j < n$ (לא כל הנקודות הן על קו אחד ועל כל קו יש לפחות שתי נקודות).

לא קשה להוכיח כי

$$\sum_{j=1}^{n} s_j = \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad (3)$$

(זה אפשר להראות בעזרת אינדוקציה לפי מספר הנקודות או ע"י חשוב ישיר).

אם אין הקו A_j עובר דרך הנקודה a_i חייב להתקיים

$$s_j \leqslant k_i \qquad (4)$$

כיון שאת הנקודה a_i אפשר לקשר לפחות ב s_j קוים שונים אל הנקודות שעל הישר s_j .

ללא אבדן כלליות אפשר להניח ש-

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} k_i = k_n = p \qquad (5)$$

ושהקוים $A_1, A_2, \dots, A_p$ עוברים כלם דרך a_n .

ברור כי $k_n > 1$ (לא כל הנקודות הן על קו אחד).

על כל קו כזה A_j $1 \leqslant j \leqslant p$ יש נקודה נוספת פרט ל-a_n ונסמנה ב- a_j . כיון שהקוים שונים לא תמצא a_j על A_k $j \neq k$ ולכן לפי (4):

$$s_2 \leqslant k_1 \ , \ s_3 \leqslant k_2 \ , \dots , \ s_p \leqslant k_{p-1}, \ s_1 \leqslant k_p \qquad (6)$$

ולכל $j > p$ אין A_j עובר דרך a_n ובודאי

$$s_j \leqslant k_n \qquad (7)$$

נניח, כי המשפט איננו נכון, כלומר $n > m$. נצרף יחד את (6) ו-(7) ונקבל:

$$\sum_{j=1}^{m} s_j \leqslant k_1 + \dots + k_p + (m-p)k_n < k_1 + \dots + k_p + (n-1)k_n \qquad (8)$$

וכיון ש-k_n היה המינימלי בין ה-k - ים הרי

$$\sum_{j=1}^{m} s_j < \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad (9)$$

בנגוד לשויון (3). סתירה זו מוכיחה את משפט חנני.

עבור n נקודות במישור שלא כלן על מעגל אחד, הוכיח מוצקין בעזרת שמוש במשפט גאלאי ושמוש באינורסיה *), שקיים מעגל העובר בדיוק דרך 3 נקודות מהן.

להלן הוכחתו:

תהיינה $p_1 , p_2 , \dots , p_n$ הנקודות. נקבע את p_1 כמרכז אינורסיה המעבירה את הנקודות $p_2, \dots , p_n$ לנקודות $q_2, \dots , q_n$. באינורסיה מכל מעגל העובר דרך המרכז (ז.א. דרך p_1 במקרה שלנו) מתקבל ישר. כיון שבתחילה לא היו כל $p_1, \dots , p_n$ נקודות מונחות על מעגל אחד לא תהיינה $q_2, \dots, q_n$ על ישר אחד. לפי משפט גאלאי קובעות נקודות אלה לפחות ישר אחד העובר בדיוק דרך 2 נקודות, נגיד דרך q_i , q_j . מזה נובע ש- p_i , p_j נמצאות על מעגל, שהוא מקור הישר העובר את q_i , q_j , ועובר דרך מרכז האינורסיה ז.א. דרך p_1 . בזה הוכח שישנו מעגל העובר דרך שלש נקודות בדיוק (p_1, p_i, p_j).

השאלה הבאה שהוצגה כבר לפני זמן רב ועדיין לא מצאה את פתרונה נראית לא קלה:

תנתנה n נקודות במישור, לא כלן על מעגל אחד. נתבונן באוסף כל המעגלים העוברים דרך 3 נקודות לפחות. האם נכונה ההשערה כי נקודות אלה מגדירות לפחות $1+\binom{n-1}{2}$ מעגלים שונים.

כאשר $n-1$ נקודות נמצאות על מעגל אחד נותנת השערה זו את המספר המדויק.

הכללה קומבינטורית של בעיה זו נתנת לנסוח הבא:

יהיו $a_1, a_2, \dots , a_n$ אלמנטים (שיכונו נקודות) ו- $A_1, \dots , A_m$ קבוצות חלקיות שלהם (שתכוננה מעגלים), המכילות כל אחת לפחות 3 אלמנטים, וכל שלישית נקודות נמצאת בדיוק על מעגל אחד.

השאלה היא מהו הערך המינימלי של m (מספר המעגלים המוגדרים ע"י n הנקודות).

במקרה של זוגות היו הפתרון הגיאומטרי והקומבינטורי זהים ונתנו $m_{min} = n$. במקרה זה נראה אבל שהערך המתקבל בפתרון הגיאומטרי קטן מזה של הפתרון הקומבינטורי.

חנני הוכיח כפתרון לבעיה הקומבינטורית כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_o כך שלכל $n > n_o$, מקיים ה-m המינימלי את אי השויון

---

*) על אינורסיה ראה "גליונות מתמטיקה" מס' 1 עמ' 13.

$$(9)\quad m_{min} > (1-\varepsilon)n^{\frac{3}{2}}.2^{-\frac{3}{4}}$$

הוכחתו עדיין לא פורסמה ולהלן נביא אותה:

ללא אבדן כלליות אפשר להניח כי A_1 מכיל k אלמנטים מתוך ה-n ואף A_i אינו מכיל יותר אלמנטים.

ברור שלכל היותר קיימות $\binom{n}{3}$ קבוצות חלקיות שונות.

אם ניחס לכל מעגל k נקודות ונספור את מספר הקבוצות החלקיות בנות שלשה אלמנטים על כל אחד מן המעגלים לחוד, הרי ספרנו כל שלישיה אפשרית שכן כל שלישיה נמצאת על מעגל מסוים.

יתכן והפרזנו בכך שספרנו k נקודות על כל מעגל, על כל פנים:

$$(10)\qquad m\binom{k}{3} \geqslant \binom{n}{3}$$

או

$$m \geqslant \frac{\binom{n}{3}}{\binom{k}{3}} > \frac{n^3}{k^3}$$

(כי עבור $n > k$ קיים $\left(\frac{n}{k} < \frac{n-1}{k-1} < \frac{n-2}{k-2}\right.$

יהיו $a_1, a_2, \dots, a_k$ האלמנטים של A_1 ו- $e_1, e_2, \dots, e_{\binom{k}{2}}$ $\binom{k}{2}$ הזוגות שאפשר ליצור מ- k אלמנטים אלה. נתבונן בשלישיות (e_i, a_j) כאשר $k+1 \leqslant j \leqslant n$, כלומר a_j אינו ב- A_1.

כל שלישיה כזו מופיעה ב-A_h $(h>1)$ אחד. אך A_h כזה אינו מכיל יותר מ-$k-2$ שלישיות כאלה כי אין בו יותר מ- k אלמנטים, מהם נמצאים כבר שניים ב- A_1.

קיימות, איפוא, לפחות $\left\{\frac{n-k}{k-2}\right\}$ (המספר השלם הראשון שאינו קטן מ-$\frac{n-k}{k-2}$) קבוצות A_j המכילות e_i נתון.

שני e_i שונים אינם יכולים להופיע ב-A_h אחד (פרט ל- A_1), כי אחרת היו לאותו A_h ול- A_1 שלשה אלמנטים משותפים. לכן מספר ה- A_h $(h\neq 1)$ השונים הוא לפחות $\left\{\frac{n-k}{k-2}\right\}\binom{k}{2}$ ומכאן נובע

$$(11)\quad m \geqslant 1+\binom{k}{2}\left\{\frac{n-k}{k-2}\right\} \geqslant 1+\binom{k}{2}\frac{n-k}{k-2} > \frac{k(n-k)}{2}$$

או לפי הערכת אחרת:

$$(12) \quad m \geqslant 1+\binom{k}{2} \left\{\frac{n-k}{k-2}\right\} \geqslant 1+\binom{k}{2}$$

מ-(10), (11) ו-(12) נובעת התוצאה (9) למקרים שונים של k.

כאשר $k \leqslant 2^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}}$ מתקבל מ-(10):

$$m > \frac{n^3}{k^3} \geqslant \frac{n^3}{2^{\frac{3}{4}} \; n^{\frac{3}{2}}} = n^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{4}}$$

אם $2^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}} < k < \frac{n}{2}$ מתקבל מ-(11).

$$m > \frac{k(n-k)}{2} > \frac{2^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}} (n-2^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}})}{2} = \frac{n^{3/2}}{2^{3/4}} - \frac{n}{2^{1/2}} > (1-\varepsilon) \frac{n^{3/2}}{2^{3/4}}$$

ניצלנו כאן את העובדה כי בתחום זה $k(n-k)$ עולה מונוטונית.
אי השיוון האחרון נכון החל מ- $n=n_0$ מסוים.

בתחום $k \geqslant \frac{n}{2}$ נשתמש ב-(12):

$$m > \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2} = \frac{n^2}{8} - \frac{n}{4} > (1-\varepsilon) \frac{n^{3/2}}{2^{3/4}}$$

אין השיוון האחרון מתקיים החל מ- $n=n_0$ מסוים.

בסך הכל (9) הוכח בכל המקרים.

חנני הוכיח עוד כי עבור $n=u^2+1$, כאשר u היא חזקה של מספר ראשוני מתקיים

$$(13) \qquad m \leqslant u\,(u^2+1)$$

והוא משער שבמקרה זה מתקיים שיוון ממש $m = u(u^2+1)$. מ-(9) ו-(13) אפשר להוכיח בעזרת תורת המספרים האנליטית כי סדר הגודל של m במקרה של הבעיה הקומבינטורית שוה ל- $n^{3/2}$. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כזה שעבור n - ים גדולים ממנו $(n > n_0)$ מתקיים:

$$(14) \qquad (1-\varepsilon)\, 2^{-\frac{3}{4}}\, n^{\frac{3}{2}} < m < (1+\varepsilon)\, 2^{-\frac{3}{4}}\, n^{\frac{3}{2}}$$

חלקו השמאלי של (14) הוכח לעיל, בחלקו הימני איננו יכולים לעסוק כאן. נעיר רק שהוא נובע מהמשפט הידוע שמנת שני מספרים ראשוניים עוקבים שואפת ל-1.

שאלה זו נתנת להכללה גם לקבוצות חלקיות בנות ℓ אברים לפחות ($\ell > 3$), אבל לא נעסוק בזה במאמר זה.

ספרות:

1. Th. Motzkin, The lines and planes connecting the points of a finite set.
Trans. of the Amer. Math. Soc. Vol. 70 (1951) pp. 451-464

מוצקין עשה גם הכללות של משפט גאלאי עבור מרחבים רב מימדיים.

2. L.M. Kelly and W.V.J. Moser, On the number of ordinary lines determined by n points,
Canadian Jour. of Math.
Vol. 10 (1958) pp. 210-219

רשימה מס' 1 של הקוראים שצברו לפחות 240 נקודות
בפתרון בעיות של התחרות המתמדת

1. דרזנר צבי — קורס א' מדעים טכניון, חיפה
2. לובזנס דניאל — י"ב "חוגים", חיפה
3. קריב עודד — י"ב עירוני ה' תל-אביב

רשימה מס' 2 של הקוראים שצברו לפחות 120 נקודות
בפתרון בעיות של התחרות המתמדת

13. זלטקין מיכאל — י"א "הריאלי", חיפה
14. פרידלנד שמואל — י"א "הריאלי", חיפה

בעיה ופתרונה - פתרונות

1. נוכיח שההפרש d של סידרה חשבונית עולה בת 100 אברים שכלם מספרים ראשוניים מתחלק בכל מספר ראשוני הקטן מ-100.

