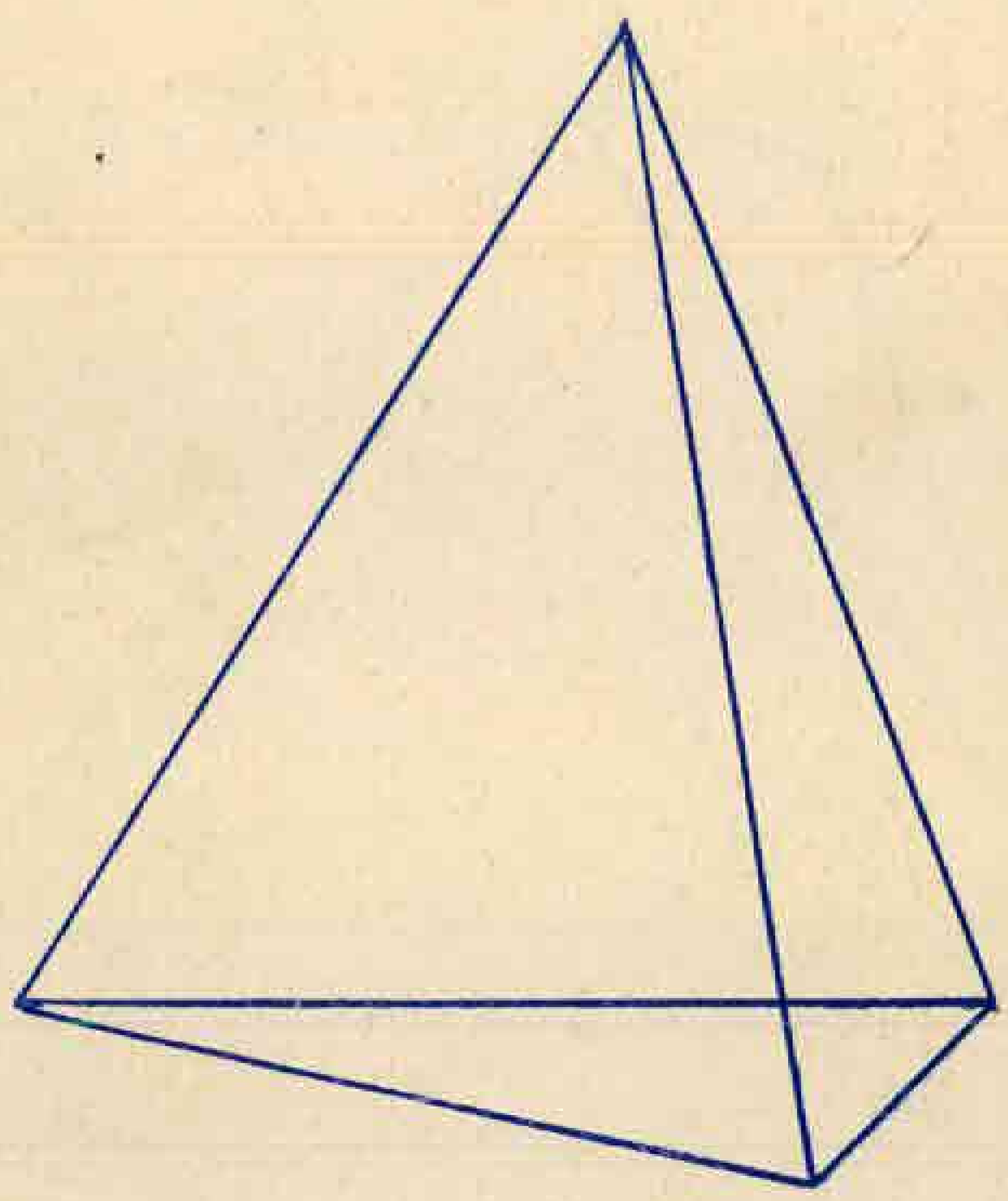
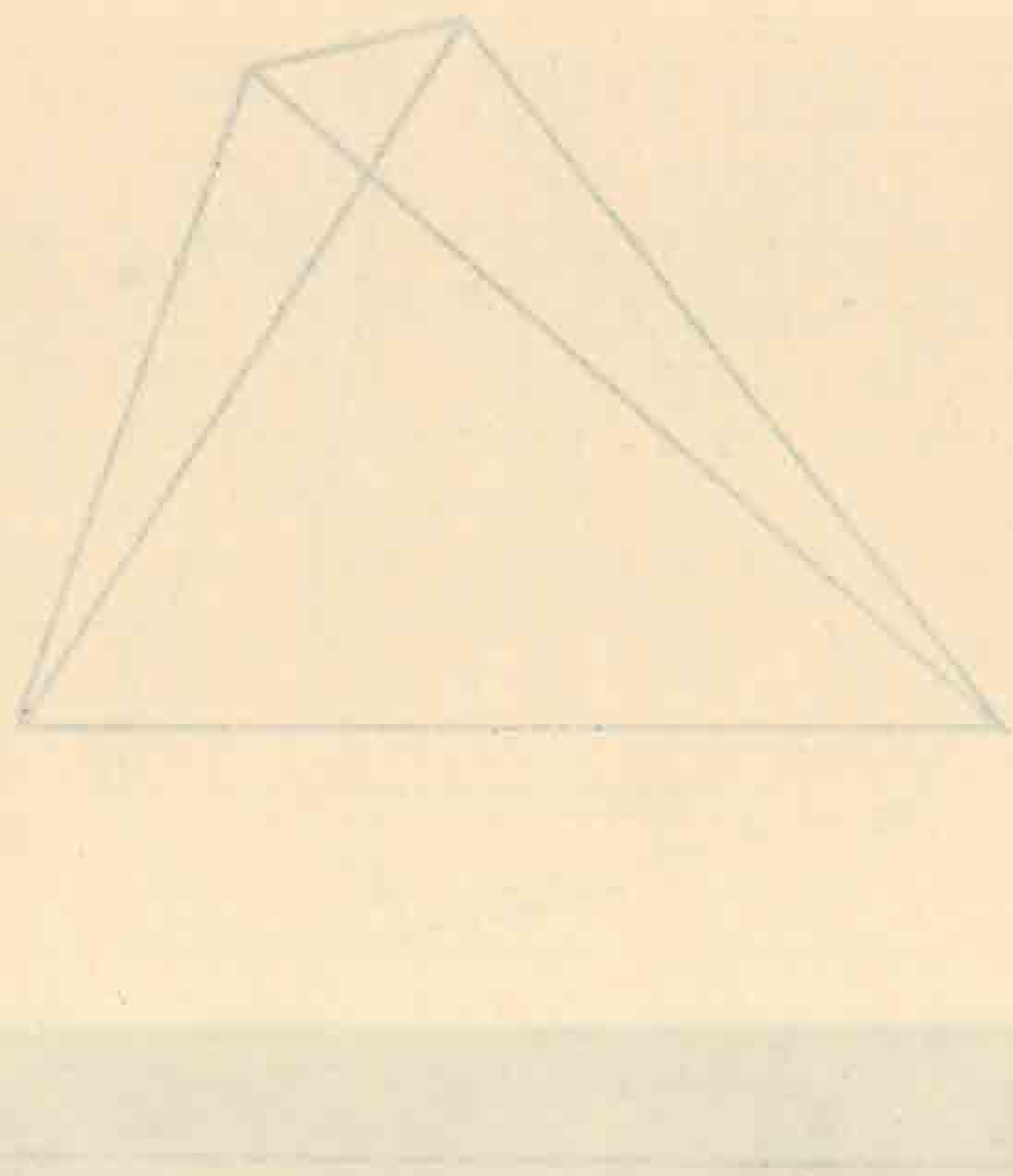
מלא, אין אינדקס

גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 2 — ת״א. תשרי תשכ״ג - אוקטובר 1962 — מס׳ 1

יוצא לאור בחסות
ה„אגוד למתמטיקה בישראל״



דבר המערכת אל הקורא

עם חדוש שנת הלמודים מוגשת לכם בזה חוברת ראשונה של כרך ב' של "הגליונות".

מטרת "הגליונות" היא לפתח את המחשבה המתמטית ולהרחיב את ההשכלה המתמטית. ישנם פרקים מענינים וחשובים במתמטיקה שאין פנאי בבית הספר התיכון לטפל בהם וחלק מהם מקופח אף בבית הספר הגבוה מאותה הסיבה. השלמה בפרקים אלה נוטלים על עצמם "הגליונות".

שמענו בזמן האחרון בקרת שרמת המאמרים גבוהה מדי. השתדלנו הפעם ואף נשתדל להבא לספק חומר גם לתלמידי הכתות הנמוכות. ברור שתלמידי כתות ט', י', יוכלו לשמור לעצמם את חוברותיהם ולעיין במאמרים הקשים להם בשנים הבאות.

ל"גליונות" יש מסורת של כעשרים שנה. בשנות הארבעים החלו להופיע הגליונות (בשם "דפים") ובין פותרי הבעיות תמצאו שמות של אנשים התופסים היום מקומות כמרצים ופרופסורים באוניברסיטה, בטכניון ובמכון וייצמן. כל אלה עשו את צעדיהם הראשונים ב"גליונות".

נסו ללכת בעקבותיהם!

בעיה ופתרונה

נניח שכדור הארץ כדור מושלם ורק יבשות משתרעות לאורך קו המשוה, אשר ארכו כידוע 40000000 מטר. רוצים להתקין קו טלפון לארכו על עמודים כך שהוא יהווה מעגל מושלם. מתברר שאורך החוט הנמצא רק 40000010 מטר. מה יהיה גבה העמודים? האם יוכל זבוב לעבור מתחת לקו?

תשובה: אפילו בן אדם בגובה של 1,5 מטר בערך יוכל לעבור בכל מקום. יהי מחוג כדור הארץ r וגובה העמודים h, אזי יהיה אורך קו המשוה $2\pi r$ ואורך הקו $2\pi r+10 = 2\pi (r + h)$
מכאן $h= \frac{10}{\pi} \approx 1,5\ m$.

מתברר שגובה העמודים בלתי תלוי ברדיוס כדור הארץ, אלא רק בתוספת ההיקף שהוא 10 מטר.

שתי הוכחות חדשות של אי השויון
בין הממוצע האריתמטי לבין הממוצע הגיאומטרי
של n מספרים

ל.נ. פוזנר.

יהיו a_1 ו-a_2 שני מספרים חיוביים. נסמן ב- m את הממוצע האריתמטי וב- g את הממוצע הגיאומטרי שלהם, ז.א.:

$$m = \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad g = \sqrt{a_1 a_2} \tag{1}$$

קיים אי-השויון:

$$m \geqslant g \tag{2}$$

את (2) אפשר להוכיח באופנים שונים. להלן שתי הוכחות כאלה:

א) נתון

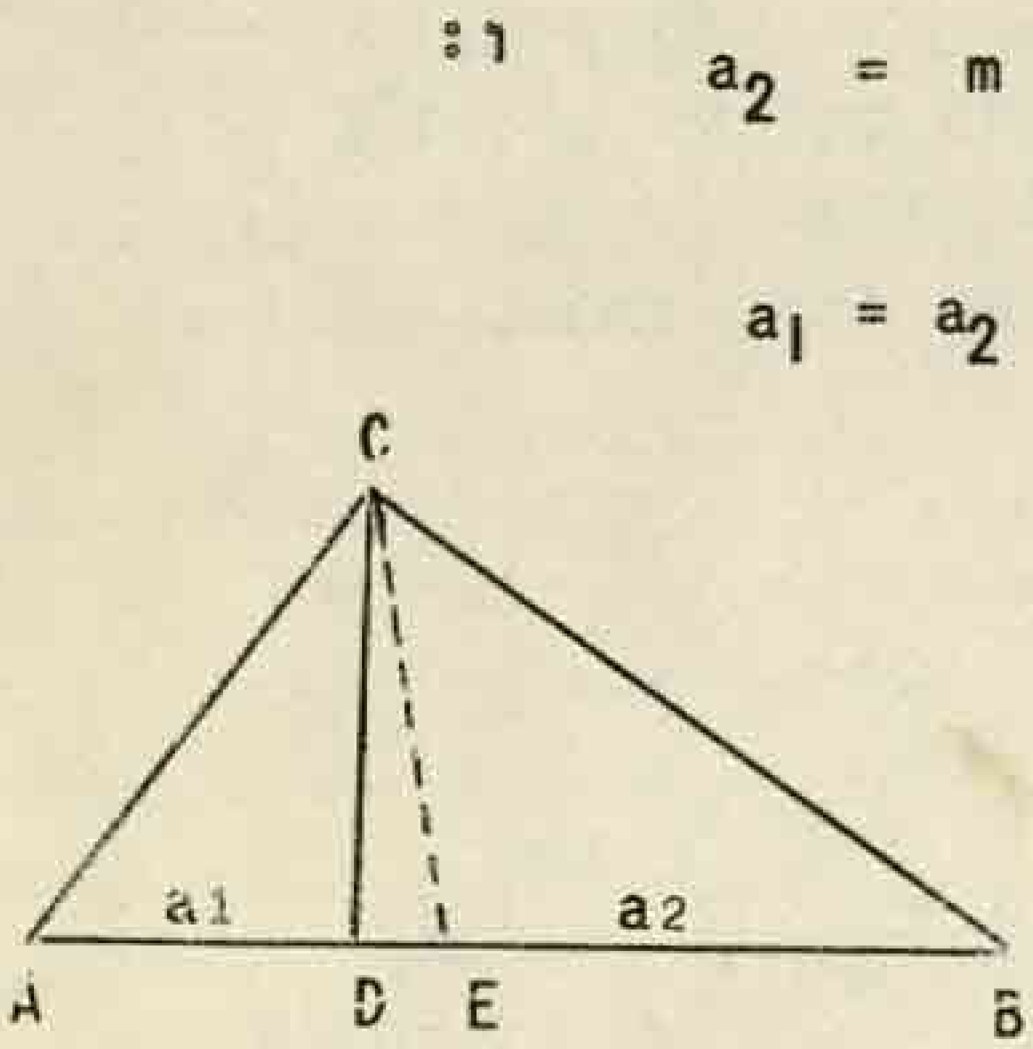
$$a_1 + a_2 = 2m \tag{3}$$

נסמן $a_1 = m + x$ אזי $a_2 = m - x$ ו:

$$g^2 = a_1 a_2 = m^2 - x^2 \leqslant m^2 \tag{4}$$

סימן השויון קיים רק כאשר $x = 0$ כלומר $a_1 = a_2$
מ-(4) נובע (2).

