ר ב ע ו ן   ל מ ת מ ט י ק ה

ללמוד ולמחקר

בעריכת

דב ירדן

כרך 2

תש"ח

ירושלם

R I V E O N   L E M A T E M A T I K A

A Quarterly Journal

Intended to Promote Mathematical Research

Among Students of Mathematics

Dov Jarden

Editor

Volume 2

1947 — 1948

Jerusalem

רבעון למתמטיקה

ללמוד ולמחקר

בעריכת דב ירדן

כרך 2 ירושלים, תשרי תש"ח, ספטמבר 1947 חוברת 1

תכן

כתבת המערכת: דב ירדן, מלאכי 20, ירושלים

המחיר 200 מיל

על חזקות עם מעריכים טרנספיניטיים II

יעקב לויצקי

להלן נטפל בבעיות אחדות המתעוררות בקשר עם המושג של החזקה הטרנס- פיניטית, ועל ידי כך נבהיר כמה מתכונותיהן של חזקות כאלו ונברר כמה ענינים אשר נשארו עדיין סתומים במאמרי הראשון על נושא זה[1].

§1. חזקות ימניות וחזקות שמאליות.

ב I, §2 הוגדרה החזקה הטרנספיניטית A^r של אידאל A באגודה S כדלקמן: 1) $A^1=A$; 2) יהי r מספר סודר לא גבולי, $r>1$, אז $A^r=A^{r-1}A$; 3) יהי r מספר סודר גבולי, אז A^r שוה למשותף של כל החזקות A^s באשר $s<r$, או בסמנים: $A^r=[\dots,A^s,\dots]_{s<r}$. להגדרה זו יש להעיר: אם האגודה S היא קומוטטיבית, או כשהנדון הוא במעריכים סופיים, הרי תמיד $A^{r-1}A=AA^{r-1}$. אך במקרה שהאגודה S אינה קומוטטיבית, יש אשר לגבי מעריך טרנספיניטי r נתקל באי השויון $A^{r-1}A\neq AA^{r-1}$, כפי שנראה מיד על ידי דוגמה מתאימה. אפשרות זו ממריצתנו להבדיל בין חזקה ימנית לחזקה שמאלית. אם נקרא לחזקה כפי שהוגדרה לעיל בשם חזקה ימנית ונסמנה עתה על ידי הסמל $\overrightarrow{A^r}$ נגיע למושג החזקה השמאלית אשר סמנה יהיה $\overleftarrow{A^r}$ לפי ההגדרה דלקמן: 1') $\overleftarrow{A^1}=A$. 2') יהי r מספר סודר לא גבולי, $r>0$, אז $\overleftarrow{A^r}=A\overleftarrow{A^{r-1}}$. 3') אם r מספר סודר גבולי, אז $\overleftarrow{A^r}=[\dots,\overleftarrow{A^s},\dots]_{s<r}$.

מעתה נשתמש בסמל A^r רק במקרה שהחזקה הימנית שוה לחזקה השמאלית, מה שקורה למשל בשביל המעריכים הסופיים וכן גם בשביל המעריך ω, כי הרי $\overrightarrow{A^\omega}=\overleftarrow{A^\omega}=[\dots,A^n,\dots]_{n=1,2,3,\dots}$.

נראה עתה על ידי דוגמה כי לגבי חזקות עם מעריכים טרנספיניטיים יש אשר $\overleftarrow{A^r}\neq\overrightarrow{A^r}$. תהי S קבוצה המכילה את הסמל 0 ואת הסמלים e_{ik} אשר ציוניהם i,k הם מספרים סודרים המקיימים את התנאים $1\leq i<k\leq\omega$. את הצרוף ב S נגדיר כדלקמן:

$$0e_{ik}=e_{ik}0=0\ ;\quad e_{ik}e_{i'k'}=\begin{cases}0 & \text{אם } k\neq i'\\ e_{ik'} & \text{אם } k=i'\end{cases}\qquad\dots\dots(\alpha)$$

קל להוכח כי לפי צרוף זה תהוה הקבוצה S אגודה, וכי לגבי כל מספר טבעי n יכיל האידאל S^n חוץ מן האפס אך ורק את הסמלים e_{ik} המקיימים את התנאי $i+n\leq k$. לפיכך יכיל S^ω חוץ מן האפס אך ורק את הסמלים $e_{i\omega}$, באשר $1\leq i<\omega$. מכיון ש $e_{i\omega}e_{i'k'}=0$ בשביל כל i', הרי $S^{\omega+1}=S^\omega S=0$[2]. מצד שני הרי $e_{i\omega}=e_{ik}e_{k\omega}$, באשר $i<k<\omega$. לפיכך $e_{i\omega}\in SS^\omega$ בשביל כל i טבעי, כלומר $S^\omega\subseteq SS^\omega$. מכאן, בהתחשב עם $S^\omega\supseteq SS^\omega$ (ראה I, משפט א') מקבלים $S^\omega=SS^\omega$. לפיכך $\overleftarrow{S^{\omega+1}}=S^\omega$, דהיינו $\overrightarrow{S^{\omega+1}}\neq\overleftarrow{S^{\omega+1}}$.

§2. על גרעיניו של אידאל.

ב I, משפט ג' הוכחה לגבי כל אידאל A באגודה S מציאותו של מספר סודר מינימלי r המקיים את השויון $\overrightarrow{A^{r+s}}=\overrightarrow{A^r}$ בשביל כל s. לאידאל $\overrightarrow{A^r}=\overrightarrow{A_1}$ נקרא עתה בשם הגרעין הימני הראשון של A. גרעינו הימני הראשון של $\overrightarrow{A_1}$ יקרא בשם

---

1) ראה חוברת 1 של כרך 1, ע' 8-13. מאמר זה יצוטט להלן ב I.

2) כאן מסמן 0 את אידאל האפס של האגודה המכיל את 0 בלבד.