נסמן את אברי הסידרה ב-

$$a_1,\ a_2 = a_1 + d,\ \ldots,\ a_{100} = a_1 + 99d$$

יהא p מספר ראשוני כלשהו קטן מ-100.

נחלק כל אחד מהמספרים $a_1, a_2, \ldots a_p$ ב- p.

מקבלים:

$$a_i = ps_i + v_i \qquad i = 1, 2, \ldots p, \qquad 0 \leqslant v_i \leqslant p - 1$$

נוכיח שכל ה-v_i שונים מ- 0. ובאמת, אם a_1 מתחלק ב-p גם $a_{p+1} = a_1 + pd$ מתחלק ב-p בנגוד להנחה שהוא מספר ראשוני (אם $p < 100$ הרי $p + 1 \leqslant 100$).

נניח שקיים i $(2 \leqslant i \leqslant p)$ כזה שעבורו $v_i = 0$, כלומר $a_i = a_1 + (i-1)\,d$ מתחלק ב- p. אבל כל a_i $(i \geqslant 2)$, גדול מ-p כפי שאפשר לבדוק באופן ישיר. מספר גדול מ-p ומתחלק ב-p הוא מספר מורכב וזה נוגד את העובדה ש- a_i הוא ראשוני.

בזה הוכח שכל v_i שונים מ- 0.

אבל אז p השאריות v_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ יכולים לקבל רק $p-1$ ערכים $(1, 2, \ldots, p-1)$, כלומר שתיים מהן שוות בהכרח.

תהיינה אלה השאריות $v_i = v_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant p)$.

אזי

$$a_j - a_i = (s_j - s_i)\ p$$

מצד שני

$$a_j - a_i = [a_1 + (j - 1)\,d] - [a_1 + (i-1)\,d] = (j-i)\,d$$

ז.א.

$$(s_j - s_i)\ p = (j - i)\ d.$$

אם מספר ראשוני מחלק מכפלת שני מספרים הוא מוכרח לחלק לפחות אחד מהם. אבל $j - i < p$, כך ש- p מחלק את d. כמסקנה מהנ"ל מקבלים, שאם קיימת סידרה חשבונית המורכבת מ-100 מספרים ראשוניים, הפרשה d מתחלק ב-

$$P = 2.3.5.7.11.\ \ldots\ \cdot 89 \cdot 97$$

כלומר במכפלת כל המספרים הראשוניים הקטנים מ-100.

בין 10 ל-100 יש 21 מספרים ראשוניים כך שמקבלים:

$$P = 210 \cdot 11 \cdot 13 \ \ldots\ \cdot 97 > 210 \cdot 10^{21} > 10^{23}$$

מכאן שההפרש d צריך להיות מורכב לפחות מ-24 ספרות ואתו כל אבר של הסידרה פרט אולי לראשון.

2. א) נוכיח שחזקה שלישית של מספר שלם נותנת בחלוק ב-9 שארית 0, 1 או 8. ובאמת, כל מספר שלם n אפשר להציג באחת משלש הצורות הבאות $3t$, $3t+1$, $3t+2$ כאשר t הוא מספר שלם.

אם $n = 3t$ הרי $n^3 = 9 \cdot 3t^3$ והשארית היא 0

אם $n = 3t+1$ הרי $n^3 = 9(3t^3+3t^2+t) + 1$ והשארית היא 1

אם $n = 3t+2$ הרי $n^3 = 9(3t^3+6t^2+4t) + 8$ והשארית היא 8

קל לבדוק באופן ישיר שע"י חבור שלשה מספרים שלמים אשר בחלוק ב-9 נותנים שאריות מתוך המספרים 0, 1, 8, לא נוכל לקבל אף פעם מספר אשר בחלוקתו ב-9 נותן שארית 4 או 5. לכן אף מספר מהצורה $9k + 4$ או $9k + 5$ (k שלם) אינו ניתן לתאור כסכום של שלש חזקות שלישיות של מספרים שלמים.

ב) ראשית כל נוכיח שכל מספר שלם המתחלק ב-6 אפשר לתאר כסכום של 4 חזקות שלישיות של מספרים שלמים:

דבר זה נובע מהזהות הבאה:

$$6k = (k+1)^3 + (k-1)^3 + (-k)^3 + (-k)^3$$

בהמשך אפשר לבדוק ע"י פתיחת הסוגרים שכל אחד מהמספרים

$$6t - (6n)^3, \quad 6t + 1 - (6n+1)^3, \quad 6t + 2 - (6n + 2)^3,$$

$$6t + 3 - (6n+3)^3, \quad 6t+4 - (6n-2)^3, \quad 6t+5 - (6n - 1)^3$$

מתחלק ב-6. עבור כל זוג מספרים שלמים t ו-n.

כיון שכל מספר שלם אפשר לרשום בצורה $6t + i$ $(i=0,1,2,3,4,5)$ הרי המשפט הוכח.

להדגמה נניח שהמספר הנתון הוא מהצורה $6t + 4$. אזי המספר

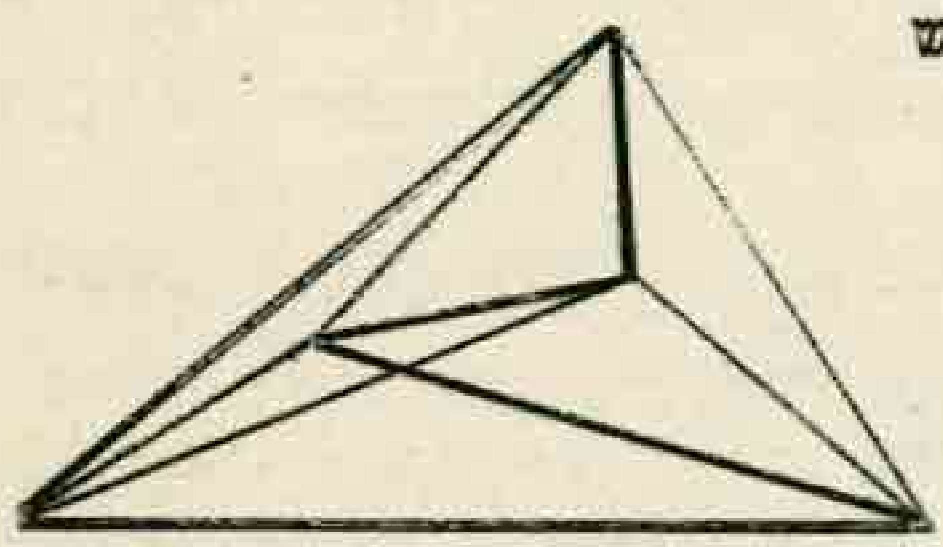
$$6t + 4 - (6n - 2)^3$$

(עבור כל n שלם) מתחלק ב-6 ז.א. ניתן לתאור כסכום של 4 חזקות שלישיות של מספרים שלמים. נעביר את $(6n - 2)^3$ ימינה ונקבל תאור המספר $6t+4$ כסכום של 5 חזקות שלישיות. ע"י שנוי n נוכל לקבל מספר רצוני של תאורים כאלה.

פתרון בעיות של התחרות המתמדת

להלן פתרונות השאלות ת. 76 - ת. 90.

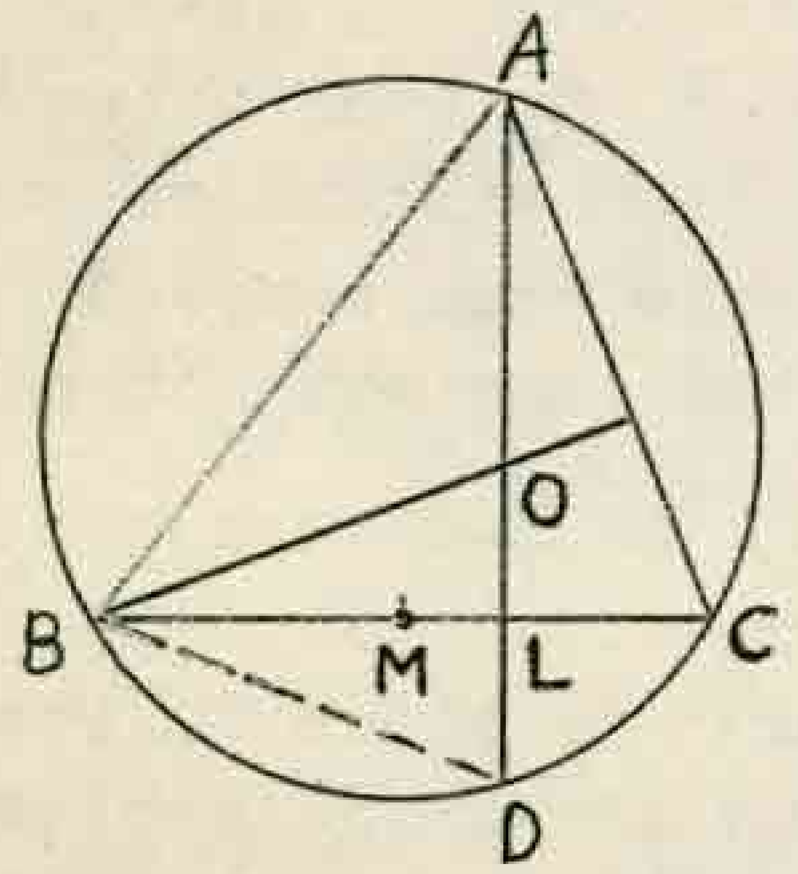
ת.76. (א) מ-ת.47 נובע כי שש נקודות מספיקות לכך שיופיע משולש חד-גוני. הכרחיותן של שש נקודות נובעת מהדוגמא הבאה, בה מופיעות חמש נקודות (במישור ללא כל משולש חד-גוני.



(ב) במרחב . מהדוגמא לעיל נובע כי מספר הנקודות הוא לפחות שש. אך מ-ת.47 נובע כי מספר זה מספיק.

מסקנה: הקלת התנאי ביחס ל-ת.47 אינה משנה את התשובה: שש נקודות.

ת.77. מספר פותרים העירו בצדק כי בעיה זו זהה עם ת.68. אולם בעקבות טעותנו נגיש בזה פתרון שונה מזה שהובא בת.68, ללא שמוש במשפט אוילר (לפי יוסף קרצמן).



נתוח: נחסום את $\triangle ABC$ במעגל ונמשיך את AO עד חתכו את BC ב- L ואת המעגל ב- D . $\sphericalangle CAL = \sphericalangle CBO$
(משלימות את C ל- 90°) ו- $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD$

מקבלים $\triangle BLO \cong \triangle BLD$

ומכאן: $LO = LD$

בניה: נמשיך את AO . נוריד עליו אנך מ-M שעקבו L . נקצה את D כך ש $LO = LD$. נציב ל-AD אנך אמצעי, וכמו כן אנך ל- ML בנקודה M . נקודת החתוך K תשמש מרכז המעגל החוסם. ההמשך ברור.