ב) הוכחה גיאומטרית.



במשולש ישר זוית ABC, CD הוא הגובה אל היתר.

נסמן $a_1 = AD$ $a_2 = DB$
התיכון CE במשולש שוה כידוע למחצית היתר, כלומר

$$CE = \frac{a_1 + a_2}{2} = m$$

מצד שני

$$CD = \sqrt{a_1 a_2} = g$$

(להוכחה נצל את דמיון המשולשלים $\triangle CDB$ ו- $\triangle ADC$)
והיות והגובה קטן או שוה לתיכון נקבל

$$g \leqslant m$$

השויון אפשרי רק במשולש שוה שוקיים ז.א. כאשר $a_1 = a_2$

נשאלת השאלה, האם אי השויון

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} = m \qquad (5)$$

מתקיים גם עבור n מספרים חיוביים כלשהם $a_1, a_2, \ \ , a_n$

התשובה היא חיובית ולהלן ניתנות שתי הוכחות לכך, המבוססות על שמוש בעקרון האינדוקציה המתמטית השלמה.

תחילה נוכיח משפט עזר הנקרא אי השויון של ברנולי (Bernoulli) :

נתון $1 + h > 0$

הוכח $(1 + h)^n \geq 1 + nh$

(השויון קיים רק במקרים $n = 1$ או $h = 0$).

הוכחה: הנוסחה נכונה עבור $n = 1$

עבור $n = 2$: $(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 \geq 1 + 2h$

כיון ש- $h^2 \geq 0$ השויון מתקיים רק כאשר $h = 0$

נניח שעבור $n = k$

$$(1 + h)^k \geq 1 + kh$$

נכפיל אי שויון זה ב- $1 + h$, וכיון ש- $1 + h > 0$ תשמר מגמת אי-השויון מקבלים:

$$(1 + h)^{k+1} \geq (1 + kh)(1 + h) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h$$

מקיום הנוסחה עבור $n = k$ נובע, איפוא, קיומה עבור $n = k + 1$, לכן היא נכונה עבור כל n טבעי.

עתה נעבור להוכחת אי-השויון (5) בין הממוצעים האריתמטי והגיאומטרי.

את נכונותו עבור $n = 2$ הראינו לעיל (לגבי $n = 1$ אין מה להוכיח).

נניח, כעת שעבור $n = k$ קיים:

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = m$$

נסמן

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k + 1} = M$$

בהמשך נסמן $x = a_{k+1} - M$

ז.ו. $a_{k+1} = M + x$

נציג זאת ב-(6) ונקבל:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + M + x = (k+1) M$$

או $km + x = kM$

מכאן: $m = M - \frac{x}{k} = M\left(1 - \frac{x}{Mk}\right)$

נסמן עוד $\frac{x}{M} = b$, כלומר

$$m = M\left(1 - \frac{b}{k}\right) \qquad (7)$$

את הממוצע הגיאומטרי של $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$
נסמן ב- G

ונתבונן בבטוי

$$G^{k+1} = a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} = g^k a_{k+1}$$

לפי הנחת האינדוקציה

$$G^{k+1} \leqslant m^k a_{k+1} = m^k (M + x)$$

נציב לכאן את (7)

$$G^{k+1} \leqslant M^k \left(1 - \frac{b}{k}\right)^k (M + x) = M^{k+1} \left(1 - \frac{b}{k}\right)^k \left(1 + \frac{x}{M}\right) =$$

$$= M^{k+1} \left(1 - \frac{b}{k}\right)^k (1 + b) = M^{k+1} \left(1 - \frac{b}{k}\right)^k \left(1 + k\frac{b}{k}\right)$$

אבל לפי אי-שויון ברנולי $1 + k\frac{b}{k} \leqslant \left(1 + \frac{b}{k}\right)^k$

(מדוע?! $1+\frac{b}{k} > 0$)

$$G^{k+1} \leqslant M^{k+1}\left(1-\frac{b}{k}\right)^k\left(1+\frac{b}{k}\right)^k = M^{k+1}\left(1-\frac{b^2}{k^2}\right)^k \leqslant M^{k+1}$$

באופן סופי $G \leqslant M$ ז.א.

$$\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}} \leqslant \frac{1}{k+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1})$$

קיום אי-השויון עבור $n = k$ הבטיח את נכונותו במקרה $n = k+1$ ולפי האינדוקציה הוא נכון עבור כל מספר טבעי n.

(נזכיר שנית שעבור $n = 2$ אי-השויון הוכח באופן ישיר).

<u>הוכחה שניה:</u>

שוב נניח שהנוסחה נכונה עבור $n = k$

הפעם נצא מהממוצע הגיאומטרי: $g^k = a_1 a_2 \ldots a_k$

תמיד אפשר למצוא $x + 1 > 0$ כך שיתקיים:

$$a_{k+1} = g(1+x)^{k+1}$$

(כיון ש- g ו- a_{k+1} שניהם חיוביים!)

אזי $G^{k+1} = a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} = g^k \cdot g \cdot (1+x)^{k+1}$

או $G = g(1+x)$

לפי הנחת האינדוקציה

$$km = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geqslant kg$$

לכן $(k+1)M = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} \geqslant kg + g(1+x)^{k+1} =$

$$= g\,[k + (1+x)^{k+1}]$$

ע"י שמוש באי-שויון ברנוליי מקבלים

$$(k+1)\,M \geqslant g\,[k+1+(k+1)\,x] = g\,(1+x)\,(k+1) = (k+1)\,G$$

ומכאן $M \geqslant G$

אי השויון המבוקש הוכח, איפוא, עבור כל מספ טבעי n .

נסיים רשימה זו במספר שאלות ונמליץ לפני הקורא להתירן.

א) האם מההוכחות הנ"ל נובע שסימן השויון קיים רק עבור $n=1$ או $a_1 = a_2 = \dots = a_n$?

ב) הראה שאי השויון $g \leqslant m$ שקול למשפט הבא:

סכום n מספרים חיוביים, שמכפלתם שוה לאחד, איננו קטן מ- n .

ג) הוכח את המשפט הנ"ל באופן ישיר, מבלי להסתמך על אי השויון $g \leqslant m$.

ד) הממוצע ההרמוני h של n מספרים חיוביים מוגדר כדלקמן:

$$h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

הוכח:

$$h \leqslant g \leqslant m$$

על תכונות אחדות של שברים עשרוניים מחזוריים

י. דוד

כל ילד מכיר את "סימני ההתחלקות" הבאים: אם סכום ספרותיו של מספר טבעי (הכתוב בשטה עשרונית) מתחלק ב-3 (ב-9) - מתחלק אף המספר עצמו ב-3 (ב-9) ולהיפך.

רוב הקוראים מכירים גם את סימן ההתחלקות ב-11: מחברים ומחסרים לסרוגין את ספרות המספר החל מספרת היחידות. אם סכום זה מתחלק ב-11 אף המספר הנדון מתחלק ב-11. לדוגמא: 391935 מתחלק ב-11 משום ש-11=3-9++9+3-5 מתחלק ב-11.
יש לשער כי מרבית הקוראים אף יודעים להוכיח כללים אלה, או חלק מהם. אך מי מביניהם יודע לפתור את הבעיות הבאות:

1) (עיין "גליונות מתמטיקה" כרך א, חוב' 2, עמוד 12)
הוכח כי המספר $2^{2^5}+1=2^{32}+1$ מתחלק ב-641, מבלי לחשב את המספר.

2) בהפיכת השבר הפשוט $\frac{1}{7}$ לשבר עשרוני מתקבל השבר העשרוני המחזורי 0,142857. אם נטול את המחזור 142857, נפרידו לקבוצות (פעם לשתים, פעם לשלוש ופעם לשש):

1/4/2/8/5/7   14/28/57   142/857

ונסכם את המספרים המתקבלים בכל מקרה, נקבל:

1+4+2+8+5+7=27=3.9   14+28+57=99   142+857=999

האם התוצאות שנתקבלו הן מקריות בלבד? או יש סבה שתגרום לתוצאות דומות אף במקרים אחרים? - תכונות דומות מתגלות אם נטול את שש השאריות המופיעות בהפיכת 1/7 לשבר עשרוני.
השאריות הן: 1; 3; 2; 6; 4; 1

נכתבן כסדרן

132645

1/3/2/6/4/5   13/26/45   132/645

1+3+2+6+4+5=21=3.7   13+26+45=84=12.7   132+645=777

ואף יותר

3+6+5=2.7   1+2+4=7   1+6=3+4=2+5=7

אני משער שכל אחד סקרן לדעת את הסיבה לתוצאה מפליאה זו. בעיות מסוג זה שייכות לתורת המספרים.

בגליונות קודמים כבר פגש הקורא במאמרים על נושאים מתוך תורת המספרים, כגון במאמר על מספרים פיתגוריים ועל משפט פרמה (Fermat) . כמוכן נתקל בבעיות מתורת המספרים במדור התחרות המתמדת.

הגישה לבעיות מתוך תורת המספרים פחות שיטתית מאשר בענפים אחרים של המתמטיקה. לכן דורשת כל בעיה ובעיה מחשבה עצמית, פותחת אפשרויות לרעיונות עצמיים ועלולה להשאר בעיה פתוחה במשך דורות. בזה דומה תורת המספרים לגיאומטריה האלמנטרית.

בכל זאת פותחו שיטות וכללים שיעזרו בפתרון בעיות. נגיש בזה את המושג "קונגרואנציה" ושמושה בתורת המספרים.

כל המספרים להלן יהיו שלמים ועל פי רב אף טבעיים, אם לא יצוין אחרת.

<u>הגדרה</u> אם ההבדל $a-b$ בין שני מספרים a ו- b מתחלק במספר m נאמר כי a ו- b "קונגרואנטים מודולו m " ונסמן $a \equiv b \pmod m$ (קרי: a קונגרואנטי ל- b מודל ו- m)

ז.א. $a-b = qm$

כדי שההבדל $a-b$ יתחלק ב- m דרוש ומספיק שבחלקנו את a ואת b , כל אחד בנפרד, ב- m תתקבל אותה שארית. שהרי אם $b = q_2 m + s$ $a = q_1 m + M$

(m ו s הן השאריות המתקבלות בחלקנו ב- m את a ואת b בהתאמה) נקבל $a-b = (q_1-q_2)m + (M-s)$

מאחר ש- M ו- s קטנים מ- m , $(a-b)$ יתחלק ב- m אם ורק אם $M-s=0$ כלומר $M=s$

סמן הקונגרואנציה $\equiv$ (המשמש גם כסמן הזהות) דומה לסמן השויון =. ולא דרך מקרה. הקונגרואנציה מקימת חוקים רבים המקוימים בשויון;

א) חוק הרפלקסיביות. בדומה לעובדה שכל מספר שוה לעצמו אף כל מספר קונגרואנטי לעצמו $a \equiv a \pmod m$
שהרי $a-a = 0 \cdot m$

ב) חוק הסימטריות.

אם $a \equiv b \pmod{m}$ אף $b \equiv a \pmod{m}$

ג) חוק הטרנסיטיביות (ההעברה).

מתוך $a \equiv b \pmod{m}$ ו $b \equiv c \pmod{m}$ נובע $a \equiv c \pmod{m}$
(ב) ו(ג) נובעים באופן מידי מהגדרת הקונגרואנציה ומהתכונות המתאימות לגבי שויון.

בדומה למשואות נובע מתוך שתי הקונגרואנציות

$$(1) \quad a \equiv b \pmod{m}$$
$$(2) \quad c \equiv d \pmod{m}$$

ד) $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

ה) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$

ו) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ (אך לא תמיד $a^c \equiv b^d \pmod{m}$)

הוכחות: מ(1) ו(2) נובע

$$a = qm + b$$
$$c = q'm + d$$

ולכן

ד) $a \pm c = qm + b \pm (q'm + d) = (q \pm q')m + (b \pm d)$

ז.א. $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

ה) $a \cdot c = (qm+b)(q'm+d) = (qq'm+bq'+dq)m + bd$

$$a \cdot c \equiv bd \pmod{m}$$

ו) נובע מ(ה).

ומה לגבי חלוק, האם מ(1) ו(2) נובע $a/c \equiv b/d \pmod{m}$?
בדרך כלל אין מקום לשאלה זו, שהרי
a/c ו b/d לאו דוקא שלמים. נצטמצם איפוא למקרה בו
a/d ו b/d שלמים. כגון

$$32 \equiv 18 \pmod{7}$$
$$2 \equiv 9 \pmod{7}$$

ובאמת $\frac{32}{2} \equiv 16 \equiv 2 \equiv \frac{18}{9} \pmod{7}$.

אולם הדוגמא הבאה מאכזבת

$$28 \equiv 21 \pmod 7$$
$$14 \equiv 7 \pmod 7$$

ואילו

$$. \frac{28}{14} \equiv 2 \not\equiv 3 \equiv \frac{21}{7} \pmod 7$$

הסבה לכשלון החלוק בדוגמא האחרונה נעוצה בעובדה שהמחלקים 7, 14 קונגרואנטים ל-0 מודולו 7. בחלוק שנסינו לבצע יש כעין חלוק באפס. והרי גם לגבי משואות חל החלוק באפס.