הגרעין הימני השני של A ויסומן ב $\overrightarrow{A_2}$. בעזרת האינדוקציה הטרנספיניטית מוגדר כנגד כל מספר סודר t הגרעין הימני $\overrightarrow{A_t}$ של A. לפי I, משפט ד׳, קים מספר סודר מינימלי t כך ש $\overrightarrow{A_t}=\overrightarrow{A_{t+1}}$. לאידאל זה $\overrightarrow{A_t}$ נקרא בשם הגרעין הימני המוחלט של A. כן ראינו ב I כי הגרעין המוחלט הימני הנהו אידאל עצמי, כלומר $\overrightarrow{A_t}^2=\overrightarrow{A_t}$. כאפן מקביל אפשר להגדיר כנגד כל מספר סודר s את הגרעין השמאלי $\overleftarrow{A_s}$, ולהוכיח את מציאותו של הגרעין המוחלט השמאלי $\overleftarrow{A_t}$. בדרך כלל שונים הגרעינים השמאליים מן הגרעינים הימניים המתאימים. כך, למשל, בדוגמה שהבאנו בסעיף הקודם הגרעין הימני הראשון של S שוה ל 0, ואילו הגרעין השמאלי הראשון של S שוה ל S^{ω}. לפיכך ראויה לציון העובדה כי הגרעין המוחלט הימני $\overrightarrow{A_t}$ של אידאל A שוה לגרעין המוחלט השמאלי $\overleftarrow{A_t}$. את האידאל $\overrightarrow{A_t}=\overleftarrow{A_t}$ נוכל איפוא לכנות בשם הגרעין המוחלט של A. הוכחת הטענה הזו מתקבלת מן העובדה (ראה I, משפט ה׳) כי הגרעין המוחלט הימני של A שוה לסכום כל האידאלים העצמיים של A, וכי מטעמי סימטריות סכום זה שוה גם לגרעין המוחלט השמאלי של A.

§3. האידאלים הנגזרים.

להבהרת העובדות המובאות בסעיף הקודם נעיר עוד את ההערות הבאות. מאידאל נתון A אפשר לגזור אידאלים חדשים על ידי פעולת הכפל ובנית המשותף בהשתמשנו בפעולות אלו הלוך וחזור. לאידאלים המתקבלים באופן זה מאידאל נתון A נקרא בשם אידאלים הנגזרים מ A. אם בבנית המשותף נצמצם את עצמנו לקבוצות סופיות של אידאלים בלבד, לא נקבל על ידי כך אלא את חזקותיו הסופיות של האידאל A. במקרה זה אפשר לותר לגמרי על בנית המשותף ולהצטמצם בפעולת הכפל, כי הרי המשותף של קבוצה סופית של חזקות סופיות שוה לחזקה עם המעריך הגדול ביותר, ואת זו הן אפשר לקבל ע״י פעולת הכפל. כך למשל $[A^2,A^5,A^7]=A^7$, $[A^3,A^9]=A^9$ וכו׳. לא כן המצב אם נרשה גם את בנית המשותף של קבוצות אין סופיות של אידאלים - בניה אשר בעזרתה מגיעים לחזקות ימניות ושמאליות עם מעריכים טרנספיניטיים. החזקות הטרנספיניטיות אינן ממצות את כל האידאלים אשר אפשר לגזור מאידאל נתון על ידי פעולת הכפל ובנית המשותף. כך, למשל, מכפלתן של שתי חזקות ימניות טרנספיניטיות היא לא תמיד חזקה של A. ואמנם, נניח כי הגרעין הימני הראשון של A שונה מגרעינו הימני השני של A (ראה למשל I, §3, דוגמה ג׳), ויהי $\overrightarrow{s}$ הציון הימני הראשון של A (כלומר, s הוא המספר הסודר המינימלי המקים $\overrightarrow{A^s}=\overrightarrow{A^{s+r}}$ בשביל כל r). במקרה זה יהיה קים תמיד אי השויון $\overrightarrow{A^s}\overrightarrow{A^s}\neq\overrightarrow{A^t}$, ויהיה המספר הסודר t אשר יהיה. ואמנם: אם $t<s$, הרי מתוך הגדרתו של s נובע כי $\overrightarrow{A^t}\supset\overrightarrow{A^s}$, ולכן על אחת כמה וכמה ש $\overrightarrow{A^t}\supset\overrightarrow{A^s}\overrightarrow{A^s}$; אם $t=s$, הרי על כל פנים $\overrightarrow{A^s}\overrightarrow{A^s}\subseteq\overrightarrow{A^s}$, ולו היה $\overrightarrow{A^s}\overrightarrow{A^s}=\overrightarrow{A^s}$, כי אז גרעינו הימני השני של A היה מתלכד עם גרעינו הימני הראשון (כלומר, שוה לגרעין המוחלט) בנגוד להנחתנו; ולבסוף, אם $t>s$, הרי על סמך הגדרת הציון הראשון יהיה $\overrightarrow{A^t}=\overrightarrow{A^s}$ ולפיכך גם במקרה זה $\overrightarrow{A^t}\supset\overrightarrow{A^s}\overrightarrow{A^s}$. לאור הדברים האלה יש ענין במשפט הבא אשר נשתמש בו גם להלן:

משפט. המשותף M של קבוצה סופית או אין סופית K של חזקות ימניות (שמאליות) של אידאל A אף הוא חזקה ימנית (שמאלית) של A.