ת. 78. נתון: $(2)\ a_{n+1} = a_n^2 - 2;\ (1)\ a_1 = 3$

אם ל- a_n אחת משתי הצורות הבאות

$$(3)\ a_n = (x^2-2)m \pm x$$

נקבל לפי (2)

$$a_{n+1} = (x^2-2)^2m^2 \pm 2mx(x^2-2) + x^2-2 =$$
$$= (x^2-2)\left[(x^2-2)m^2 \pm 2mx + 1\right]$$

לכן עם ל- a_n הצורה (3) בהיות x ו-m שלמים יהיה $a_n + 1$ פריק.
לכן אם נצליח למצוא x ו- m שלמים כך של- a_4 תהיה הצורה (3) כלומר

$$a_4 = 2207 = (x^2-2)m \pm x$$

יתחלק a_5 ב- x^2-2 . נפנה לכך למשואה

$$mx^2 \pm x - 2m - 2207 = 0$$

(ראה המשך בדף 246).

פוטוגרמטריה - התהוותה ושמושיה (מאמר שני) *)

לואיזה בונפיליולי

הערכת מרחקים ע"י ראות סטראוסקופית נעשתה ועל מנת להקל על הבנת העקרון נסביר תחילה פרטים גאומטריים אחדים ואחר כך את המבנה של מכשיר פשוט וקטן המהווה דגם לכל המכשירים האחרים שהומצאו למטרה זו במשך הזמן. שם המכשיר: סטראומקרומטר, שמושו: דידקטי גרידה.

1. נסמן (ציור 9) ב- F_2,F_1 את שני הצלומים העומדים זה ליד זה כך ששני הישרים W_2,W_1 מהווים ישר אפקי אחד ושהמרחק בין C_2,C_1 שווה ל- b.

כמו כן נסמן ב- O_2,O_1 שני מרכזי העדשות המרוחקים מ- C_2, C_1 במרחק השווה ל-p. ברור שהקטע $O_2\ O_1$ מקביל ל- C_1C_2 ואורכו b.

על גבי כל צלום לחוד נקבע מערכת קואורדינטות כך שהישרים W_2,W_1 יהוו בהתאמה צירי האבסציסות x_1 ו- x_2 והנצבים להם דרך C_2,C_1 צירי האורדינטות z_1 ו-z_2. האות z במקום האות המקובלת y באה כדי להתאים את המערכות האלה למערכת המרחבית וקביעת המערכות z_1, x_1; z_2,x_2 נעשתה בכדי שבשעת הצורך נוכל למדוד את הקואורדינטות של נקודות מתאימות בשני הצלומים.

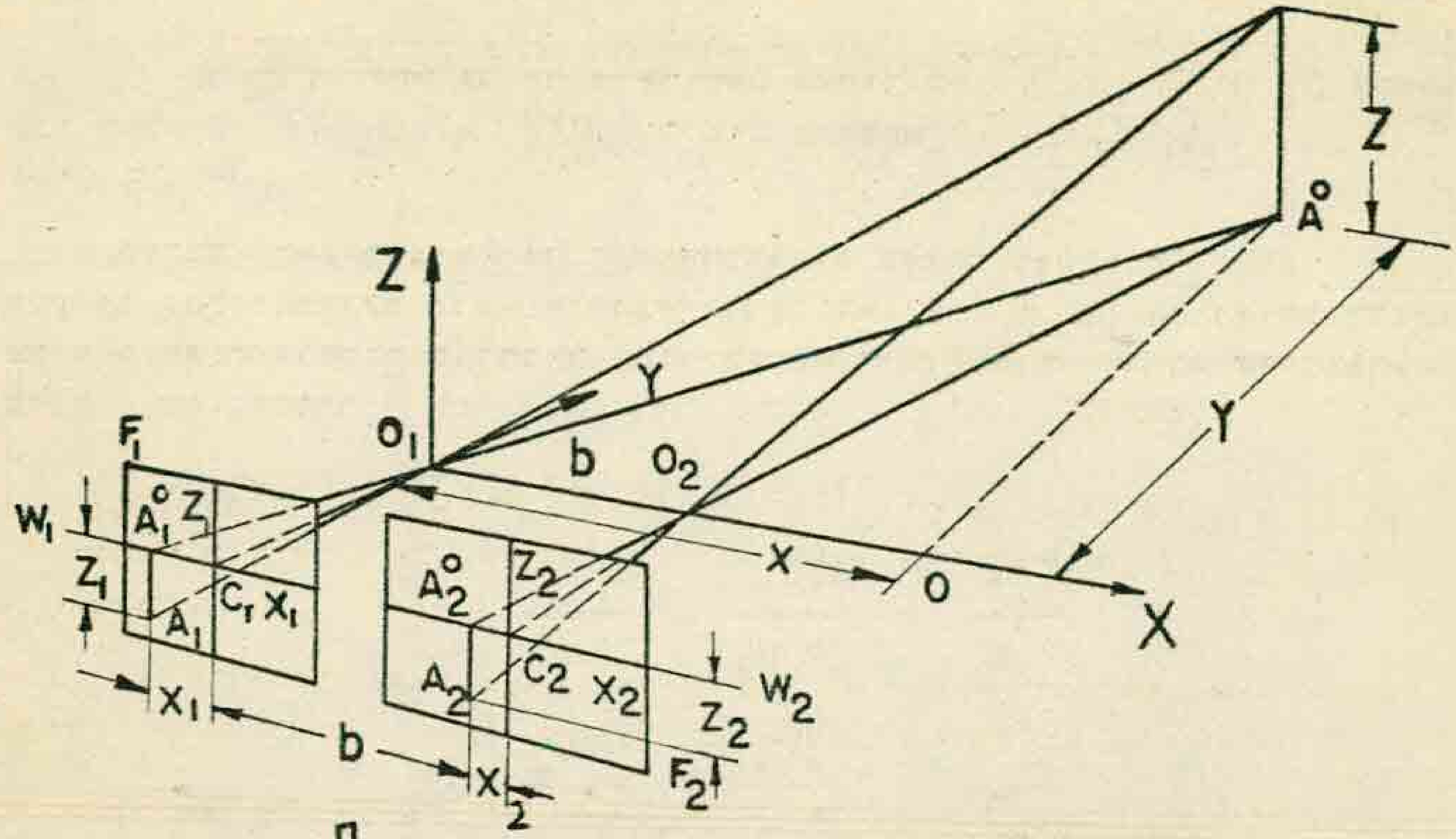
כעת נסמן ב-X, Y, Z שלושה צירי קואורדינטות מרחביים שלגביהם נמדוד את הקואורדינטות של נקודות מרחביות. מצב הצירים האלה הוא כדלקמן: X מזדהה עם הישר O_1O_2 ועל כן הוא מקביל לצירים x_2,x_1 של הצלומים; Y מזדהה עם האנך C_1O_1 לצלום F_1. מכיון ששני הצלומים מונחים במישור ורטיקלי אחד Y הוא אפקי ויחד עם X יוצר מישור אפקי XY. ציר Z נצב למישור XY ועל כן הוא ורטיקלי ומקביל לצירים z_2,z_1 של הצלומים.

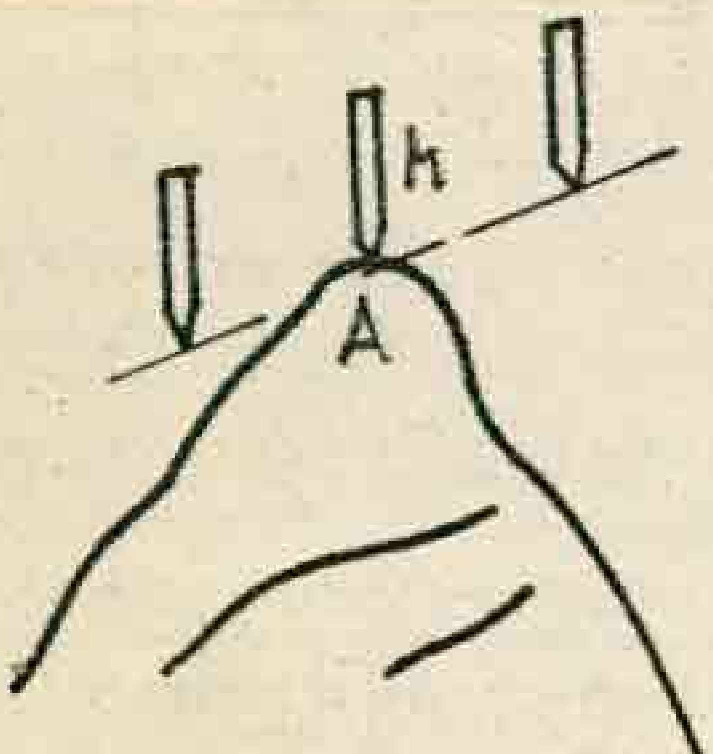
כעת נבחור בנקודה כל שהיא A^o המונחת במישור XY, נחבר אותה עם O_2,O_1 ונסמן ב- A_2, A^o_1 את התמ' הפר' (התמונות הפרספקטיביות) של A^o שהינן נקודות החתוך בין x_1, x_2 לבין הקרנים A^oO_1, A^oO_2.

נוסף לזה תהיה A נקודה הנמצאת על גבי אנך למישור XY (ועל כן מקביל ל- Z) העובר דרך A^o. שוב נסמן ב- A_1, A_2 את התמ' הפר' של A שהינן נקודות החתוך בין F_2,F_1 לבין הקרנים AO_1, AO_2.

שתי הקרנים AA_1, $A^oA^o_1$ נחתכות ב- O_1 ועל כן יוצרות מישור ורטיקלי (בהיותו כולל את האנך AA^o). מישור זה חותך את הלוח F_1, אף הוא ורטיקלי, לפי קטע ורטיקלי $A^o_1A_1$ המקביל על כן ל- z_1. באותו אופן הקטע A_2A_2 מקביל ל- z_2. מכאן נובע שהמשולשים O_1AA^o, $O_1A_1A^o_1$ דומים זה לזה וכמו כן המשלשים