ומה לגבי המקרה הבא:

$$15 \equiv 35 \pmod{10}$$
$$5 \equiv 5 \pmod{10}$$

ואילו

$$. \frac{15}{5} \equiv 3 \not\equiv 7 \equiv \frac{35}{5} \pmod{10}$$

מאחר ש-5 הנו גורם של 10 החלוק ב-5 אף הוא פסול (וכמובן גם חלוק ב-2 אסור בקונגרואנציה מודולו 10). כלל החלוק יהיה לכן

ז) חוק החלוק. אם $ac \equiv bd \pmod m$

ו $c \equiv d \pmod m$

ו- c (וממילא d . מדוע?) זר ל- m (כלומר אינו מכיל אף גורם משותף עם m) - יתקיים

$$a \equiv b \pmod m$$

הוכחה:

$$a - b = \frac{(a-b)cd}{cd} = \frac{acd - bcd}{cd} = \frac{(ac)d - (bd)c}{cd}$$

מהנתונים נובע, לפי כלל הכפל, $acd \equiv bdc \pmod m$
כלומר המונה $acd - bdc$ מתחלק ב- m . ומאחר שהמכנה cd זר ל- m אף המנה (השלמה!) $\frac{acd - bdc}{cd} = a-b$ מתחלקת ב- m . ז.א. $a \equiv b \pmod m$

מאחר שכל מספר קונגרואנטי לעצמו (חוק הרפלקסיביות) נקבל במקרה פרטי של (ז) את חוק הצמצום הבא:

ז1) אם $ac \equiv bc \pmod m$

ו- c זר ל- m - יתקיים

$$a \equiv b \pmod m$$

ואם c איננו זר ל- m ? - כפי שראינו לעיל, הצמצום בצורה המופיעה ב-(1ז) פסול. אולם ביכלתנו ל"הכשירו".

יהי f המספר הגדול ביותר המחלק את m ואת c גם יחד. f נקרא "המחלק המשותף המכסימלי של m ו- c" ונהוג לסמנו $f = (m, c)$. ברור שהעובדה הנזכרת ב-(1ז) כי c זר ל- m יכולה להכתב בצורה $(m, c) = 1$. כלומר המספר הגדול ביותר המחלק את m ואת c גם יחד הוא 1. במלים אחרות: אין ל- m ול- c מחלק משותף אמיתי.

ח) כלל הצמצום. אם $ac \equiv bc \pmod{m}$ $c \neq 0$

אזי $a \equiv b \pmod{\frac{m}{f}}$

בהיות $f = (m, c)$

הוכחה.

לפי הנתון $ac - bc = qm$

נחלק ב $f = (m, c)$

$$\frac{ac}{f} - \frac{bc}{f} = q\frac{m}{f}$$

$$\frac{c}{f}(a-b) = q\frac{m}{f}$$

f מחלק את m ואת c. לכן m/f ו c/f שלמים. אך m/f ו- c/f הנם מספרים זרים, שהרי אלו היה להם גורם משותף e היה ef מחלק משותף ל- m ול- c בנגוד לנתון כי $f = (m, c)$. לכן $(a-b)$ מתחלק ב- $\frac{m}{f}$

ז.א. $a \equiv b \pmod{\frac{m}{f}}$

לדוגמא: $16 \equiv 40 \pmod{6}$

אם ברצוננו לצמצם ב-8 מחובתנו לחלק את 6 ב-$(8,6)=2$

לכן $2 \equiv 5 \pmod{3}$.

נביא מספר שמושים בכללים שהוכחנו לעיל.

ברור ש $10 \equiv 1 \pmod{3}$ ואף $10 \equiv 1 \pmod{9}$. מכאן לפי כלל ו: $10^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{3}$ ואף $10^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{9}$.

מכאן נובעים מיד סימני ההתחלקות ב-3 וב-9. תהיינה a_0, a_1, ..., a_n ספרותיו של מספר s, הכתוב בשיטה עשרונית, החל מספרת היחידות:

$$s = a_0 + a_1 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n$$

ולכן $s \equiv a_0 + a_1 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 \equiv$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod{3}$

וגם $\pmod{9}$

כלומר $s - (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ מתחלק ב-3 (ב-9) ולכן s יתחלק ב-3 (ב-9) אם ורק אם סכום ספרותיו יתחלק ב-3 (ב-9).

לעומת זאת $10 \equiv -1 \pmod{11}$

$10^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod{11}; 10^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{11}$ ובאופן כללי

$10^{2n+1} \equiv -1 \pmod{11} \qquad 10^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$

לכן

$s = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$

בזאת הוכחנו את סימני ההתחלקות המוזכרים בראש המאמר.
אפשר להמציא בדרך זו סימני התחלקות לכל מספר. אולם השאלה היא אם הם יהיו מעשיים, כלומר די פשוטים שיהיה נח להשתמש בהם.
נעבד לדוגמא סימן ההתחלקות ב-7:

$10 \equiv 3 \pmod{7}$

לפי כלל $10^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \pmod{7}$

לפי כלל (ה) $10^3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}$

" " $10^4 \equiv (-1) \cdot 3 \equiv -3 \pmod{7}$

$10^5 \equiv (-3) \cdot 3 \equiv -9 \equiv -2 \pmod{7}$

$10^6 \equiv (-2) \cdot 3 \equiv -6 \equiv 1 \pmod{7}$

והחל מ-10^7 תתקבלנה מחדש אותן שש קונגרואציות, באותו סדר:

$10^7 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{7}$

לכן $a_0 + a_1 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_6 \cdot 10^6 + a_7 \cdot 10^7 + \ldots \equiv$
$\equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + 3a_7 + \ldots \pmod{7}$

לאור תוצאה זו ינסח נא הקורא סימן התחלקות ב-7 ויחליט אם כדאי להשתמש בסימן זה או שמא יותר פשוט לבדוק את התחלקות המספר באופן ישיר.

נוכיח עתה, כמבוקש בראש המאמר, כי $2^{32}+1$ מתחלק ב-641.
נצא משתי הקונגרואנציות הבאות:

$$5.2^7 \equiv 640 \equiv -1 \pmod{641} \tag{3}$$

$$5^4 \equiv 625 \equiv -16 \equiv -2^4 \pmod{641} \tag{4}$$

נעלה את (3) בחזקה 4

$$5^4 \cdot 2^{28} \equiv (-1)^4 \equiv 1 \pmod{641}$$

נציב לפי (4) $-2^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$

$$2^{32} \equiv -1 \pmod{641}$$

$$2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$$

כלומר $2^{32}+1$ מתחלק ב-641.

ושתי דוגמאות נוספות:

הוכח כי $3^{96} \equiv 1 \pmod{97}$

הוכחה: $3^4 \equiv 81 \equiv -16 \equiv -2^4 \pmod{97}$ ומכאן $3^{20} \equiv -2^{20} \pmod{97}$

כמו כן $3.2^5 \equiv 3.32 \equiv 96 \equiv -1 \pmod{97}$ ומכאן $3^4.2^{20} \equiv (-1)^4 \equiv 1 \pmod{97}$

מכפל שתי התוצאות $\therefore\ 3^{24}.2^{20} \equiv -2^{20} \pmod{97}$

לפי כלל הצמצום $3^{24} \equiv -1 \pmod{97}$

נעלה בחזקת 4 $3^{96} \equiv 1 \pmod{97}$ מ.ש.ל.

הוכח כי $5^{100} \equiv 1 \pmod{101}$

הוכחה:

$$5^3 \equiv 125 \equiv 24 \equiv 2^3.3 \pmod{101} \tag{5}$$

$$3^4 \equiv 81 \equiv -20 \equiv -2^2.5 \pmod{101} \tag{6}$$

נעלה (5) בחזקת 4 $5^{12} \equiv 2^{12}.3^4 \pmod{101}$

נציב את (6) $5^{12} \equiv 2^{12}.(-2^2).5 \equiv -2^{14}.5 \pmod{101}$

נצמצם ב-5 (זר ל-101) $5^{11} \equiv -2^{14} \pmod{101}$ (7)

כמוכן $2^2.5^2 \equiv 100 \equiv -1 \pmod{101}$

נעלה בחזקת 7 $2^{14}.5^{14} \equiv -1 \pmod{101}$

נציב לפי (7) -5^{11} במקום 2^{14} ונקבל

$$-5^{11} \cdot 5^{14} \equiv -1 \pmod{101}$$

כלומר
$$5^{25} \equiv 1 \pmod{101}$$

ולכן
$$5^{100} \equiv 1^4 = 1 \pmod{101}$$
מ.ש.ל.

שני התרגילים האחרונים מעוררים את ההשערה כי יש כאן חוקיות כוללת. ובאמת הוכיח פרמה (Fermat) את המשפט הבא, הכולל את שני התרגילים כמקרים פרטיים.

<u>משפט פרמה</u> יהי p מספר ראשוני ו- a מספר כלשהו זר ל- p אזי תמיד יתקיים $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

בדוגמא לעיל היה המספר הראשוני $p = 97$ (או 101)

ולכן $a^{96} \equiv 1 \pmod{97}$

העובדה שבחרנו $a = 3$ אינה מוסיפה ואינה גורעת.

נוכיח עתה את משפט פרמה.

ברור שאם $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ אז $a^p \equiv a \pmod{p}$
אנו נוכיח כי $a^p \equiv a \pmod{p}$ לגבי כל a (אף אם איננו זר ל- p).
אך אם a זר ל- p נוכל להשתמש בכלל הצמצום ונקבל $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

נוכיח איפוא כי $a^p \equiv a \pmod{p}$. זאת נוכיח באינדוקציה (לגבי a). אם $a=1$ המשפט נכון $1^p \equiv 1 \pmod{p}$ נניח כי $a^p \equiv a \pmod{p}$ ונוכיח על סמך הנחה זו כי $(a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p}$
נפתח את האגף השמאלי לפי בינום ניוטון. מקדמי כל האברים פרט לראשון ולאחרון מתחלקים ב- p . כי

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} \qquad (k=1,2,\dots p-1)$$

המונה מתחלק ב- p . כל גורמיו הראשוניים של המכנה קטנים מ- p (כי $p-k<p$ ו $k < p$) לכן אף המנה השלמה $\binom{p}{k}$ מתחלקת ב- p , שהרי מספר ראשוני אינו מתחלק בגורם קטן הימנו.

מכאן נובע כי $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p}$

אך לפי הנחת האינדוקציה $a^p \equiv a \pmod{p}$ ולכן

$$(a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p}$$
מ.ש.ל.

בדוגמה שהובאה לעיל למשפט פרמה $5^{100} \equiv 1 \pmod{101}$
ראינו כי אף $5^{25} \equiv 1 \pmod{101}$. ובאמת אין משפט פרמה

טוען כי $p-1$ הוא המעריך הקטן ביותר הפותר את המשוואה $a^x \equiv 1 \pmod p$. לא קשה להוכיח שאם d הוא המעריך הקטן ביותר המקים זאת חיב d לחלק את $p-1$ (הוכח זאת).

נשתמש עתה במשפט פרמה לחקירת התכונות של שבר עשרוני מחזורי המתקבל משבר פשוט $1/p$ בו המכנה מספר ראשוני, כגון $1/7$. אם $p=2$ או $p=5$ יתקבל שבר עשרוני סופי $0,5$ או $0,2$ בהתאמה. נניח אם כך כי $p \neq 2$ ו- $p \neq 5$, ז.א. p זר ל-10. ממשפט פרמה נובע כי $10^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

יהי d המעריך הקטן ביותר המקים $10^x \equiv 1 \pmod p$
לפי האמור לעיל חיב d לחלק את $p-1$ ובכך

$$10^d \equiv 1 \pmod p$$

ז.א.,

$$10^d = 1 + N \cdot p$$

$$\frac{10^d}{p} = \frac{1}{p} + N$$

אם נפתח את $\frac{1}{p}$ ואת $\frac{10^d}{p}$ לשברים עשרוניים, נובע מהשויון האחרון כי שני המספרים שנקבל יהיו זהים בחלקם אחרי הפסיק, שהרי ההפרש ביניהם הנו מספר שלם N. אבל $10^d/p$ אינו אלא כפולה של $1/p$ ב- 10^d כלומר, הוא מתקבל מ $1/p$ ע"י הזזת הפסיק ב d ספרות ימינה. מסקנה: $1/p$ הנו שבר מחזור בעל מחזור של d ספרות לכל היותר. אולם אלו היה המחזור קטן מ- d היה מספר d' קטן מ- d אשר יקים

$$\frac{10^{d'}}{p} = \frac{1}{p} + N$$

$$10^{d'} = 1 + Np$$

$$10^{d'} \equiv 1 \pmod p$$

והלא הנחנו כי d הוא המעריך הקטן ביותר המקים זאת.

במקרה $1/7$ מתקבל מחזור בעל 6 ספרות, כלומר $d = p-1$ לעומת זאת במקרה $1/11 = 0,0909...$ המחזור הוא בעל שתי ספרות, ובאמת 2 מחלק את $10 = 1 - 11$.

נפנה עתה לתכונות המחזור המודגמות לגבי 1/7 בראש המאמר. יהי השבר z/p ונניח כי מחזורו מכיל מספר זוגי של ספרות $2m$. נסמן את המחזור ב-Q ונפצלו לשני חלקים כל אחד בן m ספרות

$$Q \equiv A|B \equiv a_1a_2\dots a_m|b_1b_2\dots b_m$$

(למשל ב-1/7 קבלנו 142|857; A הוא המספר 142; $B = 857$

לכן $Q = A\cdot 10^m + B$ (לדוגמא $142857 = 142\cdot 10^3 + 857$)

את ערך z/p נוכל להביע ע"י Q (נניח כי $z<p$) שהרי

$$\frac{z}{p} = \frac{Q}{10^{2m}} + \frac{Q}{(10^{2m})^2} + \frac{Q}{(10^{2m})^3} + \dots$$

לפי נוסחת הסכום של טור גיאומטרי אין סופי

$$\frac{z}{p} = \frac{Q}{10^{2m}(1-\frac{1}{10^{2m}})} = \frac{Q}{10^{2m}-1}$$

כפי שהוכח לעיל $10^{2m} \equiv 1 \pmod p$

ז.א. $10^{2m}-1 = (10^m+1)(10^m-1)$ מתחלק ב-p .