הוכחה: נבדיל בין שני מקרים: מקרה א׳. הקבוצה K מכילה אידאל מינימלי, כלומר אידאל $\overrightarrow{A^s}$ המקים את התנאי $\overrightarrow{A^s}\subseteq\overrightarrow{A^t}$ בשביל כל אידאל $\overrightarrow{A^t}$ של הקבוצה. אז ברור כי $M=\overrightarrow{A^s}$, ובמקרה זה המשפט מוכח. מקרה ב׳. הקבוצה K אינה מכילה אידאל מינימלי. במקרה זה קימות חזקות $\overrightarrow{A^r}$ שאינן שיכות לקבוצה K ואשר בשבילן מתקים אי השויון $\overrightarrow{A^s}\supset\overrightarrow{A^r}$ בשביל כל אידאל $\overrightarrow{A^s}$ של הקבוצה K. ואמנם, חזקה כזו $\overrightarrow{A^r}$ תהיה למשל הגרעין הימני הראשון של A, כי גרעין זה הרי מוכל בכל חזקה של A. מכאן נובע קיומו של מעריך מינימלי m אשר בשבילו $\overrightarrow{A^s}\supset\overrightarrow{A^m}$ בשביל כל $\overrightarrow{A^s}$ השיך ל K. נוכיח עתה כי $\overrightarrow{A^m}=M$. ראשית נציין כי m הנהו מספר גבולי. ואמנם, לו היה $m=n+1$ הרי על סמך המינימליות של m היינו יכולים להסיק את מציאותה של חזקה $\overrightarrow{A^p}$ ב K כך ש $\overrightarrow{A^p}\subseteq\overrightarrow{A^n}$; היות ו $\overrightarrow{A^p}\supset\overrightarrow{A^{n+1}}$, הרי $p<n+1$, כלומר $p\leq n$ ולכן $\overrightarrow{A^p}\supseteq\overrightarrow{A^n}$, ובהתחשב עם היחס דלעיל,

נקבל $\overrightarrow{A^p}=\overrightarrow{A^n}$. החזקה $\overrightarrow{A^n}$ שיכת איפוא ל K ומקימת את היחס $\overrightarrow{A^s}\supseteq\overrightarrow{A^n}$ בשביל כל חזקה $\overrightarrow{A^s}$ השיכת ל K (כי הרי $\overrightarrow{A^s}\supset\overrightarrow{A^{n+1}}$, לכן $s<n+1$, כלומר $s\leq n$ ולפיכך $\overrightarrow{A^s}\supseteq\overrightarrow{A^n}$). אך זאת היא סתירה להנחתנו. מסתירה זו נובע כי המספר הסודר m מוכרח להיות מספר גבולי. לפיכך החזקה $\overrightarrow{A^m}$ שוה למשותף של כל החזקות $\overrightarrow{A^r}$ באשר $r<m$. על סמך המינימליות של m נובעת בשביל כל r כזה מציאותה של חזקה $\overrightarrow{A^s}$ ב K כך ש $\overrightarrow{A^s}\subseteq\overrightarrow{A^r}$, ומכיון ש $M\subseteq\overrightarrow{A^s}$, הרי $\overrightarrow{A^r}\supseteq M$ בשביל כל r הקטן מ m. מזה נובע כמובן כי גם $\overrightarrow{A^m}\supseteq M$. מצד שני, הרי $\overrightarrow{A^m}\subset\overrightarrow{A^s}$ בשביל כל $\overrightarrow{A^s}$ השיך ל K, לכן גם $\overrightarrow{A^m}\subseteq M$, ובהתחשב עם היחס דלעיל נקבל $\overrightarrow{A^m}=M$, מש"ל.

נעיר עוד, כי האידאל A מכיל את כל האידאלים הנגזרים ממנו, וכי בין האידאלים הנגזרים מ A מופיעות גם מכפלות "מעורבות" כגון $\overrightarrow{A^r}\,\overleftarrow{A^s}$ וכן גם חזקות "מעורבות" כגון $(\overleftrightarrow{A^r})^s$. כן יש לראות גם את הגרעינים השונים, ובמיוחד את הגרעין המוחלט, כאידאלים הנגזרים מ A.

יהי עתה G אידאל הנגזר מ A שהוא בו בזמן גם אידאל עצמי, כלומר $A\supseteq G$, $G^2=G$. אידאל כזה הוא בנמצא, כי הרי הגרעין המוחלט הוא בעל התכונות האמורות. אם B_1 ו B_2 הם שני אידאלים המכילים את G, גם מכפלתם תכיל את G כי הרי $B_1B_2\supseteq GG=G$. כן אם לקבוצה כל שהיא של אידאלים התכונה כי כל אידאל של הקבוצה מכיל את G, הרי גם המשותף של כל האידאלים של הקבוצה הנדונה יכיל את G. מכאן שכל אידאל הנגזר מ A מכיל את G. מכיון ש G הנהו אידאל עצמי רצוני הנגזר מ A נובע מכאן כי כל האידאלים העצמיים הנגזרים מ A שוים ביניהם, ומכאן המסקנה: כל אידאל עצמי הנגזר מ A שוה לגרעין המוחלט של A. המשפט על שויון הגרעין המוחלט הימני לגרעין המוחלט השמאלי שהוכח ב §2 הנהו מקרה פרטי של מסקנתנו האחרונה.

§4. על אגודות עם ציונים נתונים מראש.

ציונו של אידאל A באגודה S הוא המספר הסודר המינימלי r אשר בשבילו מתקים השויון $\overrightarrow{A^{r+s}}=\overrightarrow{A^r}$ בשביל כל s (ראה I, §2, הגדרה ב'). לאמתו של דבר יש לכנות מספר זה בשם הציון הימני של A. באפן אנלוגי יש להגדיר את הציון השמאלי של A, בהשתמשנו בחזקות שמאליות. בדרך כלל שונה הציון הימני מן הציון השמאלי. כך למשל בדוגמה שהבאנו ב §1 שוה הציון הימני ל $\omega+1$, ואלו הציון השמאלי שוה ל ω. נראה עתה כי קימות אגודות אשר ציונן הימני (השמאלי) שוה למספר סודר רצוני r הנתון מראש [3]. בכדי לבנות אגודה כזו, נסתכל בקבוצה S המכילה את הסמל 0 אשר ישמש להלן כאבר האפס של האגודה, ואת הסמלים e_{ab}, באשר b,a הם מספרים סודרים המקימים את התנאי $1\leq a<b\leq r$.