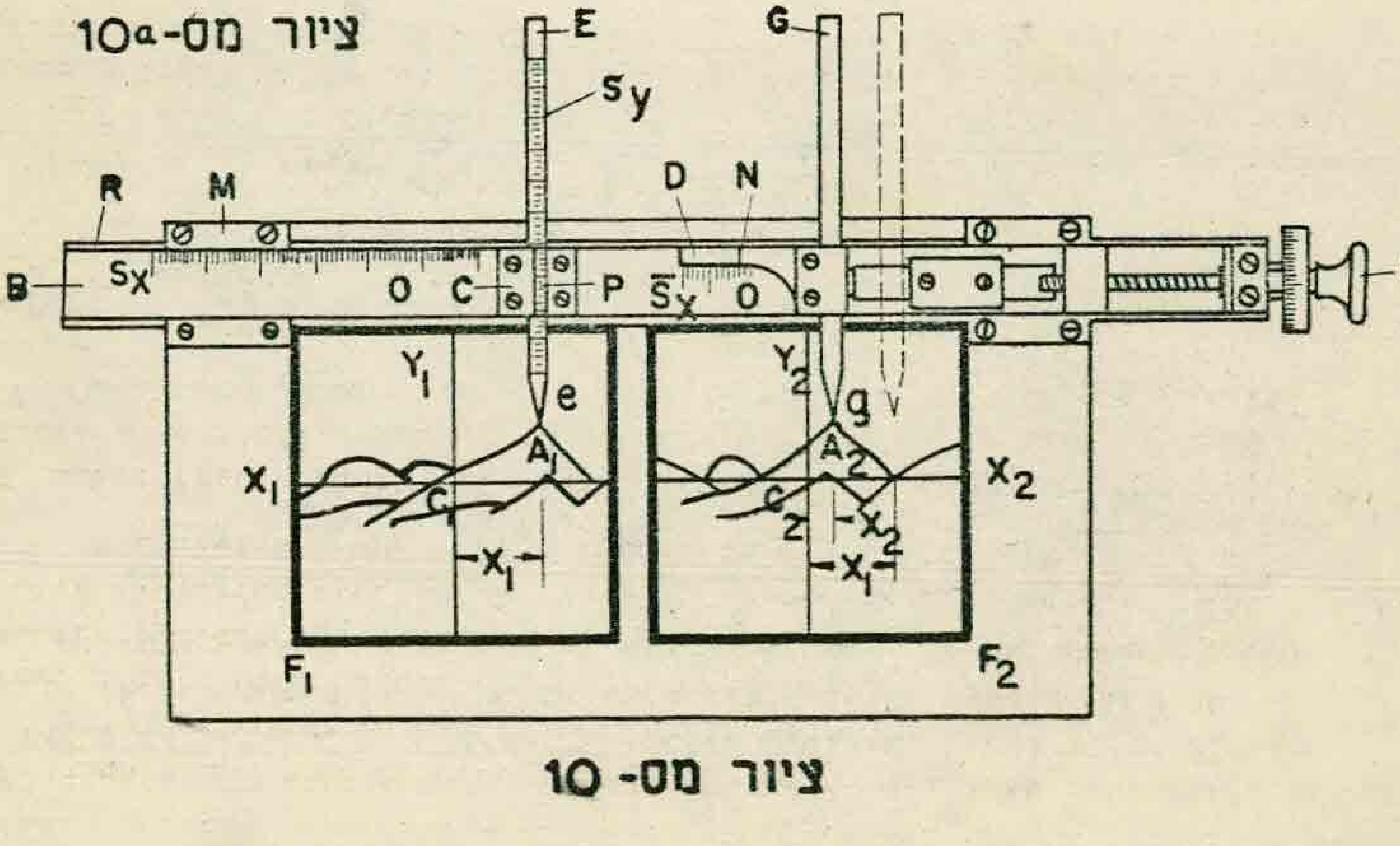
*) מאמר ראשון ראה ב"גליונות מתמטיקה" מס' 7 עמ' 205.





ציור מס- 9

ציור מס-10a



ציור מס- 10

ו- $O_2 A_2 O_2^o$. יחד עם זה ברור שאם נוריד מ- A^o נצב ל- $O_1 O_2$ נקבל שני משלשים O_1OA^o ו- O_2OA^o דומים בהתאמה ל- $A_1^oC_1O_1$ ו- $A_2^oC_2O_2$.

כעת נסמן ב-(x_1, o) את הקואורדינטות של A_1^o על גבי F_1, ב-(x_2, o) אלה של A_2^o על גבי F_2; ב-(X,Y,O) את הקואורדינטות של A^o לגבי המערכת המרחבית וכמו כן ב-(X,Y,Z) את הקואורדינטות של A.

על סמך דמיון המשלשים שציינו קודם נוכל לכתוב:

$$\frac{A_1^oA_1}{A^o\,A} = \frac{A_1^oO_1}{A^o\,O_1} = \frac{C_1O_1}{OA^o} = \frac{p}{Y}$$

$$\frac{A_2^o\,A_2}{A^o A} = \frac{A_2^oO_2}{A^oO_2} = \frac{C_2O_2}{OA^o} = \frac{p}{Y}$$

לפי הסימון: $z_1 = A_1^oA_1$; $z_2 = A_2^oA_2$ ז.א. $z_1 = A^oA.\frac{p}{Y}$

$z_2 = A^oA.\frac{p}{Y}$, כלומר $z_1 = z_2$. <u>הקואורדינטות z של נקודות מתאימות בשני הצלומים חייבות להיות שוות</u>; נובע מכך שכל זוג של נקודות מתאימות, כמו למשל A_1, A_2 נמצאות על גבי ישר אחד מקביל לציר המשותף $x_1 \equiv x_2$.

נוסף לזה: $$\frac{x_1}{X} = \frac{p}{Y} \quad ; \quad x_1 = p\,\frac{X}{Y}$$

$$\frac{x_2}{X-b} = \frac{p}{Y} \quad ; \quad x_2 = p\,\frac{X-b}{Y}$$

מכאן: $x_1 - x_2 = \frac{pb}{Y}$.

נוכל, איפוא, לסכם:

$$\underline{Y = \frac{pb}{x_1 - x_2}} \quad ; \quad \underline{Z = \frac{z_1\,Y}{p} = \frac{z_1 b}{x_1 - x_2}} \quad ; \quad \underline{X = \frac{x_1\,Y}{p} = \frac{bx_1}{x_1 - x_2}}$$

מנוסחאות אלה נובע שהמרחק Y מנקודה כל שהיא A אל המישור ZX תלוי אך ורק בהפרש $x_1 - x_2$ הנקרא <u>פרלקס</u>. באותו הזמן גובה אותה הנקודה מעל למישור XY ז.א. Z ומרחקה מהמישור ZY ז.א. X תלוים גם בפרלקס וגם בקואורדינטה המתאימה המדודה על גבי צלום אחד בלבד, למשל F_1.

2. הסטראומקרומטר (ציור 10) בנוי מלוח, שעליו מדביקים את שני הצלומים, המחובר לפס ממתכת בעל חריץ R שבתוכו נע סרגל B הנושא שתי סקלות $\bar{s}_x, s_x$ המחולקות למ"מ. המרחק בין האפסים של הסקלות שווה ל- b.

מעל ל- B ישנם שני גשרים נעים C, D; C נע לאורך B ע"י לחיצת אצבע; D נע גם הוא לאורך B בעזרת בורג מיקרומילימטרי H המחובר אליו וגם ל- B.

דרך שני הגשרים עוברים שני סרגלים דקיקים G, E שתנועתם האפשרית היחידה היא בכוון נצב ל- B ; תנועה זו מתבצעת ע"י המפעיל את המכשיר. הסרגל E נושא סקלה s_y מחולקת ל-מ"מ. E ו- G נגמרים בשני חודים g,e שיש תמיד ללכדם <u>בדיוק</u> עם שתי נקודות מתאימות של שני הצלומים, למשל A_2, A_1.

אזי (ציור 10a) ברגע שרואים את שני הצלומים כמתלכדים בראות סטראוסקופית יראו שני החודים g,e כמתלכדים לחוד אחד h הנוגע בדיוק בנקודה המרחבית A שבה מתלכדות, במובן הסטראוסקופי, שתי הנקודות המתאימות A_1 ו- A_2. אבל לעתים קרובות מאד קשה לזהות את הנקודות המתאימות A_2, A_1 ואז יכול לקרות שהחודים g,e אינם בדיוק במקומם הנכון. כתוצאה מזה הפרלקס שבין e,g איננו שווה לפרלקס שבין A_1, A_2 ואז רואים את החוד h כמרחף בחלל הריק או לפני A או מאחוריה.

ברור שע"י הזזת הפסים E, G נוכל לתקן את הטעות ויחד עם זה לזהות בדיקנות את הנקודות A_1, A_2.

אופן השמוש במכשיר: מדביקים את שני הצלומים על גבי הלוח כך ששני הצירים x_1, x_2 יהוו ישר אחד, מקביל לחריץ R, ומרוחק מ- R כך שהחוד e נוגע בו כאשר האפס של הסקלה s_y נמצא ממול לסימן P של C. המרחק בין המרכזים C_1 ו C_2 צריך להיות כמובן שווה ל- b. דוחפים את B, E, C עד אשר האפס של הסקלה s_x ימצא ממול לסמן M של R בו בזמן שהחוד e נוגע ב- C_1. אחרי זה מסובבים <u>את</u> ראש הבורג H וע"י זה מזיזים את הפס G עד אשר האפס של הסקלה $\bar{s}_x$ ימצא ממול לסמן N של D בו בזמן שחוד g של G (בשעת הצורך דוחפים באצבע את G) יגע בנקודה C_2. כך כל אפס לחוד נמצא ממול לסמן המתאים לו. אחרי שגמרנו את כל ההכנות האלה מזיזים אך ורק את B (הנושא יחד עמו את הגשרים ושני הפסים E, G) ומזיזים את E בתוך הגשר C כך שהחוד e יוכל לנגוע בנקודה A_1. ברור שסימן השנת s_x הנמצא ממול ל-M נותן לנו את האבסציסה x_1 של A_1 וסימן השנת s_y הנמצא ממול ל- P את ה- z_1 של אותה הנקודה.

כעת נסובב את ראש הבורג <u>H</u> ונדחוף את הפס G עד שהחוד g יגע בנקודה A_2. אזי סימן שנת $\bar{s}_x$ הנמצא מול N נותן את האבסציסה x_2 של A_2 ולפי מידת סבוב ראש הבורג מקבלים את הפרלקס של שתי הנקודות A_1, A_2.

בכדי לקבל תוצאות מדויקות צריכים לדאוג לכך ששני החודים e, g יהיו בדיוק באותו הגודל ובאותו הצבע. הארכנו את הדבור על בנית

הסטראומיקרומטר והפעלתו כי, כפי שאמרנו, הוא דגם של כל המכשירים שנבנו במרוצת הזמן. במטרה להקטין את אי-דיוק המדידות עברו מחלקי מ"מ לאלפיות מ"מ. הראשון שכלל את הדגם הנ"ל ובנה את הסטראוקומפרטור הראשון היה פולפריך (Pulfrich), אחריו פון אורל (Von Orel - 1908) ואחרים.

עד למלחמת העולם הראשונה בכל הסטראוקומפרטורים השתמשו בצלומים שנעשו מנקודות הקשורות לקרקע.

מספרים שהרעיון להשתמש בצלומים מן האויר בא לראשונה ב-1915 בעקבות אי-ציות חייל צרפתי להוראות קבע של צבאו. חייל זה שירת כצופה, כלומר תפקידו היה לטוס מעל לשטח האויב ולרשום כל דבר הנראה לו כחשוב במובן צבאי.

פעם אחת, בנגוד להוראה מפורשת, נטל עמו צלמניה וצלם מהאוירון מספר צלומים. הדבר נתגלה והצלמניה הוחרמה. הצלומים פותחו והתברר באופן מפתיע שלמרות הגבה הרב ממנו צולמו עצמי הקרקע,כל פרט היה ברור, בולט ומדויק הרבה יותר מרשום אפשרי של כל צופה כמה שיהיה מעולה.