ומאחר ש- $2m$ המעריך הקטן ביותר המקים $10^x \equiv 1 \pmod p$ הרי $10^m - 1$ איננו מתחלק ב- p ולכן 10^m+1 מתחלק ב- p .

לכן $\dfrac{z\,(10^m+1)}{p} = \dfrac{(A\,10^m+B)\,(10^m+1)}{10^{2m}-1} = \dfrac{A\,10^m+B}{10^m-1} = A+\dfrac{A+B}{10^m-1}$

מספר טבעי.

ומאחר ש- A מספר טבעי הרי גם $(A+B)\,/\,(10^m-1)$ מספר טבעי. A ו B הנם כל אחד מספר בן m ספרות ו $10^m - 1$ הנו מספר בן m ספרות כולן 9. לכן A ו B אינם גדולים מ $10^m - 1$. אלו היו A ו B שוים ל-10^m-1 היתה המנה $(10^m - 1)$ $(A+B)$ שוה 2. אך במקרה כזה היו כל ספרות השבר המחזורי 9. ז.א. המחזור היה בן ספרה אחת ולא $2m$ כפי שהנחנו. לכן ערך המנה קטן מ-2, כלומר ערכה 1.

$$\frac{A + B}{10^m-1} = 1$$

$$A + B = 10^m-1 = 999\dots9$$

כפי שראינו בראש המאמר לגבי המקרה הפרטי 1/7.

יתר על כן, אם $a_1a_2\ldots a_m + b_1b_2\ldots b_m = 99\ldots9$

הרי $a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 = \ldots = a_m+b_m = 9$

ולכן $a_1+a_2+\ldots+a_m+b_1+b_2+\ldots+b_m = m9$

במקרה ואורך המחזור Q מתחלק ב- k , כלומר ארכו km
ואנו מפצלים את Q ל- k קבוצות שוות אורך $A_1|A_2|\ldots|A_k$
נקבל $Q = A_1\cdot10^{(k-1)m}+A_2 10^{(k-2)m}+\ldots+A_k$

$$\frac{z}{p} = \frac{Q}{10^{km}-1} = \frac{A_1\cdot10^{(k-1)m}+A_2 10^{(k-2)m}+\ldots+A_k}{10^{km}-1} =$$

$$= \frac{A_1(10^{(k-1)m}-1)+A_2(10^{(k-2)m}-1)+\ldots+A_k(1-1)+A_1+A_2+\ldots+A_k}{10^{km}-1}$$

$$(10^m)^k-1 = 10^{km}-1$$

$$10^{km}-1 = (10^m-1)(10^{m(k-1)}+10^{m(k-2)}+\ldots+1)$$

הואיל ו 10^m-1 איננו מתחלק ב-p , שהרי km הוא המעריך הקטן ביותר המביא לידי כך, חיב הגורם השני להתחלק בהם.

לכן המספר הבא שלם:

$$\frac{z(10^{m(k-1)}+\ldots+1)}{p} = \frac{A_1(10^{(k-1)m}-1)+A_2(10^{(k-2)m}-1)+\ldots+A_1+A_2+\ldots A_k}{10^m-1}$$

כל הבטויים $10^{\lambda m}-1$ מתחלקים ב 10^m-1. לכן משלמות השבר כולו נובע כי $(A_1+A_2+\ldots+A_k)/(10^m-1)$ מספר שלם.

ז.א. $A_1+A_2+\ldots+A_k = C\cdot 99\ldots9$

כפי שראינו בהדגמות בראש המאמר.

אשר לתכונות השאריות המופיעות בהפיכת שבר רגיל לשבר עשרוני (במקרה של $1/7$: 326451) נחלק את מספרם $2m$ לשתי קבוצות $r_1\ r_2\ \ldots\ r_m|r_{m+1}\ldots r_{2m}$. ידוע לנו כבר ש 10^m+1 מתחלק ב p, לכן $10^m\equiv-1 \pmod p$. נכפיל את שני האגפים בשארית כל שהיא r_i : $r_i\ 10^m \equiv -r_i \pmod p$
קל לראות ש$r_i\ 10^m \equiv r_{i+m} \pmod p$, כי כל הכפלה ב-10 מביאה אותנו לשארית הבאה. לכן: $r_{i+m} \equiv -r_i \pmod p$

ו $r_{i+m} + r_i \equiv 0 \pmod p$, כפי שהראתי בדוגמא בהתחלת המאמר: 3+4=2+5=6+1=7. במקרה ש $d = k\cdot m$ תנסו לבדכם להוכיח:

$$r_i+r_{i+m}+r_{i+2m}+\ldots+r_{i(k-1)m} \equiv 0 \pmod p$$

למשל: 32/64/51: 3+6+5=2.7, 2+4+1=1.7, 3+2+6+4+5+1=3.7.

לגבי שברים אשר מכניהם חזקות של מספרים ראשוניים או מכפלות של מספרים ראשוניים, אפשר למצוא כללים דומים אשר דורשים ידיעה של משפט פרמה הכללי. תהיה לנו הזדמנות במאמר אחר לטפל בהם.

תרגילים: 1) בדוק את אורך המחזור ואת התכונות הנ"ל לגבי השברים:

$$\frac{1}{17} ; \frac{1}{19} ; \frac{1}{37} ; \frac{1}{41} ;$$

2) כפי שראינו לעיל 142857 הוא המחזור של 1/7.
כפול מספר זה לפי הסדר ב- 6,5,4,3,2 והוכח שתקבל כל פעם מספר בעל אותן הספרות בתמורה. ציקלות, כלומר כל פעם מתחילים בספרה אחרת, ממשיכים אחריה לפי הסדר הקודם ואחרי הספרה האחרונה מתחילים שוב בספרה הראשונה של המחזור.
(למשל 2.142857=285714) מהי, לפי דעתך, הסיבה?
כעת הכפל את המחזור ב-7. האם התוצאה מפתיעה?

תחרות במתמטיקה של תלמידי כתות הסיום של בתי הספר התיכוניים בישראל על סטיפנדיה על שם פרופסור ירמיהו גרוסמן

בל"ג בעומר השנה התקיימה בפעם השלישית התחרות במתמטיקה על סטיפנדיה על שם פרופסור ירמיהו גרוסמן, המאורגנת ע"י הפקולטה למדעים של הטכניון.

בתחרות השתתפו 48 תלמידים מבתי ספר שונים בארץ. דברי פתיחה השמיעה פרופ. ע. ז'בוטינסקי.

הנבחנים נתבקשו לפתור את השאלות הבאות:

יש לפתור את כל השאלות.
משך התחרות: $2\frac{1}{2}$ שעות.
אסור להשתמש בכל חומר עזר פרט ללוחות לוגריתמים.

1. הוכח: $575^{1962} + 24^{1962} \neq n^2$
כאשר n מספר שלם.

2. א) צייר על אותו הנייר את הגרפים של שלוש הפונקציות: -

1. $y = x$ 2. $y = \frac{1}{1-x}$ 3. $y = \frac{x-1}{x}$

(השתמש בנייר מילימטרי)

הישר $y = a$ $(a \neq 0,\ a \neq 1)$ הותך את שלשת הגרפים בשלש נקודות.

דרך כל אחת מהן העבר ישר מקביל לציר ה- y .
שלשת ישרים אלה חותכים את שלשה הגרפים כל אחד בשלש נקודות (כולל הנקודה שעל הישר $y = a$).
באופן זה מתקבלות 9 נקודות.

הוכח כי הן נמצאות על שלשה ישרים מקבילים לציר ה-x, כשעל כל ישר שלש נקודות.

ב) לשלש הפונקציות הנ"ל הוסף את שלש הפונקציות: -

4. $y = 1 - x$ 5. $y = \frac{1}{x}$ 6. $y = \frac{x}{x-1}$

אם במקרה זה תבצע את הבניות כנ"ל, 36 הנקודות שתתקבלנה תמצאנה על 6 ישרים מקבילים לציר ה-x, כשעל כל ישר שש נקודות.

הסבר תופעה זו.

3. על מישור P עומד חרוט שקוטר בסיסו שוה לקו היוצר שלו ושגובהו הוא h . על אותו מישור מונחים גם שלשה כדורים שוים, כך שכל אחד משיק לשנים האחרים ולמעטפת הצדדית של החרוט.

מצא את רדיוסי הכדורים.

עבודה טובה מאד הגיש דניאל לובזנס תלמיד כתב י"ב בבית ספר "הוגים" בחיפה והוא יזכה בסטיפנדיה בסך 600 ל"י במידה וילמד בקורס א' במגמה למתמטיקה-פיסיקה של הפקולטה למדעים בטכניון.

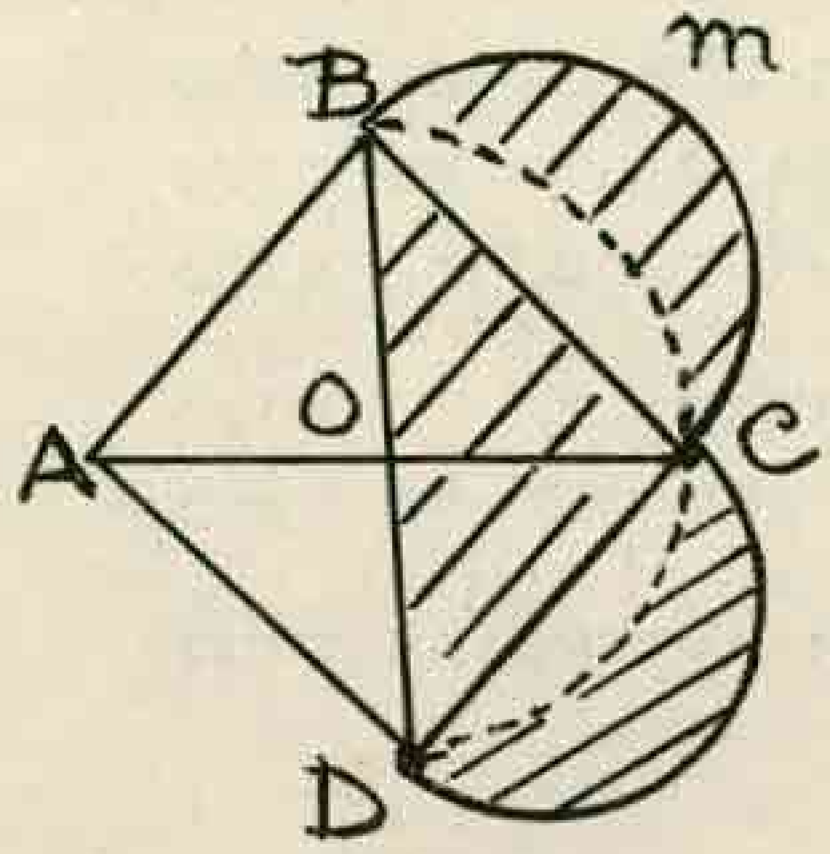
ברכתנו לדניאל, אשר היה גם האלוף של המחזור הראשון של התחרות המתמדת לפתרון שאלות של "גליונות למתמטיקה".

לא נמצאו עבודות נוספות ראויות לציון.
אנו מציעים בזה לקוראינו לפתור את שאלות התחרות. שמות הפותרים נכון את כל 3 השאלות יפורסמו בגליון הבא. את הפתרונות יש לשלוח לפי כתובת המערכת עד יום 20.11.62.
בגליון הבא נפרסם את הפתרונות של השאלות הנ"ל.

מתולדות המספר π (רשימה שניה)*)

ברשימה זו נתעכב על נסיונו הבלתי מוצלח, אבל מעניין של מתמטיקאי יוני היפוקריט (המאה ה– V לפני הספירה) לבצע את תרבוע העגול (בנית רבוע והשטח לעגול נתון) ועל נוסחה אחת לחשוב π של המתמטיקאי הצרפתי ויט (1504–1603 Viète).