את הכפל בין אברי S נגדיר כדלקמן:

$$0e_{ab}=e_{ab}0=0\ ;\quad e_{ab}e_{a'b'}=\begin{cases}0, & b\neq a'\\ e_{ab'}, & b=a'\end{cases}\quad\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

קל להוכח כי S היא אגודה. נראה עתה בעזרת האינדוקציה הטרנספיניטית כי בשביל מספר סדורי c שאיננו עולה על r החזקה הימנית $\overrightarrow{S^c}$ מכילה חוץ מ 0 אך ורק את הסמלים e_{xy} המקימים $x+c\leq y$. ואמנם: ראשית נעיר כי טענתנו נכונה לגבי $c=1$. שנית נניח כי $c>1$ וכי c איננו מספר גבולי, כלומר $c=d+1$. בהניחנו כי הטענה נכונה לגבי d, הרי תכיל האגודה S^d חוץ מ 0 אך ורק את הסמלים e_{xy} באשר $x+d\leq y$. מכיון ש $\overrightarrow{S^c}=\overrightarrow{S^d}S$, הרי החזקה $\overrightarrow{S^c}$ תכיל חוץ מן האפס אך ורק את הסמלים $e_{xy}e_{yz}=e_{xz}$, באשר $x+d\leq y<z$, כלומר $x+c\leq z$, ובזה הוכחה טענתנו במקרה הנדון. שלישית נניח כי c הנהו מספר גבולי, כלומר $\overrightarrow{S^c}$ הוא המשותף של כל החזקות $\overrightarrow{S^d}$ עם $d<c$. נסתכל בסמל e_{xy} עם $x+c\not\leq y$. בשביל $d<c$

---

3) נוכל להניח כי $r>1$. אגודה אשר ציונה שוה ל 1 היא למשל אגודת האפס.

יהיה איפוא $y>x+d$, ולכן על סמך הנחת האינדוקציה יהיה $e_{xy}\in\overrightarrow{S^d}$ בשביל כל d הקטן מ c. לפיכך ישתייך e_{xy} גם למשותף של כל ה $\overrightarrow{S^d}$, כלומר ל $\overrightarrow{S^c}$. מצד שני, נתבונן בסמל e_{xy} עם $x<y<x+c$, כלומר $y=x+d$, באשר $d<c$. מכיון ש c הנהו מספר גבולי, הרי גם $d+1<c$. על סמך הנחת האינדוקציה יהיה איפוא $e_{xy}\notin\overrightarrow{S^{d+1}}$, ומכיון ש $\overrightarrow{S^{d+1}}\supseteq\overrightarrow{S^c}$, הרי על אחת כמה וכמה $e_{xy}\notin\overrightarrow{S^c}$. לפיכך יכיל $\overrightarrow{S^c}$ חוץ מ 0 אך ורק את כל הסמלים e_{uv} עם $v\geq u+c$, מש״ל.

נעיר עוד כי אגודתנו S מקיפת את השויון $\overrightarrow{S^r}=0$, וכי אם $t<s\leq r$ יהיה $\overrightarrow{S^t}\supset\overrightarrow{S^s}$. מכאן שהגרעין הימני הראשון של S שוה ל 0 וציונו הימני שוה ל r; פתרנו איפוא את הבעיה: בנה אגודה עם ציון ימני נתון מראש.

כדאי עוד להוסיף כי לגבי האגודה שבנינו מתקיימים הכללים:

$$\overrightarrow{(\overrightarrow{S^a})^b}=\overrightarrow{S^{ab}}\ ,\quad \overrightarrow{S^aS^b}=\overrightarrow{S^{a+b}}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\gamma)$$

לבסוף נעיר עוד כי במקרה ש $r\geq\omega$, ישוה הציון השמאלי של אגודתנו ל ω, והגרעין השמאלי הראשון ישוה ל S^ω. הדוגמה שבנינו ב §1 היא מקרה פרטי [4] של אגודתנו בסעיף הנוכחי.

§5. על כללי החזקות במעריכים טרנספיניטיים.

לגבי מעריכים סופיים m ו n קים הכלל $A^mA^n=A^nA^m$ לגבי כל אידאל A באגודה S, ואפילו אם A אינו קומוטטיבי לגבי פעולת הכפל בין אבריו. לא כן לגבי מעריכים טרנספיניטיים, כפי שנוכח מיד על ידי דוגמה מתאימה. ואמנם, נסתכל בדוגמה שבנינו בסעיף הקודם ונקבע שם את r כך ש $r>\omega+1$. נבחר עתה בשני מספרים סודרים a ו b כך ש $a+b<b+a\leq r$. לשם כך נבחר למשל $a=1, b=\omega$. על סמך האמור בסוף הסעיף הקודם, יהיה לגבי אגודתנו $\overrightarrow{S^{a+b}}\supset\overrightarrow{S^{b+a}}$, וכן $\overrightarrow{S^{a+b}}=\overrightarrow{\overrightarrow{S^a}\overrightarrow{S^b}}$, $\overrightarrow{S^{b+a}}=\overrightarrow{\overrightarrow{S^b}\overrightarrow{S^a}}$. לפיכך נקבל $\overrightarrow{\overrightarrow{S^a}\overrightarrow{S^b}}\neq\overrightarrow{\overrightarrow{S^b}\overrightarrow{S^a}}$, מש״ל.