מאז התחיל המרוץ בבנית מכשירים מתאימים לצלומים אלה, משוכללים ונוחים לעבודה. היום ישנם מכשירים מורכבים מאד שיכולים לדייק עד לאלפית מ"מ ושמאפשרים שרטוט קווי גבה של חלקת האדמה שעליה מסתכלים בראות סטראוסקופית ישר בגליון השרטוט מבלי להזדקק למדידה ישירה כל שהיא. היקף מאמר זה אינו מאפשר לפרט את בנית מכשירים אלה; במקום זה נסקור בקצרה את השמושים העיקריים של הפוטוגרמטריה.

1. מפוי. משתמשים במפוי פוטוגרמטרי לשכלול המפות הקיימות שנעשו בעזרת מדידות על הקרקע אבל בעיקר להכנת מפות של איזורים שבהם אי אפשר לבצע מדידות בגלל פראיות המקום. בארצות מפותחות ישנם מכונים ממשלתיים ופרטיים שמבצעים מפוי לכל דורש כולל: טיסות מעל למקום, צלום, פתוח, מפוי. (בישראל: המכון הפוטוגרמטרי לישראל - בירושלים).

2. שחזור תאונות דרכים. בשויצריה מקובל לחקור את הנסיבות של תאונות דרכים בעזרת פענוח של שני צלומים שנעשים מיד לאחר המקרה משתי נקודות על הקרקע הקרובות למקום האסון. לשיטה זו יתרונות רבים. א) מיד לאחר בצוע שני הצלומים (הדבר הזה דורש דקות ספורות כי משטרת התנועה בשויצריה מצוידת במכשירים מיוחדים ופשוטים הן עבור הצלום והן עבור המפוי) אפשר לפנות את מקום האסון ולמנוע פקקי תנועה גדולים, ב) כל דבר הקשור למקרה רשום בצלום ואין אפשרות לטשטש את הענין אפילו לאחר זמן רב, ג) המדידות מדויקות ואפשר לסמוך עליהן, ד) לפעמים הצלומים מגלים פרטים ששוטר יכול לא להבחין בהם או לא לשים לב אליהם בזמן עריכת הדוח.

3. ארכיאולוגיה, גאולוגיה, חקלאות. האינטרפרטציה של גוני הצבעים שבצלום (לעת עתה משתמשים בצלומים

בצבע לבן – שחור אבל כבר נעשו נסיונות להשתמש בצלומים בצבעים טבעיים) ושל צורת הקרקע מדריכה את המפענח בקשר לטיב הקרקע, שכבות גאולוגיות, צמחיה, אתרים ארכיאולוגיים, וכו". לדוגמה: היה ידוע שבזמנים קדומים על יד שפך הפֹּה (איטליה) שכנה עיר חשובה מאד בשם ספינה שרחובותיה היו תעלות מים בדומה לונציה. כל המאמצים של הארכיאולוגים לאתר את מקומה המדויק עלו בתוהו עד אשר החליטו לצלם את האיזור מן האויר. ואז ראו דבר מעניין מאד; לפי צבע צמחית המקום (קרקע חקלאית) היה ברור שהיא מתפתחת בצורה הרבה יותר נמרצת לאורך פסים מצטלבים המצטרפים לרשת מסועפת. מכיון שהתפתחות כזו של צמחיה אופינית לקרקעות בעלות אחוז גבוה של רטיבות הסיקו מזה שהפסים מציינים את המקומות שבהם היו בזמנו תעלות המים של ספינה. חפירות במקום אמתו את ההשערה.

4. <u>רפואה</u>. כדי לשחזר את מקומו של עצם זר בתוך גוף של בן–אדם ולקבוע את מידותיו משתמשים בשני צלומי רנגטן שנעשים באותו הזמן משני מקומות שונים. כמובן שכאן יש הכרח לפתח את הצלומים ולהסיק את המסקנות במהירות גדולה אם רוצים למנוע הפתעות בלתי רצויות לאחר זמן מה.

גם בעיות אנטרופולוגיות ועקוב אחרי גדול מתמיד של גופים חיים נעזרים בפוטוגרמטריה.

5. <u>הידראוליקה</u>. בזמן אחרון נעשו מחקרים על תנועת הנוזלים בתעלות פתוחות וצורת הגלים הנוצרים בהן.

6. <u>תעשיה</u>. כאן השמוש הוא לעקוב אחרי הקורוזיה של מתכות שונות ודרגת הליטוש של שטחים מעובדים.

7. <u>חשוב נפחים</u>. במקומות שבהם ישנם הרבה יערות מעריכים בדיוק מספיק את נפח העצים ביער מסוים ע"י צלומים מן האויר, כי פענוח הצלומים מראה לא רק את גודל היער אלא גם גודל העצים, מצב התפתחותם ומספרם. שיטה זו מקובלת בטורקיה למשל.

8. <u>סקר על תנועה בדרכים</u>. באמריקה נהוג לערוך סקרים כאלה בעזרת צלומים מן האויר בזמנים קצובים ופענוחם.

ישנם עוד הרבה שמושים לפוטוגרמטריה אבל הדוגמאות שהבאנו מספיקות כדי להוכיח את חשיבותה בחיי יום יום.

נסכם את המאמר הזה בקביעת העובדה שהפוטוגרמטריה היא מדע צעיר למדי שכבר הוכיח את יעילותו ושנכונו לו התפתחויות נוספות.

בזמן האחרון התחילו להשתמש במכשירי רדר להדרכת הטייס בזמן הצלום. משתמשים גם במכשירים אלקטרוניים למציאת הקואורדינטות של נקודות הגוף המצולם. נוסף לכך יש גם שיטות אלקטרוניות לפענוח הצלומים מבלי להזדקק לראות הסטראוסקופית של בן–אדם הלקויה בחוסר אוביקטיביות. הדיוק שאפשר לקבל היום ע"י מכשירים מכניים ואופטיים–מכניים הוא די גדול; האם יצליחו להגדילו ע"י שמוש בשיטות חדישות אלה? נחכה ונראה.

המשך מעמ' 239

מ-(1) ו-(2) נובע כי a_n אי-זוגי, לכן נובע מ-(3) כי x חיב להיות אי-זוגי ו- m זוגי. $m=o$ אינו בא בחשבון (מדוע?). נפנה לכן ל-$m=2$. מ-(4) נקבל 4 ערכים עבור x מהם נבחר את הערך השלם $x = 33$ (או $x = -33$). קבלנו, איפוא, כי $33^2-2 = 1087$ הוא מחלק של $a_5 = 4870847$. ע"י בצוע החלוק נקבל אמנם $4481 \cdot 1087 = 4870847$.

ת. 79. מחיר האטלס 6 ל"י. כי כל רבוע שלם המכיל מספר בלתי זוגי של עשרות מסתים בספרה 6. הוכחה: יהי $b < 10$

$$k^2 = (10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 20(5a^2+ab) + b^2$$

החלק הראשון הוא מספר זוגי של עשרות ולכן ספרת העשרות של k^2 תהיה בלתי זוגית אם ורק אם ספרת העשרות של b^2 תהיה בלתי זוגית. בדיקת המספרים מ-1 עד 9 מראה כי רק ב-$4^2 = 16$ וב-$6^2 = 36$ ספרת העשרות בלתי זוגית. (הערה: אפס הוא מספר זוגי).

ת. 80. לפי הנתון $a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$

מכאן
$$1 + \log_{b+c}(c-b) = 2\log_{b+c} a$$

כעת:
$$\log_{b+c}(c-b) = \frac{1}{\log_{c-b}(b+c)} = \frac{1}{\log_{c-b}\frac{a^2}{c-b}} = \frac{1}{2\log_{c-b}a - 1}$$

אחרי ההצבה וצמצום מקבלים את השויון המבוקש.

ת. 81. התערובת מכילה x ג' נוזל קל ו- y ג' נוזל כבד. נפח התערובת

$$\frac{x}{1.2} + \frac{y}{1.6}$$

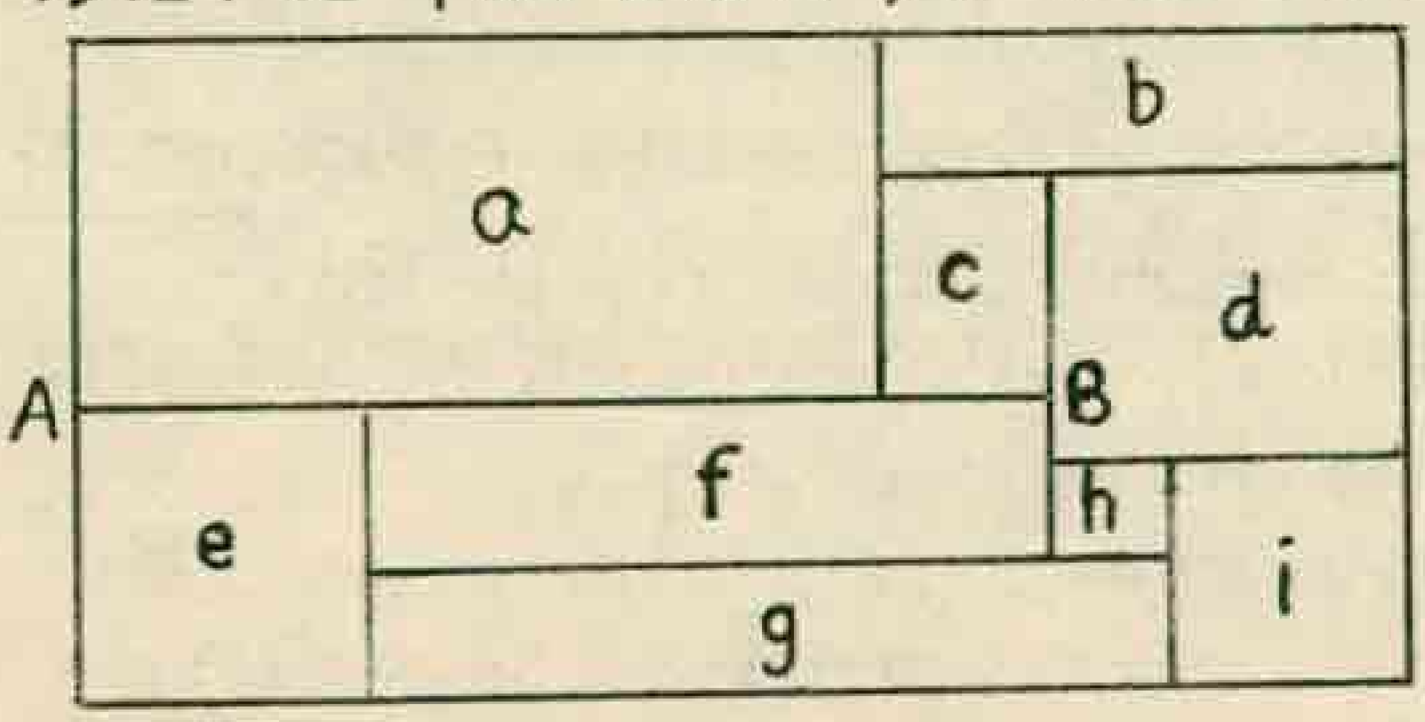
ולכן משקלה הסגולי
$$\frac{60}{\frac{x}{1.2} + \frac{y}{1.6}}$$

8 סמ"ק של התערובת שוקלים, איפוא: $x = \dfrac{60 \cdot 8}{\frac{x}{1.2} + \frac{y}{1.6}}$

למשואה זו מצטרפת המשואה $x + y = 60$

פתרון מערכת המשואות: $x = 12 \; ; \; y = 48$.