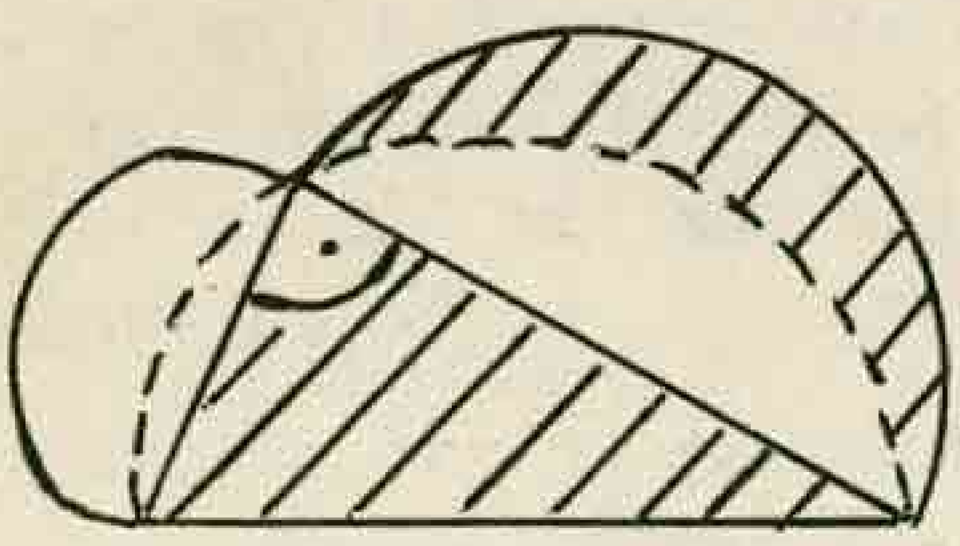
היפוקריט יצא מהבניה הבאה (ציור מס' 1):



ציור מס' 1

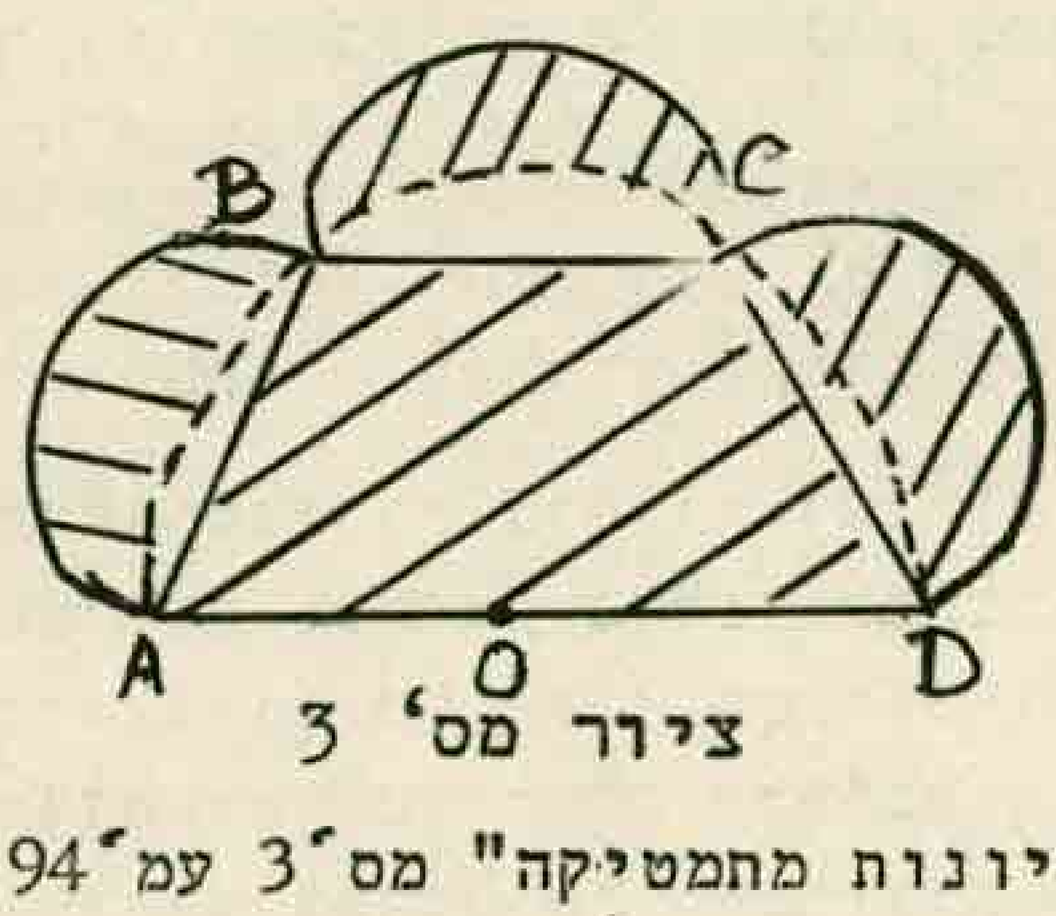
יהא ABCD רבוע ו– O מרכזו. נבנה על BC ו– CD כעל קטרים חצאי עגולים וסביב המרכז O נבנה חצי עגול BCD. שטח חצי העגול BmC מתיחס לשטח חצי העגול BCD כמו $\left(\frac{BC}{BD}\right)^2$ כלומר כמו $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

לכן שטח חצי העגול BmC שוה לשטח רבע העגול OBC נחסיר מכל אחד מהשטחים האלה את המקטע (הלא מקווקו) ונקבל ששטח הירח המקווקו שוה לשטח המשלש OBC ז.א. שטח שני הירחים שוה למחצית שטח הרבוע.


ציור מס' 2

הקורא לא יתקשה להרחיב משפט זה למקרה של הירחים הבנויים על הנצבים במשלש ישר זוית (ראה ציור מס' 2).

היפוקריט התבונן במשושה משוכלל עם הירחים המתאימים (בציור מס' 3 נתון חצי משושה כזה). לפי הנתון AO = AB מכאן ששטח חצי העגול שמרכזו ב– O ורדיוסו AO גדול פי 4 משטח כל אחד מחצאי העגולים הנשענים על צלע המשושה המשוכלל.



ציור מס' 3

---

*) הרשימה הראשונה הופיעה ב"גליונות מתמטיקה" מס' 3 עמ' 94.

נסמן את שטח כל אחד הירחים ב- S_1 ושטח חצי העגול שקטרו AB ב- S_2 . קיים:

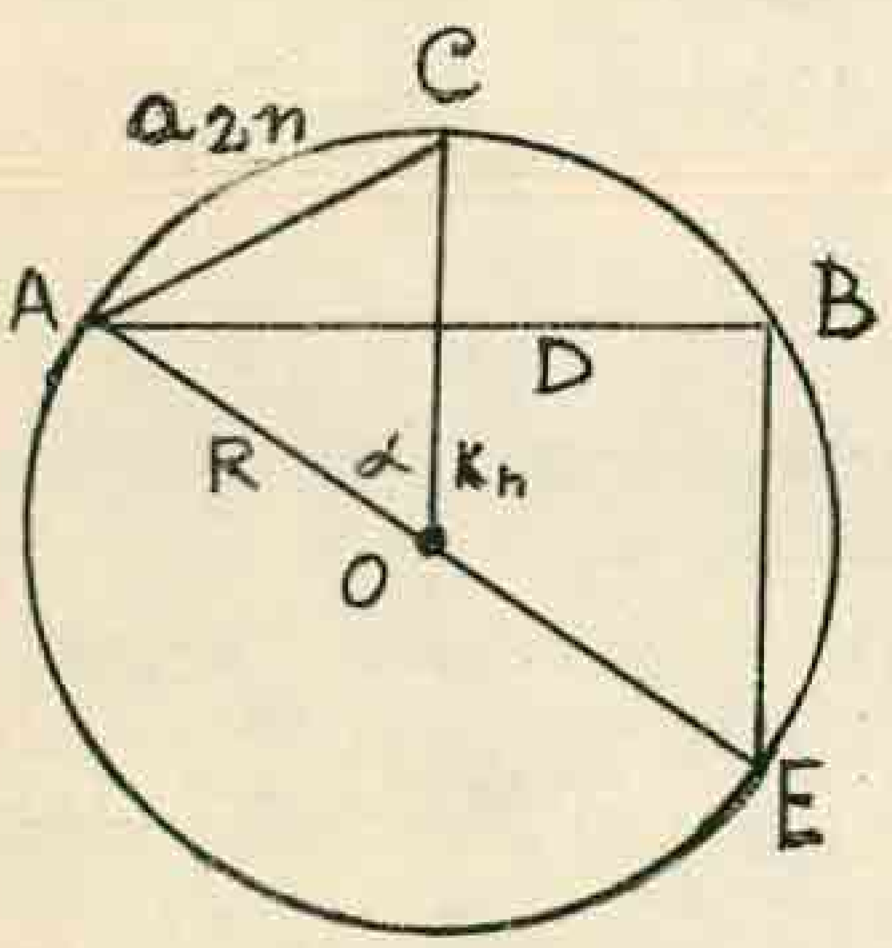
$$S_{\triangle ABCD} = S_{\triangle ABCDO} - 3(S_2 - S_1) = 4S_2 - 3S_2 + 3S_1 = S_2 + 3S_1$$

ומכאן:

$$S_2 = S_{\triangle ABCD} - 3S_1$$

שטח הטרפז אפשר לחשב. היפוקריט הניח שבדומה לרבוע גם במקרה דנן אפשר לבנות את שטח הירחים באמצעות שטח הטרפז וכאן הוא בא למסקנה שהצליח לבנות שטח חצי עגול S_2

שגיאתו היתה בהנחתו על אפשרות בנית שטחי הירחים לפי שטח הטרפז. הדבר נכון עבור רבוע, אבל לא עבור משושה משוכלל.



ציור מס' 4

נעבור כעת לנוסחת ויט. נתבונן בציור מס' 4. נסמן ב- a_n צלע של מצולע משוכלל בעל n צלעות החסום במעגל שרדיוסו R . הקטע OD יסומן ב- K_n. יסמן את שטח המצולע המשוכלל הנ"ל.

$$S_{\Delta AOC} = \frac{S_{2n}}{2n} \; ; \; S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_n}{n}$$

מכאן נובע:

$$S_{\Delta AOD} : S_{\Delta AOC} = S_n : S_{2n}$$

$$S_{\Delta AOD} : S_{\Delta AOC} = OD : OC$$

(לשניהם גובה משותף AD).

מכאן $\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{OD}{OC} = \frac{K_n}{R}$

(הערה: את הנוסחה האחרונה אפשר למצוא גם כך:

$$\left(\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{n \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha}{2n \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha} = \frac{R\cos\alpha}{R} = \frac{K_n}{R} \right)$$

נרשום כעת את סדרת השויונות:

$$\frac{S_4}{S_8} = \frac{K_4}{R} \; ; \quad \frac{S_8}{S_{16}} = \frac{K_8}{R}, \quad \frac{S_{16}}{S_{32}} = \frac{K_{16}}{R} \; ; \; \ldots ; \; \frac{S_{2^i}}{S_{2^{i+1}}} = \frac{K_{2^i}}{R};$$

נכפיל את כל השויונות הללו ונקבל:

$$\frac{S_4}{S_{2^{i+1}}} = \frac{K_4 \cdot K_8 \cdot K_{16} \cdot \ldots \cdot K_{2^i}}{R \cdot R \cdot R \cdot \ldots \cdot R}$$

אבל $S_4 = 2R^2$ $\lim_{i \to \infty} S_{2^{i+1}} = \pi R^2$ מכאן:

$$\frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{K_4 \cdot K_8 \cdot \ldots \cdot K_{2^i} \cdot \ldots}{R \cdot R \cdot \ldots \cdot R \cdot \ldots}$$

כעת $K_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

הקורא יוכיח בלי קושי:

$$K_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\ ;\ K_{16} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\quad K_{32} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

וכו' (עבור 2^i כלשהו משתמשים באנדוקציה).

ומכאן

$$\pi = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}}$$

או בצורה אחרת:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdot\ldots}$$

זוהי נוסחת ויט.

- - - - -

תחרות מתמדת להתרת בעיות

הבעיות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות עד כתה י'

ת. 121 * (3 נקודות) הוכח שלגבי כל n טבעי המספר

$$\underbrace{11\ldots11}_{2n\ \text{ספרות}} - \underbrace{22\ldots22}_{n\ \text{ספרות}}$$

הוא רבוע שלם.

ת. 122 * (2 נקודות) במשולש ישר זוית ABC הורידו גבה מקדקד הזוית הישרה CD . בכל אחד מהמשולשים ABC , ACD ו- CBD חסמו מעגל.

הוכח כי סכום רדיוסי מעגלים אלה שוה CD

ת. 123 * (3 נקודות) בנה משולש על פי היקפו, אחת מזויותיו וחוצה אותה זוית (הוצעה ע"י צבי דרזנר).

ת. 124 (4 נקודות) הוכח כי הסכום

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

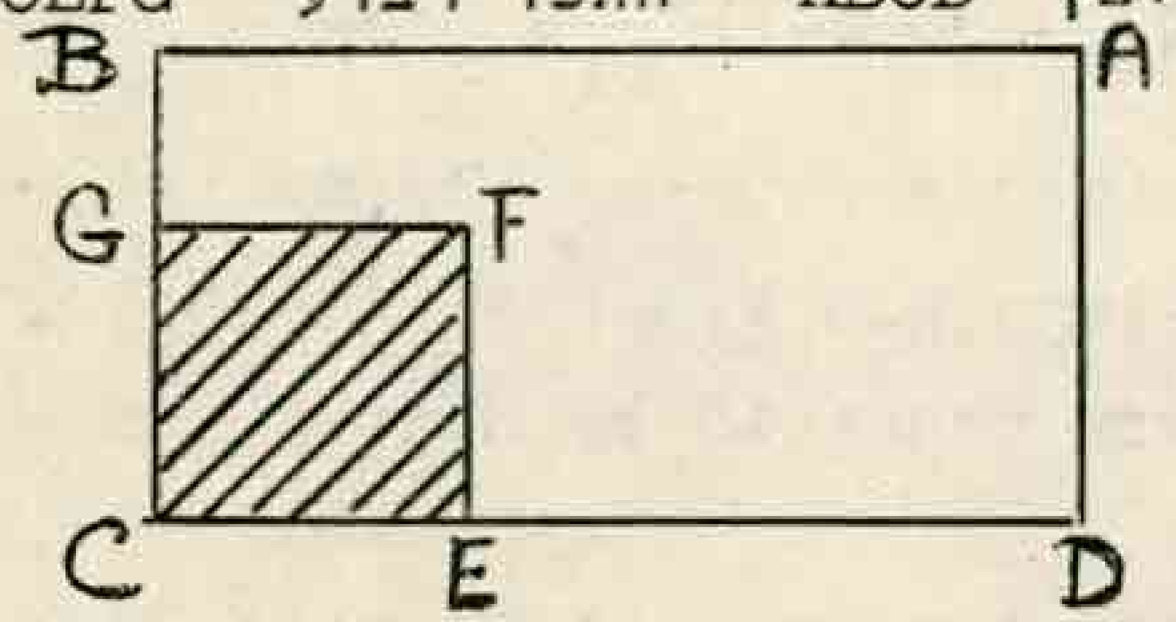
לא יהיה מספר שלם, בהיות $n > 1$

ת. 125 (3 נקודות) הוכח כי לגבי כל n טבעי גדול מ-1 מתקים אי-השויון

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

ת. 126 * (4 נקודות) הוכח כי בין 10 מספרים שלמים עוקבים
יש תמיד לפחות אחד ולכל היותר 4 מספרים שאינם
מתחלקים באף אחד מארבעת המספרים 2,3,5 ו-7.