ב I משפט ב׳ ראינו כי לגבי מעריכים טרנספיניטיים קימים כללי החזקות (γ) בדרך כלל רק בצורתם המוחלשת, דהיינו: $\overrightarrow{\overrightarrow{S^a}\overrightarrow{S^b}}\subseteq\overrightarrow{\overrightarrow{S^a}\overrightarrow{S^b}}$, $\overrightarrow{((\overrightarrow{S^a}))^b}\subseteq\overrightarrow{S^{ab}}$ וב I §3 הבאנו דוגמת אגודה U אשר בשבילה $U^\omega U^\omega\supset U^{\omega+\omega}$. מכיון שהאגודה U היא לא קומוטטיבית, מתעוררת השאלה: האם לגבי אגודות קומוטטיביות מתקיימים הכללים (γ) גם לגבי מעריכים טרנספיניטיים? התשובה לשאלה זו היא שלילית, כפי שמראה הדוגמה הבאה: נסמן ב S את קבוצת כל המטריצות הרבועיות שצורתן $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$, באשר a הוא מספר שלם זוגי רצוני (או $=0$) ו b הוא מספר רציונלי רצוני. מטריצות אלו מהוות לגבי הכפל אגודה קומוטטיבית. בשביל כל n טבעי יתלכד S^n עם קבוצת כל המטריצות שצורתן $\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & c\end{pmatrix}$, באשר c הוא מספר שלם המתחלק ב 2^n, ו d הוא מספר רציונלי רצוני. לכן ישוה המשותף של כל החזקות S^n באשר n=1,2,3,..., כלומר S^ω, לקבוצת כל המטריצות $\begin{pmatrix}0 & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, באשר d הוא מספר רציונלי רצוני. מכיון ש $S^\omega S=S^\omega$ ו $S^n\supset S^m$ באם m ו n הם מספרים טבעיים המקיימים $m>n$, הרי S^ω הוא הגרעין הראשון של S, ולפיכך $S^\omega=S^{\omega+s}$ בשביל כל מספר סודר s, ובמיוחד $S^{\omega+\omega}=S^\omega$. אבל $S^\omega S^\omega=0$, ולכן $S^\omega S^\omega\subset S^{\omega+\omega}$, או גם $(S^\omega)^2\subset S^{\omega\cdot 2}$. הכללים (γ) אינם מתקיימים איפוא לגבי אגודתנו הקומוטטיבית.

לאור הדוגמאות הנ״ל מתעוררת השאלה: מה הוא הקשר בין החוקים השונים השוררים בתחום החזקות עם מעריכים סופיים ואשר תקפם הכללי פג לגבי מעריכים טרנספיניטיים? נצא משבעת החוקים

---

4) דהיינו $r=\omega$.

(δ) . . . . (1) $\overrightarrow{A^r}\overrightarrow{A^s}=\overrightarrow{A^s}\overrightarrow{A^r}$; (2) $\overleftarrow{A^r}\overleftarrow{A^s}=\overleftarrow{A^s}\overleftarrow{A^r}$; (3) $\overleftarrow{A^t}=\overrightarrow{A^t}$;

(4) $\overrightarrow{A^r}\overrightarrow{A^s}=\overrightarrow{A^{r+s}}$; (5) $\overleftarrow{A^r}\overleftarrow{A^s}=\overleftarrow{A^{s+r}}$; (6) $\overrightarrow{A^r}\overrightarrow{A^s}=\overrightarrow{A^{s+r}}$; (7) $\overleftarrow{A^r}\overleftarrow{A^s}=\overleftarrow{A^{r+s}}$

ונגלה בהערות דלקמן את הקשר ביניהם.

<u>הערה א'.</u> התנאי (1) גורר אחריו את התנאי (3).

<u>הוכחה.</u> (בעזרת האינדוקציה הטרנספיניטית): <u>ראשית</u>, $\overleftarrow{A'}=\overrightarrow{A'}$.
<u>שנית</u> נניח כי $t>1$ וכי $t=t'+1$ וכן (הנחת האינדוקציה) $\overrightarrow{A^{t'}}=\overleftarrow{A^{t'}}$. על סמך הנחתנו כי התנאי (1) קיים, נקבל $A\overrightarrow{A^{t'}}=\overrightarrow{A^{t'}}A$, ולכן $\overrightarrow{A^t}=\overrightarrow{A^{t'}}A=A\overleftarrow{A^{t'}}=\overleftarrow{A^t}$.
שלישית, אם t הנהו מספר גבולי, כלומר $\overrightarrow{A^t}$ הוא המשותף של ה $\overrightarrow{A^a}$ עם $a<t$; $\overleftarrow{A^t}$ הוא המשותף של ה $\overleftarrow{A^a}$ עם $a<t$, הרי על סמך האינדוקציה $\overleftarrow{A^a}=\overrightarrow{A^a}$, ולכן גם $\overrightarrow{A^t}=\overleftarrow{A^t}$.
בזה הושלמה הוכחת משפטנו.

<u>הערה ב'.</u> מטעמי סימטריות נובע מהערה א' כי גם התנאי (2) גורר אחריו את התנאי (3).

<u>הערה ג'.</u> התנאי (4) גורר אחריו: (4_1) גרעינו הימני הראשון של A שוה לגרעינו המוחלט של A. (4_2) גרעינו השמאלי הראשון של A שוה ל A^{ω} [5].

<u>הוכחה: (4_1)</u>: יהי $\overrightarrow{A^r}$ גרעינו הימני הראשון של A, אז בהסתמכנו על (4) נקבל $\overrightarrow{A^r}=\overrightarrow{A^{r+r}}=\overrightarrow{A^r}\overrightarrow{A^r}$, כלומר $\overrightarrow{A^r}$ הוא אידאל עצמי. לפיכך $\overrightarrow{A^r}$ הוא גם הגרעין המוחלט (ראה §3). (4_2): מכיון ש $\overrightarrow{A^{\omega}}=\overrightarrow{A^{1+\omega}}$ ועל סמך (4) הרי $\overrightarrow{A^{1+\omega}}=AA^{\omega}$, לכן A^{ω} הוא הגרעין השמאלי הראשון של A.

<u>הערה ד'.</u> מטעמי סימטריות נובע על סמך הערה ג' כי התנאי (5) גורר אחריו: (5_1): גרעינו השמאלי הראשון של A שוה לגרעינו המוחלט.
(5_2): גרעינו הימני הראשון של A שוה ל A^{ω}.

<u>הערה ה'.</u> התנאי (6) מתקים אז ורק אז כאשר $A^{\omega}=A^{\omega}A^{\omega}$.