ת. 82. נסמן את צלעות תשעת הרבועים באותיות, כרשום בתוך כל רבוע. מתוך הסתכלות בציור מתקבלות המשואות הבאות:



$$g = f + h \quad ; \quad e = f + g = h + 2f;$$
$$i = h + g = 2h + f \; ; \quad d = h + i = 3h + f$$
$$c = d + h - f = 4h \; ; \quad b = c + d = 7h + f$$
$$a = c + b = 11h + f$$

הבענו בזאת את כל האורכים המבוקשים כבטויים לינאריים של שנים מתוכם (h ו-f). לכן הכרח ש- f ו-h יהיו זרים.

מהקטע AB (ציור) נובע השויון $a + c = e + f$

אחרי ההצבה: $15h + f = h + 3f$ כלומר $7h = f$

כפי שצינו לעיל f ו- h זרים (וכמובן שלמים) ולכן $f = 7; \; h = 1$

ע"י הצבה נקבל: $a = 18; \; b=14; \; c=4; \; d=10; \; e=15; \; g=8; \; i=9$

<u>ת. 83.</u> נתון
$$2^{2x+2} - 9 \cdot 10^x = 4 \cdot 25^{x+1}$$
כלומר
$$4 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x \cdot 5^x - 100 \cdot 5^{2x} = 0$$
אחרי חלוק ב- 5^{2x} וסמון $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y$ מקבלים את המשואה $4y^2 - 9y - 100 = 0$ שפתרונה החיובי $y = \frac{25}{4}$ בלבד מתאים לתנאי הבעיה. מכאן $x = -2$.

<u>ת. 84.</u> מרכז הכדור מתלכד עם מרכז הקוביה, וקוטרו שוה לאלכסון פאתה (מסתכלים בחתך הקוביה העובר דרך שני מקצועות נגדיים). מחוץ לקוביה מופיעות שש כפות של הכדור. בסיס כל כפה הוא מעגל חסום בפאת הקוביה. אם נסמן את צלע הקוביה ב- a יהיה רדיוס הכדור $R = a\sqrt{2}/2$ ורדיוס בסיס כל כפה $a/2$. גובה כל כפה
$$h = R - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$
נפח כל כפה $\frac{\pi a^3}{24}(4\sqrt{2} - 5)$ (לפי הנוסחה $\left(\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)\right)$

לכן הנפח המבוקש:
$$\frac{4}{3}\pi \frac{a^3 \, 2\sqrt{2}}{8} - \frac{6\pi a^3}{24}(4\sqrt{2}-5) = \frac{\pi v}{12}(15 - 8\sqrt{2})$$

<u>ת. 85.</u> רבוע של מספר שלם שאינו מתחלק ב-7 קונגרואנטי ל-1, 2 או 4 מודולו 7 (כלומר בחלוק ב-7 משאיר את השארית 1, 2 או 4). זאת נסיק מבדיקת שש האפשרויות
$$(7n+1)^2 = 49n^2 + 14n + 1 \equiv 1(7)$$
$$(7n+2)^2 \equiv 4(7) \qquad (7n+3)^2 \equiv 2(7) \qquad (7n+4)^2 \equiv 2(7)$$
$$(7n+5)^2 \equiv 4(7) \qquad (7n+6)^2 \equiv 1(7)$$

ומאחר שבין המספרים 1, 2 ו-4 אין זוג מספרים שסכומם מתחלק ב-7, אין שני מספרים שאינם מתחלקים ב-7 וסכום רבועיהם מתחלק ב-7.

ת. 86. נוכיח כי הבטוי (שנסמנו ב- M) שוה ל-4 פעמים הגדול שבין שלושת המספרים x , y ו- z.

א) אם x הגדול (או שוה) שבהם הבטוי x-y אינו שלילי

ולכן: $M = \big|\,|x-y| + x + y - 2z\big| + |x-y| + x + y + 2z =$

$= |x - y+x+y-2z| + x-y + x+y+2z = |2x-2z| + 2x+2z$

אך $z \geqslant x$ ולכן $M = 2x-2z+2x+2z = 4x$

ב) אם y הגדול שבהם

$M = |y - x + x + y - 2z| + y - x + x + y + 2z =$

$= |2y-2z| + 2y + 2z = 2y-2z+2y+2z = 4y$

ג) אם z הגדול שבהם נבדיל שני מקרים:

(ג1) $z \geqslant y \geqslant x$

$M = |y - x + x + y - 2z| + y - x + x + y + 2z =$

$= |2y-2z| + 2y+2z=2z-2y+2y+2z=4z$

(ג2) $z \geqslant x \geqslant y$

$M = |x -y+x+ y - 2z| + x - y + x + y + 2z =$
$= |2x-2z| + 2x + 2z = 2z - 2x + 2x + 2z = 4z$

ובכן ערך הבטוי נקבע ע"י הגדול שבהם. לכן כל החלפה בין x,y ו- z אינה משנה את ערך הבטוי.

ת. 87. נתון $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

נכפול את אגפי המשואה ב-$abc(a+b+c)$ (מן הראוי לציין כי בטוי זה שונה מ-0 שהרי כל גורמיו מופיעים כמכנים במשואה הנתונה).

$$(a+b+c)bc + (a+b+c)ac + (a+b+c)ab = abc$$

$$abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2+abc-abc=0$$

$$a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc = 0$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) = 0$$

ולכן לפחות אחד הגורמים a+b , a+c , b+c חיב להתאפס.

ת. 88.

$$16\sin^2 x\ \cos^2 x\ \cos^2 2x = (4\sin x\cos x\cos 2x)^2 =$$
$$= (2\sin 2x\cos 2x)^2 = (\sin 4x)^2$$

נציב זאת במשוואה הנתונה:

$$2\cos^2 x = \sqrt{1-\sin^2 4x} = \sqrt{\cos^2 4x} = |\cos 4x|$$

א) אם $\cos 4x \leqslant 0$

$$1+\cos 2x+\cos 4x = 0 \qquad 2\cos^2 2x+\cos 2x = 0$$
$$x_1 = \frac{4n\pm 1}{4}\pi \qquad x_2 = \frac{3n\pm 1}{3}\pi$$

ב) $\cos 4x > 0$

$$1+\cos 2x = \cos 4x \qquad 1+\cos 2x = 2\cos^2 2x - 1$$
$$\cos 2x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$$

(סמן חיובי לפני השרש לא יתכן ; מדוע ?)

$x_{3,4} = \pi n \pm \frac{1}{2}\alpha$, כאשר α הוא מספר כלשהו המקיים

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{4}(1-\sqrt{17})$$

ת. 89.

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5} = 0$$

נסכם כל שני שברים בעלי אותו מונה

$$\frac{3(2x-5)}{x^2-5x}+\frac{2x-5}{x^2-5x+4}+\frac{4(2x-5)}{x^2-5x+6} = 0$$

א) $2x-5 = 0$ $\qquad x_1 = \frac{5}{2}$

ב) נסמן $y = x^2-5x$.

מקבלים:

$$\frac{3}{y}+\frac{1}{y+4}+\frac{4}{y+6} = 0$$

או

$$2y^2+13y+18 = 0$$

$$y_1 = -\frac{9}{2} \qquad x^2-5x+\frac{9}{2} = 0 \qquad x_{2,3} = \frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$$
$$y_2 = -2 \qquad x^2-5x+2 = 0 \qquad x_{4,5} = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

ת. 90. א) הכרחיות. נניח שהמספר

$$100x+10y+z = 100(7-y-z)+10y+z =$$

$$=700 - 91y - 98z + y - z = 7(100-13y-14z) + (y-z)$$

מתחלק ב-7.

לכן $y-z$ מתחלק ב-7. אבל שניהם קטנים מ-7 לכן $y - z = 0$ ז.א. $y=7$.

ב) מספיקות. נתון $y = z$

$$100x + 10y + z = 100x + 11y = 100(7-2y) + 11y =$$

$$= 700 - 189y = 7(100-27y)$$

על משלשים הרוניים

יעקב יצחק בן אהרן לולצניק.

ברשימה זו ניתן חישוב חדש למציאת משלשים הרוניים, כלומר משלשים שכל צלעותיהם ושטחם הם מספרים שלמים.

הדרך הפשוטה ביותר לקבל משלש הרוני היא להרכיבו משני משלשים פתגוריים בעלי ניצב משותף.

כידוע צלעות משלש פיתגורי (ז.א. משלש ישר זוית שכל שלש צלעותיו הם מספרים שלמים) נתונות ע"י *)

$$a = (m^2 - n^2)t, \quad b = 2mnt, \quad c = (m^2 + n^2)t \qquad (1)$$

כאן m ו-n הם שני מספרים טבעיים. t הוא מספר טבעי המשמש כגורם פרופורציונליות. ברור שגם שטח של כל משלש פתגורי נתון ע"י מספר שלם.

נתבונן כעת בשני משלשים פתגוריים:

$$a_1 = (m_1^2 - n_1^2)t_1 \qquad b_1 = 2m_1n_1t_1 \qquad c_1 = (m_1^2 + n_1^2)t_1$$

$$a_2 = (m_2^2 - n_2^2)t_2 \qquad b_2 = 2m_2n_2t_2 \qquad c_2 = (m_2^2 + n_2^2)t_2$$

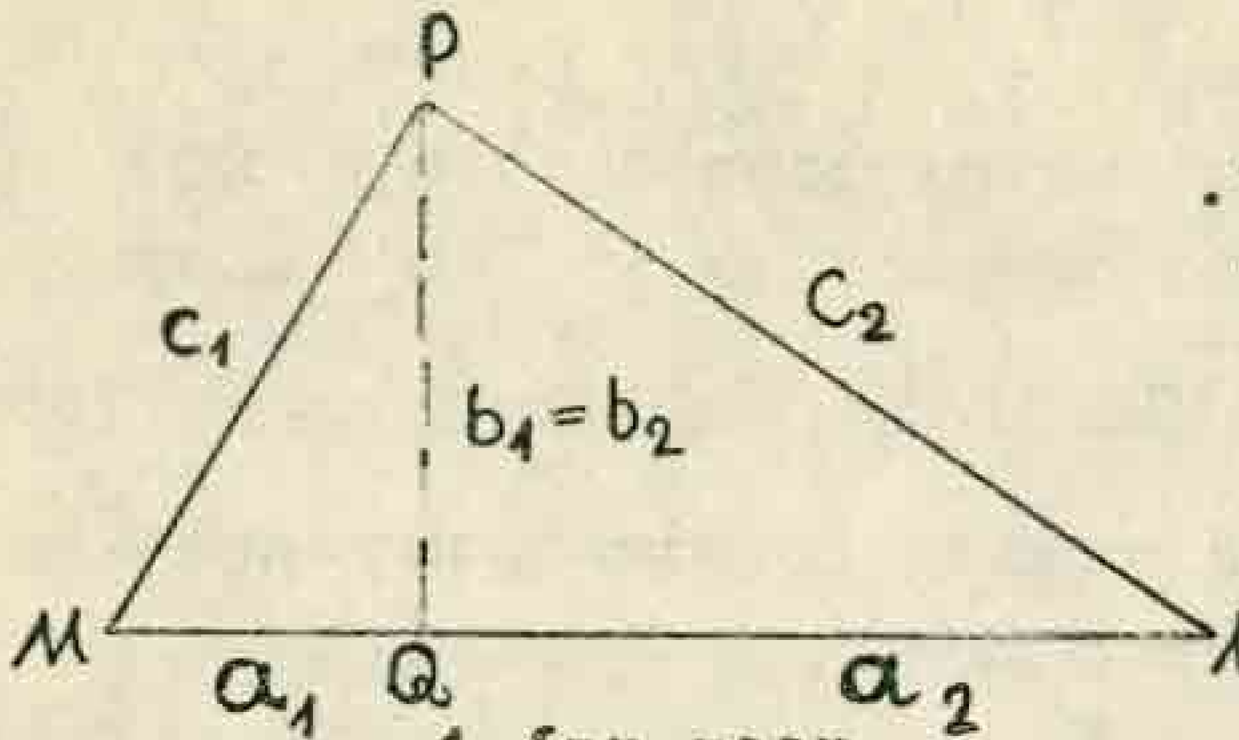
נגביל את עצמנו למקרה, כאשר $m_1 = m_2 (= m)$

$$t_1 = n_2 \quad , \quad t_2 = n_1$$

מקבלים שני משלשים פיתגוריים בעלי ניצב משותף

$$b_1 = b_2 = 2mn_1n_2$$

*) ראה למשל "גליונות מתמטיקה מס' 4 עמ' 104.