ת. 127 * (3 נקודות) ממלבן ABCD חתכו רבוע CEFG
מצא בעזרת סרגל בלבד את מרכז הכבד של הגוף הנותר.



ת. 128 * (2 נקודות) הוכח כי כל מעוקב של מספר טבעי אפשר
לתאר כהפרש של רבועי שני מספרים טבעיים
($a^3 = b^2 - c^2$)

ת. 129 * (3 נקודות) מצא נוסחה לסכום הטור
$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha$
(הוגשה ע"י אביגדור גברון).

ת. 130 * (5 נקודות) קפרקר (הודי) שם לב לתכונה הבאה של
מספרים בני 4 ספרות שאין כל ספרות המספר זהות:
אם מספרותיו ניצר את המספר ה-4-ספרתי הגדול
ביותר M ואת המספר הקטן ביותר m (אם הספרה 0
מופיעה בעמידה בראש) ונחשב את ההפרש $M - m$
לגבי הפרש זה (שאף הוא מספר "4 ספרתי", ייתכן
עם 0 בראשו) נחזור על אותו תהליך וכך הלאה,
נגיע תמיד כעבור מספר סופי של צעדים להפרש
$M_k - m_k = 6174$ הוכח תכונה זו
לגבי מספרים שכל ספרותיהם שונות זו מזו. די
להסתפק בבדיקת שלושים מספרים וכתוב אותם.

ת. 131 * (5 נקודות) בנה בעזרת מחוגה בלבד קטע פרופורציוני
רביעי לשלושה קטעים נתונים a , b ו- c
($a:b = c:x$)

ת. 132 * (4 נקודות) בבית קולנוע נערכות 8 הצגות ברווחי זמן
שוים זו מזו. רוח הזמן בין שתי התחלות הוא כפולה
של 5 דקות.

אדם זכר כי הצגה ראשונה מתחילה ב-12 שעות+x_1 דקות
" שניה " ב-13 " x_2+ "
" שביעית " ב-23 " x_7+ "
" שמינית " ב-24 " x_8+ "

מצא את זמני ההתחלה של כל הצגה בהנחה ששעת ההתחלה היא כפולה של 5 דקות.

ת. 133 (4 נקודות) פתור את המשואה

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x + \left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x = 2a$$

(הוצעה ע"י שמואל פרידלנד).

ת. 134 * (3 נקודות) (תקון ל-ת.102(ב)) סדר במישור 19 נקודות כך שתמצאנה על 10 ישרים שכל אחד מכיל בדיוק 5 נקודות.

ת. 135 * (5 נקודות) בנה את שרשי מערכת המשואות

$$x^2 + y^2 = k^2$$

$$\frac{x-a}{y} = \frac{m}{n}$$

m, a, k ו- n קטעים נתונים.

- - - - -

פתרון הבעיות של ההתחרות המתמדת

ת. 91 מספר מכסימלי של תחומים יתקבל לכשאין שני ישרים מקבילים ואין שלושה ישרים עוברים דרך נקודה אחת. מפני שאם לא כך, נוכל לסובב ישר שאינו מקים תנאים אלה, סביב נקודה כלשהי עליו שאינה נקודת חתוך בזוית קטנה ביותר. מאחר שהזוית קטנה כרצוננו נוכל לדאוג לכך שאף תחום לא ימחה. לעומת זאת יתוסף לפחות תחום אחד (בסביבת נקודה בה נפגשו שלושה ישרים, או על ידי החתכות זוג ישרים שהיו מקבלים).

נסמן ב- a_n את המספר המכסימלי של התחומים הנוצרים ע"י n ישרים. על ידי מחיקת אחד הישרים תמחקנה n שפות שבין התחומים, כי הישר מתחלק ל- n חלקים ע"י התחכותו ב- $n-1$ הישרים האחרים. כלומר מספר התחומים יפחת ב- n . לכן $a_{n-1} \geqslant a_n - n$

אך גם להיפך: אם $n-1$ ישרים יוצרים מספר מכסימלי של תחומים, נוכל תמיד להוסיף עליהם ישר נוסף שיחתך ע"י כולם, ז.א. ב-$n-1$ נקודות לכן יתחלק ל- n חלקים. כל אחד מ-n חלקים אלה יפצל תחום ולכן יתוספו n תחומים ומכאן

$$a_n \geqslant a_{n-1} + n$$

לכן $$a_n = a_{n-1} + n$$

ישר אחד מחלק את המישור לשני חלקים, לכן

$$a_n = 2+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

ב) המספר המכסימלי של תחומי מרחב יתקבל לכשכל מישור יחתך ע"י $n-1$ המישורים האחרים ב-$n-1$ ישרים והאחרונים יהוו על המישור מספר מכסימלי של תחומים מישוריים. מפני שאם אין המצב כן נוכל, בדומה למקרה א) ע"י סבובו של אחד המישורים להגדיל את מספר התחומים המישורים על אחד המישורים. ואם הסבוב יהיה בזוית די קטנה (היא קטנה כרצוננו) רק יגדל מספר התחומים (מדוע?).

נסמן ב- b_n את המספר המכסימלי של תחומים מרחביים המתקבלים ע"י n מישורים. ע"י מחיקתו של אחד המישורים יסולקו a_{n-1} תחומים מישורים המפרידים בין תחומים מרחביים. לכן מספר התחומים המרחביים יפחת ב- a_{n-1} ז.א. $b_n - a_{n-1} \leqslant b_{n-1}$

אך ע"י הוספת מישור ל-$n-1$ מישורים היוצרים מספר מכסימלי של תחומים b_{n-1} נפצל a_{n-1} מהם ולכן

$$b_n \geqslant b_{n-1} + a_{n-1}$$

$$\therefore \quad b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$$

שני מישורים מחלקים מרחב לשני תחומים, לכן

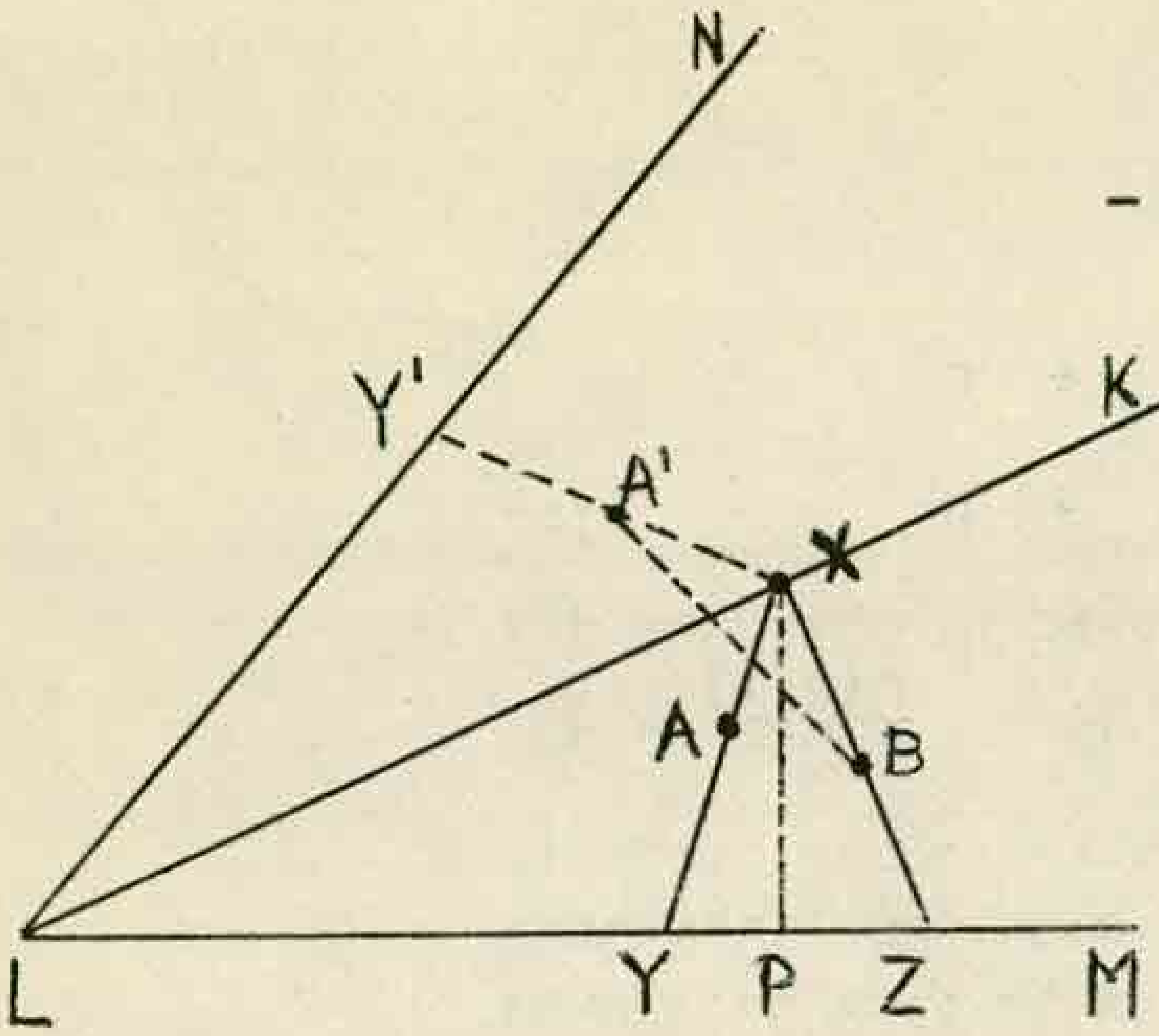
$$b_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{k(k+1)}{2} + 1\right\} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{(k-1)k}{2} + 1\right\} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+2}{2} = 2+(n-1)+\frac{1}{2}\sum_{2}^{n}k^2 - \frac{1}{2}\sum_{2}^{n}k =$$

$$= 2 + n - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)-6}{12} - \frac{(n+2)(n-1)}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)\ [n(n-1)+6]}{6} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$



<u>ת. 92</u> (לפי יונתן סתוי)

<u>נתוח:</u> יהי XYZ המשולש המבוקש. נכפיל את הזוית הנתונה לצד KL (השוק עליה ראש המשולש). תהיינה A' ו- Y' הנקודות הסימטריות ל- A ו- Y בהתאמה ביחס ל- KL

$$\sphericalangle XY'L^\circ = \sphericalangle XYL^\circ = 180^\circ - \sphericalangle XZL^\circ$$

$$\sphericalangle XY'L^\circ + \sphericalangle XZL^\circ = 180^\circ$$

לכן $Y'XZ^\circ = 180^\circ - Y'LZ^\circ$

(המרובע $XY'LZ$ חסום במעגל).

<u>בניה</u> נבנה את A' הסימטרית ל- A ביחס ל- KL
נחבר A'B ונקים עליו קשת ראיה בזוית $180^\circ - 2\sphericalangle KLM^\circ$
. החתוך של קשת זו עם KL
הוא הקדקד המבוקש X. נחבר XA ו- XB

<u>הוכחה:</u> מסימטריות A ו- A' נובע

$$\sphericalangle LXA' = \sphericalangle LXA$$

לכן $\sphericalangle LXA + \sphericalangle LXB = \sphericalangle A'XB$

לפי הבניה $\sphericalangle A'XB = 180^\circ - 2\alpha$

לכן $\frac{1}{2}(\sphericalangle LXA^\circ + \sphericalangle LXB^\circ) = 90^\circ - \alpha$

נוריד מ-X אנך XP ל- LM

$$\sphericalangle LXP^\circ = 90^\circ - \alpha = \frac{\sphericalangle LXA^\circ + \sphericalangle LXB^\circ}{2} = \sphericalangle LXA^\circ + \frac{\sphericalangle AXB^\circ}{2}$$

$$\therefore \sphericalangle YXP = \sphericalangle LXP - \sphericalangle LXA = \frac{\sphericalangle AXB}{2}$$

כלומר הגבה במשולש XYZ הנו גם חוצה זוית.
לכן המשולש שוה-שוקים.

<u>ת. 93</u>

$$(2+\sqrt{5})\ (2-\sqrt{5}) = 4-5 = -1$$

לכן $1/(2+\sqrt{5}) = -(2-\sqrt{5})$

$$X = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

$$X^3 = (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3 =$$

$$= 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\,(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})$$

$$X^3 = 4 - 3X$$

$$X^3 + 3X - 4 = 0$$

למשואה זו שרש ממשי $x=1$, ושאר שרשיה מדומים (מדוע?).
לכן $x=1$.