<u>הוכחה.</u> אם בתנאי (6) נציג ראשית $r=n$ (n טבעי), $s=\omega$, שנית $r=\omega$, $s=n$ ושלישית $r=s=\omega$, נקבל $A^nA^{\omega}=A^{\omega}A^n=A^{\omega}=\overrightarrow{A^{\omega+\omega}}=A^{\omega}A^{\omega}$. להיפך, מן השויונות שהוכחנו זה עתה נובע כי $A^n\overrightarrow{A^r}=\overrightarrow{A^r}A^n=\overleftarrow{A^r}=\overrightarrow{A^r}=A^{\omega}$ בשביל כל n טבעי וכל r המקים $r\geq\omega$. מכיון ש $A^nA^m=A^mA^n$ בשביל מעריכים טבעיים m ו n, הרי הוכח תקפו של (6) בשביל כל זוג מעריכים r ו s, מש"ל.

<u>הערה ו'.</u> מטעמי סימטריות נובע על סמך הערה ו' כי גם (7) מתקים אז ורק אז כאשר $A^{\omega}=A^{\omega}A^{\omega}$.

מן ההערות הנ"ל נובע על נקלה:

<u>הערה ז'.</u> התנאים (6) ו (7) שקולים זה כנגד זה (אקויולנטיים ביניהם). כל אחד מן התנאים הללו גורר אחריו את קיומם של כל שבעת התנאים (1) - (7) [6] התנאי (6) (ולכן גם התנאי (7)) שקול כנגד שני התנאים (4) ו (5) [7].

<u>הערה ח'.</u> הדוגמה שהובאה בראשית הסעיף הנוכחי מראה כי שלשת התנאים

---

5) הציון השמאלי הראשון של A לא יעלה איפוא על ω.

6) כי הרי כל שבעת התנאים מתקימים אם $A^{\omega}=A^{\omega}A^{\omega}$.

7) כי הרי שני התנאים הללו גוררים אחריהם את השויונות $A=A^{\omega}A=AA^{\omega}$, ולהיפך.

הראשוניט ב (δ) יכולים להתקים מבלי שהדבר יגרור אחריו את קיומם של התנ-אים (4) ו (5), ומכאן נובע כי התנאי (6) ולכן גם התנאי (7) הם חריפים יותר מתנאי (4) או מתנאי (5). הדוגמה שהובאה ב §4 מוכיחה כי התנאי (4) יכול להתקים מבלי שיתקים התנאי (5), ובעזרת דוגמה אנלוגית אפשר להראות כי גם (4) איננו מסקנה של (5).

<u>הערה ט'.</u> התנאי (4) שקול כנגד "החוק הדיסטריבוטיבי השמאלי",

דהיינו: תהי K קבוצה סופית או אין-סופית של חזקות ימניות $\overrightarrow{A^s}$, ויהי M המשותף של החזקות הללו. תהי $\overrightarrow{A^t}$ חזקה רצונית של A, אז $\overrightarrow{A^t}M$ שוה למשותף 'M של כל המכפלות $\overrightarrow{A^tA^s}$.

<u>הוכחה.</u> נוכיח תחילה כי החוק הדיסטריבוטיבי הנ"ל נובע מן התנאי (4). לשם כך נבחין בין שני מקרים: <u>מקרה א'.</u> בין האידאלים $\overrightarrow{A^s}$ השיכים לקבוצה K קים אידאל מסוים $\overrightarrow{A^{s'}}$ הנמצא בכל האידאלים האחרים של הקבוצה. במקרה זה יהיה כמובן $M=\overrightarrow{A^{s'}}$ והתנאי (4) יתן $\overrightarrow{A^t}M=\overrightarrow{A^{t+s'}}$. נתבונן עתה בקבוצת האידאלים $\overrightarrow{A^tA^s}$ באשר $\overrightarrow{A^s}$ הוא אידאל רצוני השיך ל K. כל האידאלים הללו מכילים את האידאל $\overrightarrow{A^tA^{s'}}$, ולפיכך ישוה המשותף שלהם, כלומר האידאל 'M ל $\overrightarrow{A^tA^{s'}}$. לפיכך נקבל במקרה זה $\overrightarrow{A^t}M=M'$, מש"ל. נעבר עתה <u>למקרה ב':</u> בין האידאלים $\overrightarrow{A^s}$ השיכים ל K אין אידאל המוכל בכל האידאלים האחרים של הקבוצה. במקרה זה קים מספר סודר גבולי r (ראה את הוכחת המשפט ב §3) כך ש $M=A^r$ ו $\overrightarrow{A^s}\supset\overrightarrow{A^r}$ בשביל כל $\overrightarrow{A^s}$ השיך ל K. נוכל כמו כן להניח, כי אם $r'<r$ אז קים $\overrightarrow{A^{s'}}$ ב K כך ש $\overrightarrow{A^{s'}}\subseteq\overrightarrow{A^{r'}}$ [8]. על סמך (4) נוכל איפוא לכתב: $\overrightarrow{A^t}M=\overrightarrow{A^{t+r}}$. מכיון ש t+r הנהו מספר גבולי, הרי $\overrightarrow{A^{t+r}}$ הוא המשותף של כל האידאלים $\overrightarrow{A^{t+a}}$ באשר $a<r$. יהי איפוא a מספר רצוני המקים $1\leq a<r$. על סמך תכונת המינימליות של r נובע כי ב K נמצא אידאל $\overrightarrow{A^s}$ המקים $\overrightarrow{A^a}\supseteq\overrightarrow{A^s}$, ולפיכך יהיה $\overrightarrow{A^tA^a}\supseteq\overrightarrow{A^tA^s}$. מכיון שעל סמך (4) קים $\overrightarrow{A^tA^a}=\overrightarrow{A^{t+a}}$, ובהיות $\overrightarrow{A^tA^a}\supseteq M'$, הרי $\overrightarrow{A^{t+a}}\supseteq M'$. לפיכך יקים גם המשותף של כל ה $\overrightarrow{A^{t+a}}$, כלומר האידאל $\overrightarrow{A^{t+r}}$ את היחס $\overrightarrow{A^{t+r}}\supseteq M'$. אבל $\overrightarrow{A^{t+r}}=\overrightarrow{A^t}M$, ולכן $\overrightarrow{A^t}M\supseteq M'$. מצד שני הרי קים גם היחס ההפוך $\overrightarrow{A^t}M\subseteq M'$ [9] ולפיכך $\overrightarrow{A^t}M=M'$. בזה הוכח החלק הראשון של המשפט.