ציור מס' 1

נסדר אותם זה ליד זה כמו בציור מס' 1.
קבלנו בבירור משלש הרוני, כי צלעותיו $a_1 + a_2$, c_1 ו- c_2 הם מספרים שלמים וכן גם שטחו שהוא סכום השטחים של שני משלשים פיתגוריים. הנוסחות הבאות מבטאות את 9 המספרים השלמים הקשורים עם המשלש MPN :

$$a_1 = (m^2-n_1^2)\,n_2 \qquad a_2 = (m^2-n_2^2)n_1 \qquad MN = a_1+a_2 = (m^2-n_1n_2)(n_1+n_2)$$

$$c_1 = (m^2+n_1^2)n_2 \qquad c_2 = (m^2+n_2^2)n_1 \qquad PQ = 2m\,n_1n_2$$

$$S_{\Delta MPQ} = (m^2-n_1^2)\,m\,n_1n_2^2 \qquad S_{\Delta NPQ} = (m^2-n_2^2)\,mn_1^2\,n_2$$

$$S_{\Delta MPN} = (m^2-n_1n_2)\,(n_1+n_2)\,mn_1n_2$$

בבחירת ערכי הפרמטרים יש להקפיד, $m \geqslant n_1$ ו- $m \geqslant n_2$.
עבור $n_1 = n_2$ נקבל $c_1=c_2$ ז.א. ΔMPN הוא שוה שוקיים.
עבור $m=n_1$ (או $m=n_2$) מקבלים $a_1=0$ (או $a_2 = 0$) ז.א. ΔMPN הופך לפתגורי בעצמו.

דוגמא: נקבע: $m = 9\,;\ n_1=6\,;\ n_2 = 1$

מקבלים: $a_1= 45\,;\ a_2 = 480\quad MN = 525\,;\ PQ = 108\,;\ c_1= 117$

$$c_2 = 492\,;\ S_{\Delta MPQ} = 2430\,;\ S_{\Delta NPQ} = 25920\,;\ S_{\Delta MPN} = 28350$$

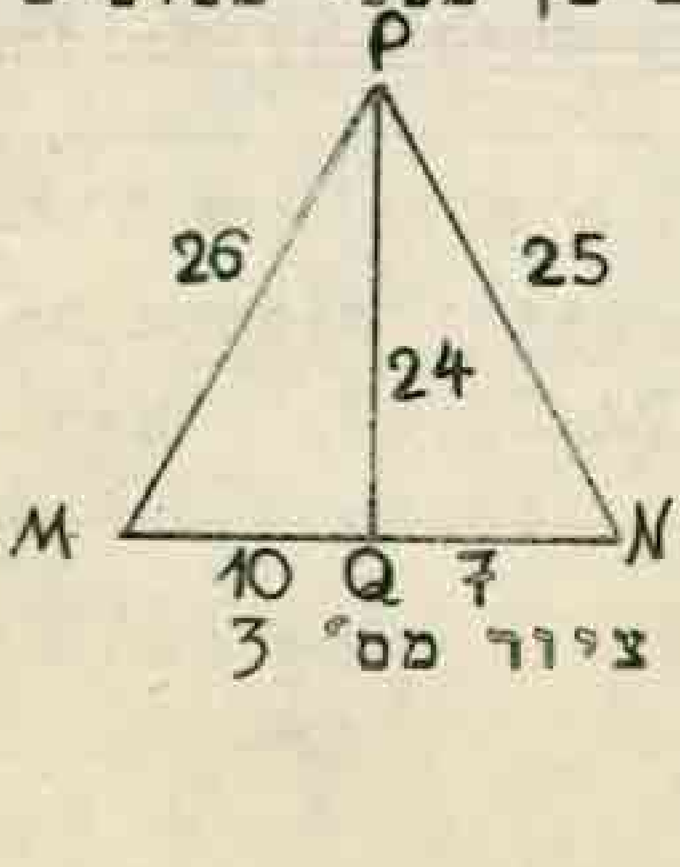
ציור מס' 2

<u>הערות המערכת:</u>

א) את המשולשים אפשר כמובן לסדר גם כמו בציור מס' 2 ולקבל משלש הרוני קהה-זוית.

ב) הייצוג הפרמטרי הנ"ל נותן רק משפחה אחת של משלשים הרוניים המתקבלים ע"י הרכבת שני משלשים פיתגוריים.

כך למשל המשלש ההרוני שבציור מס' 3 מתקבל גם כן משני משלשים פיתגוריים אבל אינו ניתן לפרמטריזציה כנ"ל.
ובאמת אם $PQ = 2m\,n_1n_2 = 24$
הרי $mn_1n_2 = 12$. שום צרוף של ערכים שלמים עבור m, n_1, n_2 שמכפלתם 12 לא נותן את המשלש הנ"ל. (שימו לב ששני הגבהים האחרים של המשלש אינם שלמים כלל).



ציור מס' 3

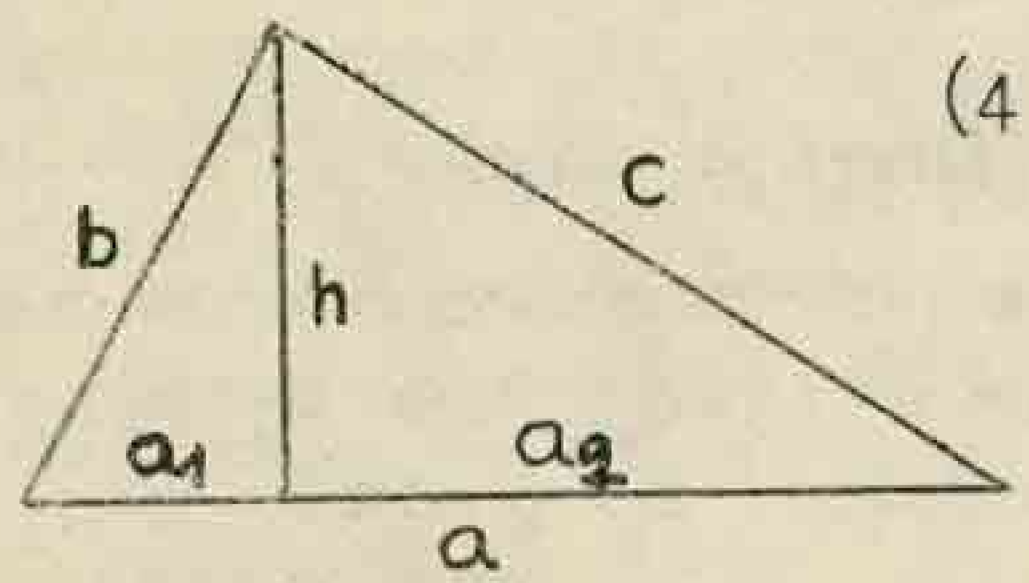
ג) קיימים משלשים הרוניים שאינם מתקבלים ע"י הרכבת שני משלשים פתגוריים. כך לדוגמה שטח המשלש שצלעותיו 180, 119, 65 הוא:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{182\cdot 2\cdot 63\cdot 117} = 1638$$

ז.א. זהו משלש הרוני. קל לבדוק שאף אחד מגובהי משלש זה אינו מספר שלם ז.א. אי אפשר לפרקו לשני משלשים פיתגוריים, עם ניצב משותף שישמש כגובהו.*)

משלשים כאלה אפשר לקבל ממשולשים רציונליים ז.א. משלשים שצלעותיהם ושטחם הם מספרים רציונליים. ובאמת ע"י הכפלת ארבעת המספרים הרציונ-ליים המבטאים את צלעות ושטח משלש רציונלי במכנה משותף שלהם נקבל משלש הרוני.

משלשים רציונליים ניתנים תמיד להרכבה משני משלשים ישרי זוית רציונליים. דבר זה יוכח באופן הבא:



ציור מס' 4

הגובה h במשלש רציונלי (ראה ציור מס' 4) נתון ע"י

$$h = \frac{2S}{a}$$

ובתור מנה של שני מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי.

נחשב כעת את a_1 ו- a_2

קיים $a_1 + a_2 = a$

מצד שני:

$$a_1^2 = b^2 - h^2 = b^2 - c^2 + a_2^2$$

ז.א. $a_1^2 - a_2^2 = b^2 - c^2$

יחד עם השויון הקודם מקבלים

$$a_1 - a_2 = \frac{b^2 - c^2}{a}$$

ולבסוף

$$a_2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \qquad a_1 = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$$

a_1 ו- a_2 בוטאו בצורה רציונלית ע"י המספרים הרציונליים a,b,c, ז.א. גם a_1 ו- a_2 הם מספרים רציונליים. כל זה מוכיח את המשפט שכל משלש רציונלי מתקבל ע"י הרכבת שני משלשים רציונליים ישרי זוית. נמליץ לפני הקורא לבצע הוכחה דומה עבור המקרה כאשר המשלש הרציונלי הוא קהה-זוית.

*) דוגמה זו לקוחה מספרו של ו. שרפינסקי: "משולשים פיתגוריים".

<u>100</u>

קיימת אפשרות <u>יחידה</u> להרכבת המספר 100 כסכום של מחוברים שנבחרו מתוך המספרים 39,24,23,17,16 (כל מספר מותר לבחור פעמים אחדות). הרכב סכום זה והוכח שבניתך היא אמנם היחידה האפשרית.

תחרות מתמדת להתרת בעיות (מחזור 2)

אנו מפנים את תשומת לב הקוראים לחדוש בתקנון התחרות שפורסם בחוברת מס' 7 (עמ' 217).

עם הבעיות שבגליון זה מסתיים המחזור השני של התחרות המתמדת. בחוברת הראשונה של כרך מס' 2, שתופיע בהתחלת שנת הלמודים הבאה יתחיל המחזור השלישי (בעיות ת. 121 - ת. 180).