ת. 94 היו המספרים המבוקשים x ו- y. לפי הנתון

$$x = 5m + 2 \qquad y = 8n + 3$$
$$x + y = 5m + 8n + 5 = 136$$
$$136 - 8n = 5m + 5$$
$$8(17-n) = 5(m+1)$$

באגף הימיני מספר טבעי המתחלק ב-5 לכן אף $17-n$ חיובי ומתחלק ב-5 לכן:

$n_1 = 2 \qquad n_2 = 7 \qquad n_3 = 12$

ובהתאם

$m_1 = 23 \qquad m_2 = 15 \qquad m_3 = 7$

לכן: $x_1 = 117 \qquad x_2 = 77 \qquad x_3 = 37$

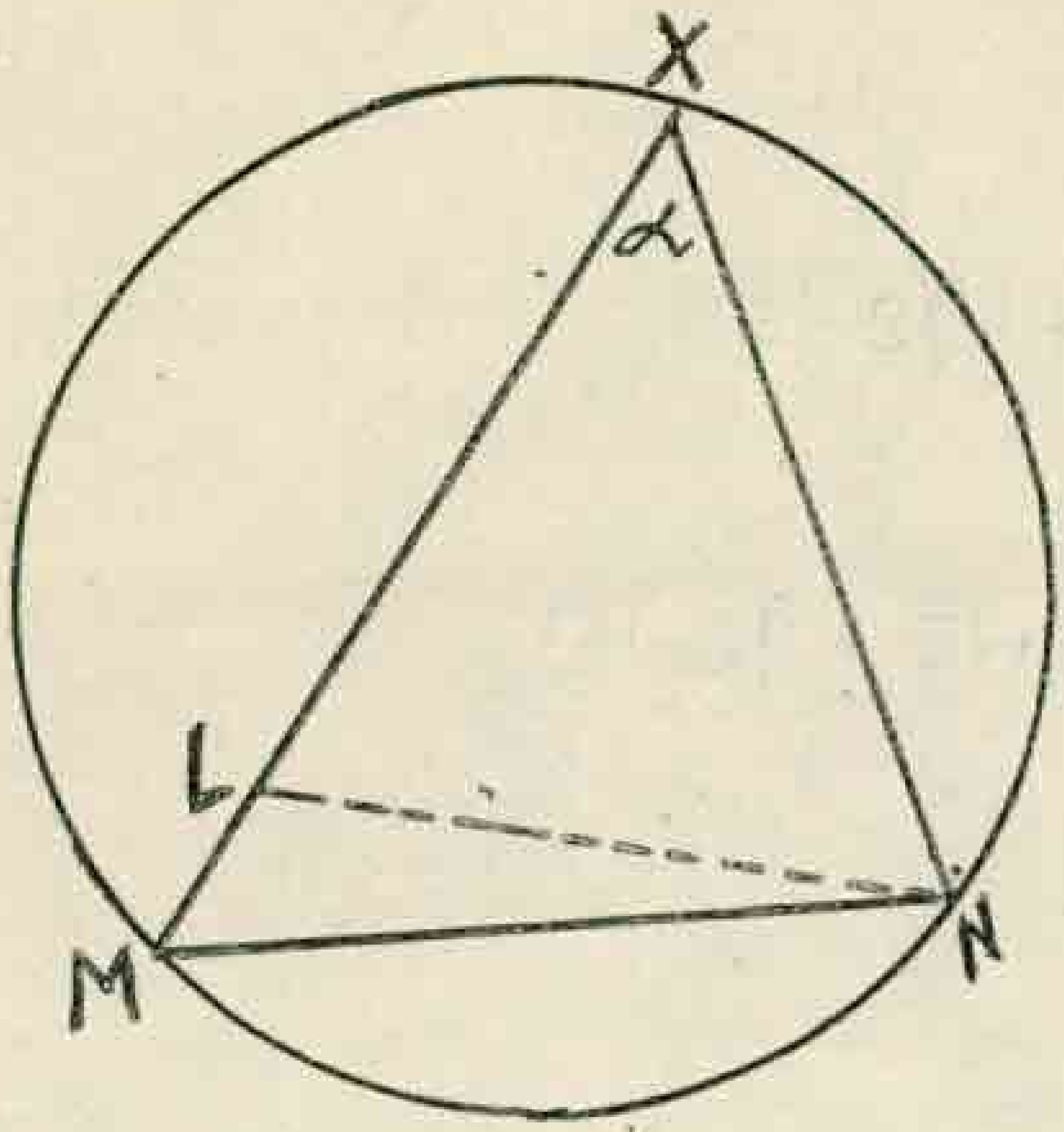
$y_1 = 19 \qquad y_2 = 59 \qquad y_3 = 99$

ת. 95 AB ו- $A'B'$, BC ו- $B'C'$, CA ו $C'A'$ נמצאים כל שנים באותו מישור (נחתכים). ישרי החתוך של שלושה מישורים אלה הם AA', BB' ו- CC'.
לשלושה מישורים יתכן:

1) נקודת חתוך משותפת ואז AA', BB' ו- CC' נחתכים בנקודה אחת.

2) אין להם נקודה משותפת ואז כל שנים מ- AA', BB' ו- CC' מקבילים.

ב. נקודת החתוך של AB ו- $A'B'$ (או BC ו $B'C'$ או CA ו $C'A'$) נמצאת על מישור המשולש ABC ועל מישור המשלש $A'B'C'$, ז.א. שלוש נקודות אלו נמצאות על שני מישורים ולכן נמצאות על ישר החתוך של שני המישורים. כלומר על ישר אחד.



<u>ת. 96</u>

<u>נתון:</u> נקצה $LX = NX$

זוית הראש
במשולש שוה-
השוקים
$\alpha = \sphericalangle LXN$
ידועה (מחצית
המרכזית הנשענת
על קשת MN)

לכן

$$\sphericalangle MLN^{\circ} = 180^{\circ} - \frac{180^{\circ} - \alpha}{2} = 90^{\circ} + \frac{\alpha}{2}$$

<u>בניה</u> על MN נבנה קשת ראיה של זוית $90^{\circ} + \frac{\alpha}{2}$

נחוג סביב M קשת ברדיו הנתון a . נקודת
חתוכן L . נחבר ML ומתקבלת X .

<u>הוכחה</u> לפי הבניה $\sphericalangle XLN^{\circ} = 180^{\circ} - (90^{\circ} + \frac{\alpha}{2}) = 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$

לכן $\sphericalangle XNL^{\circ} = 180^{\circ} - (\alpha + 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}) = 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$

ז.א. XLN משולש שוה שוקים $XL = XN$ לכן

$XM - XN = XM - XL = a$

<u>ת. 97</u>

$$s = 3^{105} + 4^{105} = (3^{3})^{35} + (4^{3})^{35} = (3^{5})^{21} + (4^{5})^{21} = (3^{7})^{15} + (4^{7})^{15}$$

$a^n + b^n$ מתחלק ב- $a+b$ אם n אי-זוגי לכן

א) s מתחלק ב-13 $3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91 = 7 \cdot 13$

ב) s מתחלק ב-181 $3^5 + 4^5 + 243 + 1024 = 1267 = 7 \cdot 181$

ג) s, מתחלק ב-379 $3^7 + 4^7 = 2187 + 16384 = 18571 = 49 \cdot 379$

$$3^{105} = 3 \cdot 3^{104} = 3 \cdot 81^{26}$$

לכן 3^{105} מסתים בספרה 3.

$$4^{105} = 4 \cdot 4^{104} = 4 \cdot 16^{52}$$

לכן 4^{105} מסתים בספרה 4 ולכן סכומם מסתים בספרה 7 ואין
ביכלתו להתחלק ב-5.

לגבי 11.

$$3^{105} = (3^{3})^{35} = (33-6)^{35}$$

$$4^{105} = (4^{3})^{35} = (66-2)^{35}$$

בפתחנו בטויים אלה לפי בינום ניוטון יתחלקו כל
האברים ב-11 פרט לאחרון בכל מקרה. לכן די להוכיח
כי $2^{35}-6^{35}$ - אינו מתחלק ב-11.

$$6^{35}+2^{35}=2^{35}(3^{35}+1)$$

$$3^{35}+1=(3^5)^7+1=243^7+1=(242+1)^7+1$$

בפתוח לפי הבינום יתחלקו כל האברים פרט לאחרון 1^7
ב-11. לכן בחלוק הבטוי האחרון ב-11 תתקבל שארית 2.

ת. 98

$$(m+1)^{2n+1}+m^{n+2}=(m+1)^{2n+1}+m^{2(2n+1)}-$$

$$-m^{2(2n+1)}+m^{n+2}=$$

$$=[(m+1)^{2n+1}+m^{2(2n+1)}]-m^{n+2}[m^{3n}-1]$$

לבטוי הראשון הצורה $a^{2n+1}+b^{2n+1}$ ולכן
מתחלק ב $a+b$ הוה אומר ב $(m+1+m^2)$
הסוגרים בבטוי השני הם $(m^3)^n-1$ ולכן
מתחלקים ב $m^3-1=(m-1)(m^2+m+1)$
לכן כל הבטוי כולו מתחלק ב- m^2+m+1