נראה עתה בעזרת האינדוקציה כי התנאי (4) נובע מן החוק הדיסטריבו-טיבי השמאלי: <u>ראשית</u>, אם $s=1$ הרי (4) מתקים על סמך הגדרת החזקה. <u>שנית,</u> אם $s=s_1+1$, אז על סמך הנחת האינדוקציה: $\overrightarrow{A^rA^s}=\overrightarrow{A^rA^{s_1}}A=\overrightarrow{A^{r+s_1}}A=\overrightarrow{A^{r+s_1+1}}=\overrightarrow{A^{r+s}}$. <u>שלישית</u>, אם s הנהו מספר גבולי, כלומר $\overrightarrow{A^s}=[\ldots,\overrightarrow{A^t},\ldots]$ באשר $t<s$, אז מן החוק הדיסטריבוטיבי נובע $\overrightarrow{A^rA^s}=\underset{t<s}{[\ldots,A^rA^t,\ldots]}$. על סמך הנחת האינדוקציה $\underset{t<r}{\overrightarrow{A^rA^t}=\overrightarrow{A^{r+t}}}$, כלומר $\overrightarrow{A^rA^s}=\underset{t<s}{[\ldots,A^{r+t},\ldots]}$. אבל $\underset{t<s}{[\ldots,\overrightarrow{A^{r+t}},\ldots]}=\overrightarrow{A^{r+s}}$, ולכן $\overrightarrow{A^rA^s}=\overrightarrow{A^{r+s}}$, מש"ל.

---

8) כלומר: r מצטין בתכונת המינימליות.

9) קל להוכח באמתותו של המשפט: אם M הוא המשותף של קבוצה סופית או אין-סופית של אידאלים A,B, וכו' ו U הוא אידאל רצוני ו 'M הוא המשותף של קבוצת האידאלים UA, UB וכו', אז $UM\subset M'$.

<u>הערה י׳.</u> מטעמי סימטריות נובע מן ההערה הקודמת כי התנאי (5) שקול כנגד "החוק הדיסטריבוטיבי הימני", דהיינו: תהי K קבוצה סופית או אין-סופית של חזקות שמאליות $\overleftarrow{A^s}$ של האידאל A, ותהי M המשותף של החזקות הללו. תהי $\overleftarrow{A^t}$ חזקה שמאלית רצונית של A, אז $\overleftarrow{MA^t}$ שוה למשותף של כל המכפלות $\overleftarrow{A^s}\overleftarrow{A^t}$. מן ההערות הקודמות נובע כמו כן כי החוק הדיסטריבוטיבי הימני והחוק הדיסטריבוטיבי השמאלי ביחד שקולים כנגד כל שבעת החוקים (δ).

בעיות פתוחות.

א) האם התנאי השלישי ב (δ), §5 גורר אחריו את שני התנאים הראשונים?

ב) בנה אגודה אשר גרעיניה הימניים הראשונים (עד ω) שונים זה מזה וציוניהם של גרעינים אלה הם מספרים סודרים רצוניים נתונים מראש.

ג) כהכללה לתרגיל ב׳: יהי t מספר סודר נתון מראש ($t \geq 1$) ולכל מספר סודר u המקים את התנאי $u \leq t$ יהי מותאם מספר סודר n_u. בנה אגודה S אשר גרעיניה הימניים S_x מקימים את התנאים: 1) S_t הוא הגרעין המוחלט של S.
2) ציונו של S_x, $x \leq t$ שוה ל n_x.

על זוית קבועה בין $n+2$ כדורים ב n ממדים

שמואל שריבר

יהיו נתונים שני כדורים ע"י השיעורים של מרכזיהם P_1,P_2 ועל ידי הרדיוסים r_1,r_2. הם יוצרים זוית z, באשר

$$\cos z=\left[r_1^2+r_2^2-(\overline{P_1P_2})^2\right]/2r_1r_2 \qquad (1)$$

הגודל (1) הוא סמוריה של אותה החבורה של טרנספורמציות במרחב הנוצרת ע"י מספר זוגי של אינברסיות (החבורה הקונפורמית או האנלגמטית); יהיה לו אפוא מובן גיאומטרי גם אם $|\cos z|>1$ (קל לבדוק דבר זה, לדוגמה, לגבי שני מעגלים במישור שאף להם נקודות ממשיות משותפות).

אם נחליף את סימן אחד הרדיוסים, יחליף הגודל (1) אף הוא את סימנו; מן הראוי אפוא לעסוק בכדורים מכוונים, לאמור: כדורים שבהם קבענו את סימן הרדיוס. לשם הדגמה: שני כדורים ממשיים בעלי רדיוס מאותו סימן משיקים מבחוץ, $\cos z=-1$; משיקים מבפנים, $\cos z=1$; ולהפך אם הרדיוסים בעלי סימן שונה. שני כדורים ממשיים בעלי רדיוסים מאותו סימן, אשר כל אחד מהם "מחוץ" לשני, $\cos z<-1$; כנ"ל, אחד מקיף את השני, $\cos z\geq+1$; ולהפך, כאשר הרדיוסים מסימנים שונים.

כדור במרחב של n ממדים נקבע ע"י $n+1$ פרמטרים, כגון שיעורי המרכז והרדיוס. לכן יהיו רק כדורים במספר סופי שיקימו $n+1$ תנאים, למשל ליצור עם $n+1$ כדורים נתונים זויות נתונות.