את הפתרונות יש לרשום בצורה ברורה (בדיו ולא צפוף מדי) ולפרטם ככל האפשר. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל. פתרון של שאלה יש לרשום על דף לחוד (מצדו האחד של הדף) ולציין לידה את מספרה הסדורי. כמו כן יש לציין על כל דף את שם הפותר ואת מקום עבודתו או למודיו (גם את שנת הלמודים שלו לפי 12 שנות למוד).

ההתרות של בעיות גליון זה צריכות להגיע למערכת לא יאוחר מ-1.10.1962.

הערה: הבעיות המצוינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט', י' בלבד (שנות הלמודים התשיעית והעשירית).

ת. 106 (5 נקודות) נתונים: סרגל, מחוגה וכדור. שרטט על ניר קטע השוה באורכו לקטר הכדור. (הערה: ברשותך לצייר על פני הכדור).

ת. 107* (4 נקודות) נתונים קטע חצוי (כלומר נתון אמצע הקטע) ונקודה מחוץ לקטע. העבר דרך הנקודה ישר מקביל לקטע בעזרת סרגל בלבד. (הוצעה ע"י יגאל פולקמן).

ת. 108 (5 נקודות) (השוה ת. 74). חלק קטע נתון ל-n חלקים שוים, בעזרת מחוגה בלבד (הוצעה ע"י צבי דרזנר).

ת. 109* (3 נקודות) הוכח שהבטוי

$$x\,(x^{n-1} - na^{n-1}) + a^n\,(n-1)$$

מתחלק ב- $(x-a)^2$.

ת. 110* (2 נקודות) מהו המספר המכסימלי של רצים, אשר אפשר להעמיד על לוח שחמט, כך שימצאו ללא כל איום הדדי? הכלל את התוצאה ללוח בעל $n \times n$ משבצות.

ת. 111* (3 נקודות) מרכזי 4 כדורים שוים נמצאים על היקף מעגל ומרכז הכובד של מערכת זו נמצא במרכז המעגל. הוכח כי מרכזי המעגלים מהוים קדקדי מלבן.

ת. 112* (3 נקודות) הוכח שאם כל אחד משני מספרים הוא סכום של שני רבועים שלמים, אף מכפלתם נתנת לתאור כסכום של שני רבועים שלמים.

ת. 113 (3 נקודות) מבין כל הגלילים החסומים בכדור איזהו בעל מעטפת מכסימלית? (יש לפתור שאלה זו ללא שמוש בנגזרת).

ת. 114* (4 נקודות) פרק לגורמים את הבטוי:

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$$

(הוצעה ע"י שמואל פרידלנד).

ת. 115 (4 נקודות) מצא נוסחה שבאמצעותה תוכל לבטא כל מספר שלם ע"י שמוש בספרה 2 שלש פעמים בלבד. בסימנים ובפעולות מתמטיים תוכל להשתמש כרצונך.

ת. 116 (3 נקודות) מהו התנאי שחייבים לקיים מקדמי המשואה

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

על מנת ששרשיה יהוו סידרה גיאומטרית ?

ת. 117* (2 נקודות) a, b, c ו- d מספרים חיוביים המקיימים את שני השויונות:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{c}\ ;\ \frac{b}{d}+\frac{b}{c}=\frac{d}{c}+1$$

הוכח כי לפחות שלושה מבין המספרים a, b, c ו- d שוים ביניהם. (הוצעה ע"י בן-ציון יוסלזון).

ת. 118 (4 נקודות). נתונות שלש נקודות שאינן על ישר אחד. בנה שלשה מעגלים שמרכזיהם בשלש הנקודות הנתונות, כך שהם ישיקו זה לזה.

א) הוכח שיש לבעיה זו ארבעה פתרונות לכל היותר,

ב) הוכח כי בין רדיוסי המעגלים המופיעים בכל הפתרונות הנ"ל יש לכל היותר ארבעה שונים.

ג) הוכח שאם שלושת המעגלים נוגעים זה בזה מבחוץ הרי מכפלת מחוגיהם שוה למכפלת שטח המשלש הנוצר ע"י 3 הנקודות הנתונות ברדיוס המעגל החסום בו.

ת. 119 (3 נקודות) הוכח שאם A, B, C הן זויות משולש, הרי

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

והשויון מתקיים אם ורק אם המשולש הוא שוה-צלעות.

ת. 120 (4 נקודות) הוכח כי

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

עבור על x המקיים

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$$

a ו- b מספרים חיוביים.

על החוג למתימטיקה שבבית רוטשילד בחיפה

דני כהן

החוג המשיך את פעילותו גם בסמסטר האביב של בית רוטשילד.

ההרצאות שהשמעו בתקופה האחרונה הן: על בעיות בגיאומטריה (ע"י ד"ר מ. אדלשטיין מהמחלקה למתימטיקה של הטכניון), על טופולוגיה (ע"י מר אלכסנדר זברוצקי אף הוא מהמחלקה למתימטיקה של הטכניון), ואלגברה בוליאנית ושמושיה (ע"י דני כהן).

ד"ר אדלשטיין הביא בהרצאתו מספר בעיות פשוטות, לכאורה, בגיאומטריה של המשור - שפתרונן, איננו כה פשוט.

דוגמה: איך למצא n נקודות במשור כך שהמרחק בין כל שתי נקודות יהיה מספר שלם. זאת, ועוד: האם אפשר למצא אינסוף נקודות בעלות התכונה הנ"ל.

בהרצאתו בטופולוגיה הגדיר מר זברוצקי את מושג המטריקה. הוא בירר אפשרויות שונות להגדרת "מרחק" בין 2 פונקציות נתונות.

בהמשך ההרצאה הובאו מספר מושגי-יסוד בטופולוגיה.

כתם ההרצאה באלגברה בוליאנית יכול החוג, להלכה, לחשב את המעגלים החשמליים הבסיסיים, הדרושים לבנית מחשב אלקטרוני.

בעיה לדוגמא: בנית מעגל-מחוג (ראה המאמר על מעגלי מחוג של י. גבעון, בחוברת מס' 6 עמ' 178) בעל n מפסקים כך ששנוי מצבו של כל מפסק משנה את מצב המעגל כולו. או בעיות מהסוג: בנית מעגל מתוג לשם בצוע חבור (כפל) של 2 מספרים בינריים נתונים.

הרצאה זו עסקה, בין היתר, בכתיבת המספרים לפי בסיסים שונים. ועוד בעיה אחרונה: מהם סימני החלוק ב-7 של מספר בינרי.

תשובות לשאלות בינים מחוברת מס' 7

סדר סוגריים

א) $\{[(1:2):3]:4\}:5$ ב) $1:\{[(2:3):4]:5\}$

מצא את השרש $2^{11}-1$

דרכים שונות 36 **רבוע שלם** 1111^2

משלש בחצי עגול 50 סמ"ר **מספרים זרים** כן

צריחים על לוח שחמט 1568

רשימת פותרי השאלות מס' ת. 76 - ת. 90

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגריים רשום מספר הנקודות שכל פותר צבר מתוך השאלות ת.76 - ת.90.

1 אורבך אברהם, י"ב "מעלה", ירושלים. 77,79,80,82,83,85*,86*,87,88*, 89**,90* (28 נק')

2 איזנמן מיכאל, י"א "התיכון", ירושלים, 76,77,79-83,85-87,88*,89*,90 (40 נק')

3 אליצור משה, א' אוניברסטה, ירושלים, 77,79,80,81,83,85,87,88*,89,90* (31 נק')

4 בוכינגר יואל, "גזית", רמת-גן, 77,79,81,90* (10 נק')

5 גברון אביגדור, שנה א', אוניברסיטה, ירושלים. 77,79-81,82,83,84,85*, 87,88*,89,90*. (31 נק')

6 גולדשטין מאיר, י"ב תיכון ערב, כפר סבא. 77*,79,80*,83*,87,89*,90* (15 נק')

7 גינגולד אריה, י"א "הריאלי", חיפה. 77,79,80*,81-85,86**,87,88*, 89,90. (39 נק')

8 גרא עמוס, י"ב "התיכון", ירושלים. 77,80,81,83,87*,88*,90 (21 נק')

9 גרוס ראובן, י"א "הריאלי", חיפה. 76*,79,80,82,83,85*,86*,87, 88*,89,90. (33 נק')

10 דרזנר צבי, שנה א' טכניון, חיפה. 76-90 (52 נק')

11 הרצמן יוסף, י"ב "אהל-שם", רמת-גן. 77,79-85,87-90 . (41 נק')

12 זלטקין מיכאל, י"א "הריאלי", חיפה. 77,79*,80-85,87,88*,89,90*. (38 נק')

13 טליל אורי, י' "הריאלי", חיפה. 77, 85*. (4 נק')

14 יוסלזון בן-ציון, י"א "הריאלי", חיפה. 77,80,81,82-84,87,88*,89. (32 נק')

15 לביא נתן, י"א "התיכון", ירושלים. 76*,77,78-81,82*,83,86,87,88*, 89,90. (37 נק')

16 לובזנס דניאל, י"ב "חוגים", חיפה. 76,77*,79-83,85-87,88*,89,90*. (39 נק')

17 לוי אליהו, י' "הריאלי", חיפה. 76,77,79-84,85*,87,88*,89,90. (42 נק')

18 לורנד ראובן, י' "הריאלי", חיפה. 77,79,80,82,83,85,88*,89,90*. (27 נק')

19 מימון אורי, י' "הריאלי", חיפה. 77,80*,81,87,88*,90*. (18 נק')

20 עקביה גדעון, י' "הריאלי", חיפה. 76,77,79,80*,81,82,84-87,88*,90* (34 נק')

21 פינברג עמנואל, י' מקצועי ליד הטכניון, חיפה. 85*, 90*. (4 נק')

22 פישלזון צבי, י"ב "חוגים", חיפה. 77,79*,80,81,83,84,85**,86*,87*, 88,89**,90*. (28 נק')

23 פסטרנק מנחם, י"א "דביר", רמת-גן. 80,83. (6 נק')

24 פרידלנד שמואל, י"א "הריאלי", חיפה. 76,77,79*,80-84,85*,86-89,90* (43 נק')

25 קושניר ראובן, י' "הריאלי", חיפה. 77,79,85*,87. (10 נק')

26 קריב עודד, י"ב עירוני ה', ת"א. 76,77,79-90. (47 נק')

27 רוזנברג רפאל, י"ב תיכון עירוני ה', ת"א. 80-83,87,88*,89,90*. (29 נק')

28 רז אהוד, י' "הריאלי", חיפה. 77,79-83,85-87,88*,89,90. (40 נק')

29 רשף (רזניק) שמואל, י"ב תיכון עירוני ט', ת"א. 79*,80,81,82*,83, 84,87,88,89,90. (34 נק')

30 שהרון שלח, י"ב "תיכון חדש", ת"א. 76**,77,79-83,85-90. (42 נק')

התכן

הציורים בוצעו במחלקה לשרטוט ותכנון של בית הספר המקצועי ע״י הטכניון
בהדרכתו של מר א. חריש

כתובת המערכת:
א. גינזבורג, המחלקה למתמטיקה, הטכניון, חיפה.

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.
מחיר התימה ל־4 חוברות 1.80 ל״י.