ת. 99

למספר שאיננו חזקה של 2 יש הצורה

$$s=2^k(2n+1)$$

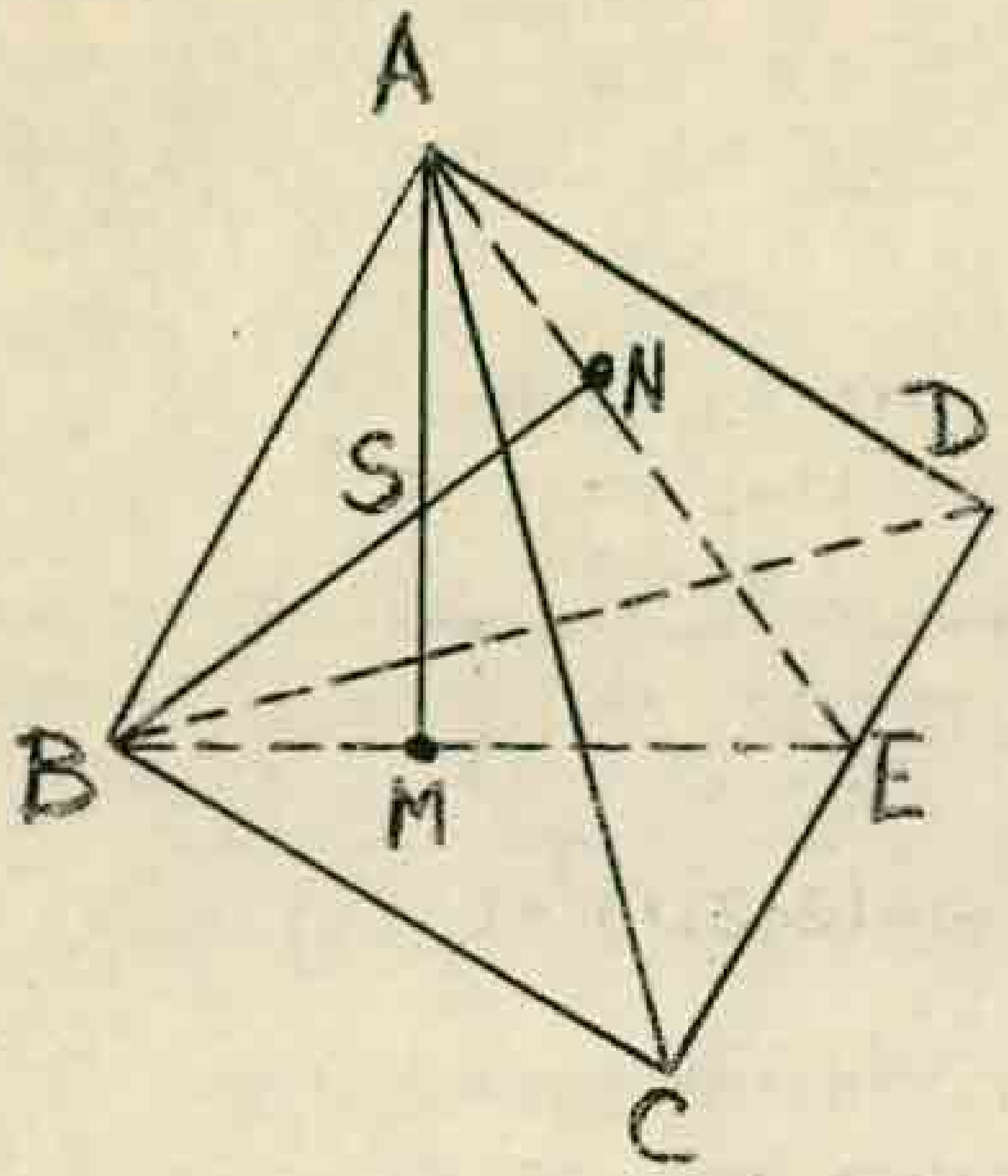
הגורם השני אי זוגי גדול מ-1 כלומר $n>0$

$$s=\underbrace{2^k+2^k+\ldots+2^k}_{2n-1}$$

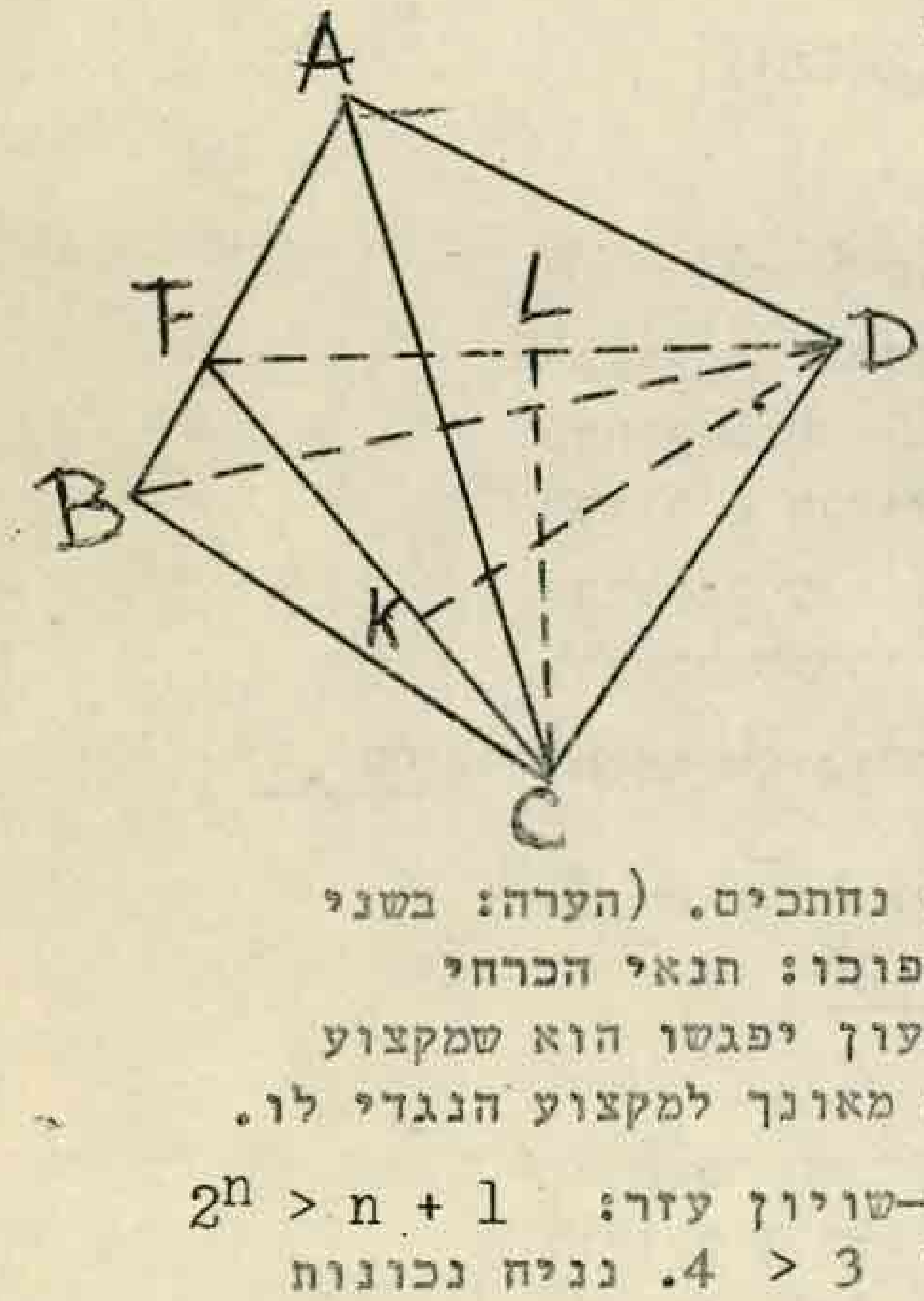
את האבר האמצעי בטור זה נשאיר ללא שנוי. את הקודם
לו נקטין ב-1 ועל חשבונו נגדיל ב-1 את האבר העוקב
לאמצעי. וכן הלאה: את האבר הנמצא במקום ה- t לפני
האמצעי נקטין ב- t ואת הנמצא במקום ה- t'
אחרי האמצעי נגדיל ב- t . ברור שהסכום לא ישתנה.

$$s=(2^k-n)+(2^k-n+1)\ldots+(2^k-1)+2^k+(2^k+1)+\ldots+(2^k+n)$$

אם 2^k-n שלילי, נבטל בראש הטור את כל האברים
השליליים, האפס וכל החיוביים עד 2^k-n. ברור
שהסכום לא ישתנה.



ת. 100 $AM \perp BCD$ ולכן AM
מאונך לכל ישר במישור
BCD לכן $AM \perp CD$
מאותה סבה BN אנך
לכל ישר במישור ACD
ולכן $AN \perp CD$
ז.א. CD מאונך לזוג
ישרים נחתכים במישור
ABS לכן $CD \perp ABS$ ולכן $CD \perp AB$.
יהי CF גבה במשולש ABC
כלומר $CF \perp AB$
אם $CD \perp AB$ לכן AB
מאונך למישור CDF
יהי DK גבה ב $\triangle CDF$
$DK \perp CF$ אבל $AB \perp DK$
לכן $DK \perp ABC$. ז.א.
DK גבה בארבעון.
יהי CL גבה במשולש CDF
$CL \perp DF$ $AB \perp CL$
לכן CL אנך ל- ABD
ז.א. CL גבה בארבעון
ומאחר ש CL ו- DK



גבהים באותו משולש ברור שהם נחתכים. (הערה: בשני שלבי ההוכחה הוכחנו משפט והפוכו: תנאי הכרחי ומספיק לכך שזוג גבהים בארבעון יפגשו הוא שמקצוע אשר מקצותיו יוצאים הגבהים יהיה מאונך למקצוע הנגדי לו.

ת. 101   נוכיח תחלה (באינדוקציה) אי-שויון עזר: $2^n > n + 1$
לגבי $n \geqslant 2$. לגבי $n = 2$ נקבל $4 > 3$. נניח נכונות
אי-השויון לגבי n ונוכיחו לגבי $n+1$

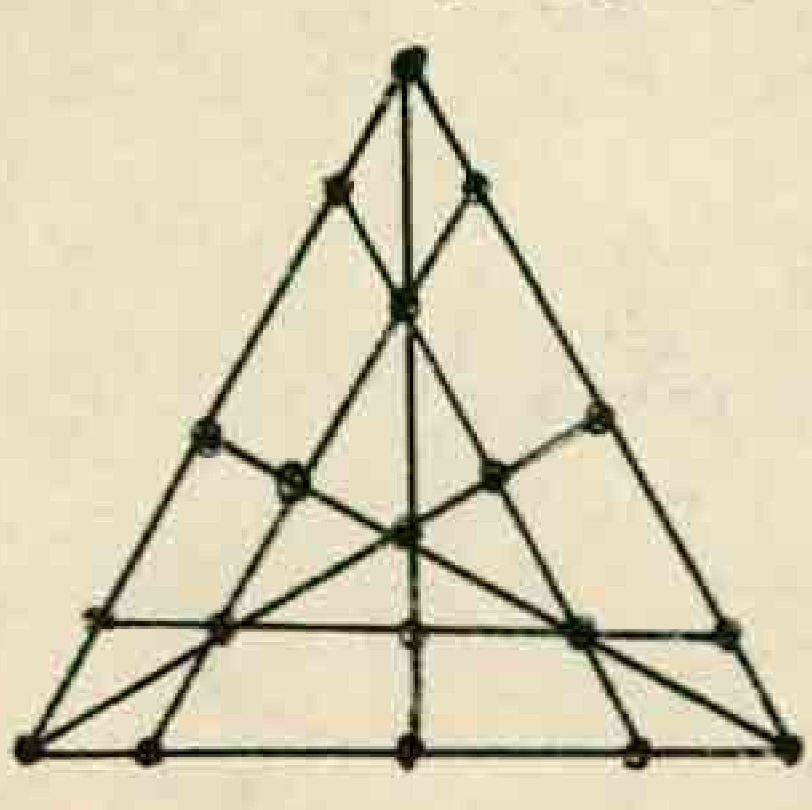
$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2(n+1) = 2n+2 > n+2$$

עתה נפנה לאי השויון המבוקש

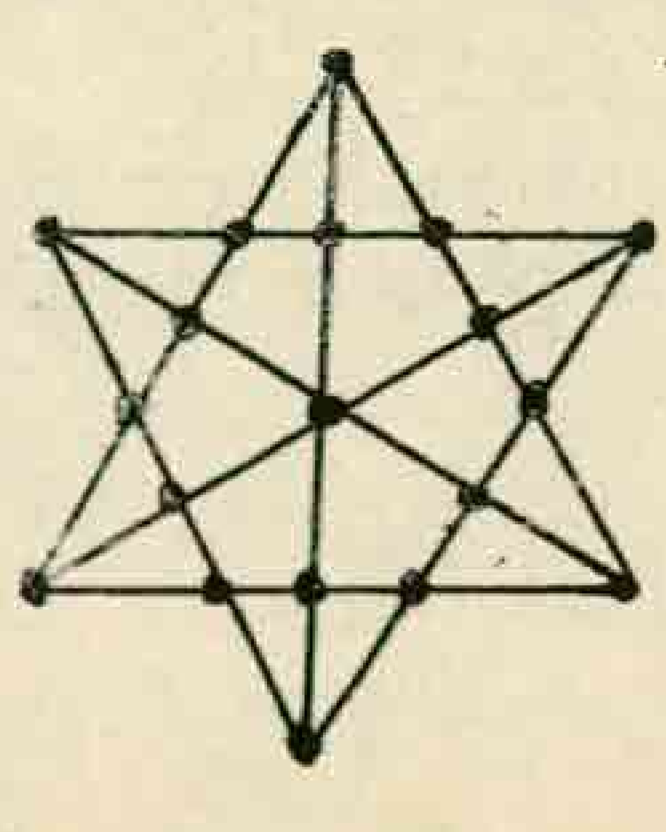
$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)} = 2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{n-1} > 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\, n = n\,!$$

לפי הנ"ל

ת. 102



או



ב. נפלה טעות בשאלה (עין ה.135 בחוברת הנוכחית).

ת. 103 הוכחה באינדוקציה.

לגבי $n=2$

$$|\sin(x_1+x_2)| = |\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2|$$
$$\leq |\sin x_1 \cos x_2| + |\cos x_1 \sin x_2| =$$
$$= |\sin x_1||\cos x_2| + |\cos x_1||\sin x_2|$$

ומאחר ש $\sin x_1>0, 0°<x_1<180°$ $|\cos x_1|<1$ לכן

$$< |\sin x_1|+|\sin x_2| = \sin x_1 + \sin x_2$$

נניח נכונות אי-השויון לגבי n ונוכיחו לגבי $n+1$

$$|\sin(x_1+x_2+\ldots+x_{n+1})| = |\sin(x_1+\ldots+x_n)\cos x_{n+1}|+$$
$$+|\cos(x_1+x_2+\ldots+x_n)\sin x_{n+1}| \leq$$

בדומה לעיל

$$\leq |\sin(x_1+\ldots+x_n)| + \sin x_{n+1}$$

ולפי הנחת האינדוקציה

$$< \sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_{n+1}$$

ת. 104 אם הספרה האחרונה היא x הרי

$$\frac{n(n+1)}{2} = 10k + x$$
$$n^2+n-(20k+2x) = 0$$

כדי שלגבי k ו-x נתונים ימצא שיקים שויון זה הכרח שהדיסקרימיננטה של המשואה הרבועית תהיה רבוע שלם (n טבעי!). ז.א. $\Delta = 80k+8x+1$ רבוע שלם.
לגבי המקרים $x=2;4;7;9$ תהיה ספרתו האחרונה של Δ 7;3;7;3. ומספר המסתים ב-3 או ב-7 איננו יכול להיות רבוע שלם.

ת. 105 על מנת שתהיה משמעות לתרגיל עלינו לדרוש $2x+6 > 0$

$$x+1 > 0 \quad \text{ו-} \quad x > 0 \quad \text{ז.א.} \quad x > 0$$
$$\log_a x(x+1) > \log_a (2x+6)$$

מאחר ש $0 < a < 1$

$$x^2 + x < 2x + 6$$
$$x^2 - x - 6 < 0$$
$$-2 < x < -3$$

אולם לאור ההגבלה לעיל $0 < x < 3$

רשימת פותרי השאלות מס' ת. 91 - 105

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגריים רשום מספר הנקודות שצבר כל פותר מתוך שאלות ת. 91–ת.105. מאחר שבחלקה השני של שאלה ת.102 נפלה טעות הוענקו לפותרי חלק א' רק 3 נקודות.

1. אהרונוב נורמה, י' תיכון חולון. 94,98,99,102,104* (15).
2. אורבך אברהם, י"ב "מעלה" ירושלים. 91,93,94,96,97,98,99,101, 103*, 104, (28).
3. בוכינגר יואל, י' "גזית" רמת-גן. 94,96,102,104 (11).
4. גולדשטין מאיר, תיכון ערב, כפר-סבא. 91,93,94,95,96*,97,98,99, 101,102*,103,104,105,(32).
5. גינגול אריה, 91*,92*,93-102,104,(40).
6. דרזנר צבי, קורס א' טכניון. 91-105, (49).
7. הילר יורם, י"א תיכון עירוני, א', ת"א. 93,94,95*,96,97,101,104,(18).
8. זלטקין מיכאל, י"א הריאלי חיפה. 91,92*,93,94,95*,96-105,(46).
9. טליל אורי, י"א הריאלי חיפה. 94,96,97,98,99,101,(11).
10. יוסלזון בן-ציון, י"א הריאלי חיפה. 93,94,95,98,99,101*,104,(20).
11. לביא נתן, י"א תיכון ליד האוניברסיטה ירושלים. 91*,94,97*,99*,101 (12).
12. לבקוביץ מנחם, בסמ"ת י"ב, חיפה. 91*,92,99,100,101,102,104,(25).
13. לובזנס דניאל, י"ב "חוגים" חיפה. 91,93-105,(45).
14. לוי אליהו, י' הריאלי חיפה. 91,93,94,95,97-102,104,(36).
15. לורנד ראובן: הריאלי חיפה. 93,94,96*,97*,101,104*,(14).
16. מימון אורי, י' הריאלי חיפה. 91*,93,94,95*,96,97*,98,101,103*,(20).
17. סתוי יונתן, י' "הרצליה", ת"א. 91,92,94,95,96,97,98,99,100,101,102, 104,105,(44).
18. עקביה גדעון, י' הריאלי חיפה. 91,93,94*,95,96,98,99*,100,101,102, 104,(34).
19. פרויד בועז, בסמ"ת י"א, חיפה. 91*,94,96,97*,98,99,101,102,103, 104,(28).
20. פרידלנד שמואל, 91-98,99*,100-104,(43).
21. קוזמא אילן, צ.ה.ל. 91,93,94,95,98-103,(33).
22. קושניר ראובן, י' הריאלי חיפה. 91**,94,96,97,98,100**,101,102, 104,(24).
23. קריב עודד, י"ב תיכון עירוני ה' ת"א, 91-105,(49).
24. רן אהוד, הריאלי חיפה. 91*,93,94,96-99,101-104,(34).
25. רשף שמואל, י"ב תיכון עירוני ט' ת"א. 93,94,96,97**,98,99*,101, 103*,104,105,(26).
26. שהרון שלח, י"ב תיכון חדש. 91-101,103-105,(45½).
27. שייניגר משה. ט' בסמ"ת חיפה. 102,(3).

הציעו בעיות: פולקמן יגאל 94 (2), דוד אליהו 93 (3), צבי קם 91 (4).

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

י. דוד, ביה"ס תיכוני עירוני א׳, רח׳ בכורי העתים 2, ת"א.

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.