יש שימושים רבים בגיאומטריה לתצורה של $n+2$ כדורים נצבים ביניהם במרחב של n ממדים, בעיקר לשם הצגה אנליטית של חבורת הטרנספורמציות האנלגמטיות (שיעורים פוליספריים, Darboux, Klein) אפשר להראות שאם נבחור התצורה זו $n+1$ כדורים ממשיים, יהיה האחרון בעל משואה ממשית אך בעל רדיוס מדומה טהור. נדגים זאת לראשונה ב 3 ממדים (הוכחה יותר מפורשת תבא להלן):

בלי הגבלת הכלליות נניח ששלשה מ 5 הכדורים הם המישורים $x=0,\ y=0,\ z=0$ (ולא, נביא אותם למצב זה ע"י אינברסיה בכדור כלשהו סביב אחת משתי נקודות שלהם, והזזה). המרכז של הכדור הרביעי ימצא אז בראשית הצירים, מאחר שעליו להיות נצב לשלשת המישורים, והוא הדין לכדור החמשי; נסמן את רדיוס הכדור הרביעי ב a ואת זה של החמשי ב b, אז תתן נוסחה (1) $b=\pm ia$, מ.ש.ל.

קל, מצד שני, להגשים תצורה של $n+2$ כדורים ממשיים ב n ממדים אשר כל שנים מהם ייצרו זוית של π (השקה חיצונית, $\cos z=-1$). נסתכל למשל בפשטון (סימפלכס) משוכלל בעל המקצוע 2; סביב כל קדקד נחוג כדור בעל רדיוס 1 ונקבל כך $n+1$ כדורים משיקים ביניהם. אם נחוג כעת סביב המרכז כדור יותר קטן המשיק לאחד מאלה, הרי הוא ישיק גם ליתרם, מטעמי סימטריה - יש עוד כדור "עוטף" את כולם מבחוץ, שלרדיוסו ניתן סימן הפוך.

נשים אפוא לב למערכת כללית של $n+2$ כדורים מכוונים ב n ממדים, שכל שנים מהם יוצרים אותה זוית z. ראינו שכאשר $z=\pi/2$ אחד הכדורים הוא בהכרח מדומה וכאשר $z=\pi$ יש אפשרות לבחור את כולם ממשיים. וכאן מתעוררת השאלה אם קימת איזו זוית-בינים, אשר בחירת z בינה לבין π תרשה לכל הכדורים בתצורה להיות ממשיים ואילו בחירת z בינה לבין $\pi/2$ לא תאפשר זאת. מטרת מאמר זה היא לענות בחיוב על שאלה זו ולתת נוסחה לזוית-הבינים.

לפני הטיפול האנליטי יש להצביע על מקרה מיוחד, שיתברר לנו להלן כסינגולרי: נתאר לנו אלמנט-מישור וכדור משתנה המשיק לו מצד אחד. אם נחזיק את סימן הרדיוס קבוע, וניתן לו $n+2$ ערכים ממשיים כלשהם נקבל את התצורה עם $\cos z=1$ (השקה פנימית). בערך הזה עוד נפגש להלן.

נעבור להצגה אנליטית. הנוסחה (1) נותנת לנו

$$(\overline{P_1P_2})^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos z \qquad (2)$$

נתבונן ב $n+2$ כדורים P_i,r_i, $1\leq i\leq n+2$ שכולם קובעים זוית z, $\cos z=q$. נסמן עוד את $|P_iP_k|$ ב d_{ik}. אנו מקבלים ראשית את $\binom{n+2}{2}$ אי-השויונות הבאים:

$$(3) \qquad 0 \leq d_{ik}^2 = r_i^2 + r_k^2 - 2q r_i r_k, \qquad 1 \leq i,k \leq n+2$$

ואת תנאי Cayley בעד המרחקים ההדדיים של n+2 נקודות ב n ממדים.

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & \cdots & d_{1,n+2}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & \cdots & d_{2,n+2}^2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n+2,1}^2 & & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

מן הגדלים r_i נצטרך לדרוש שיהיו שונים מ 0, אחרת תאבד הנוסחה (1) את מובנה. לשם הקלה על החשבונות נדרוש מהם ג"כ שיהיו כולם סופיים (שהכדו-רים לא יהיו מישורים עיליים). בדטרמיננטה (4) נציג את ערכי d_{ik}^2 מתוך (3) ונקבל את (5).

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 0 & r_1^2+r_2^2-2qr_1r_2 & \cdots & r_1^2+r_{n+2}^2-2qr_1r_{n+2} & 1 \\ r_2^2+r_1^2-2qr_2r_1 & 0 & \cdots & r^2+r_{n+2}^2-2qr_2r_{n+2} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n+2}^2+r_1^2-2qr_{n+2}r_1 & & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

בדטרמיננטה זו נחלק את השורה ה i ב r_i ואת העמודה ה k ב r_k ונקבל את (6)

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \frac{r_1}{r_2}+\frac{r_2}{r_1}-2q & \cdots & \frac{r_1}{r_{n+2}}+\frac{r_{n+2}}{r_1}-2q & \frac{1}{r_1} \\ \frac{r_2}{r_1}+\frac{r_1}{r_2}-2q & 0 & \cdots & & \frac{1}{r_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{r_{n+2}} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \cdots & \frac{1}{r_{n+2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

מן העמודה ה k נחסיר כעת את האחרונה מכפלת ב r_k (שים לב שבאלכסון הראשי יופיע -1 במקום 0) וכן מן השורה ה i את האחרונה, מכפלת ב r_i (שוב יתוסף -1 באלכסון הראשי). בדטרמיננטה (6) יעלמו בזה כל האברים המכילים איזה r שאינם עומדים בשורה האחרונה או בעמודה האחרונה, ונקבל

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} -2 & -2q & -2q & \cdots & -2q & s_1 \\ -2q & -2 & -2q & \cdots & -2q & s_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2q & -2q & -2q & \cdots & -2 & s_{n+2} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

באשר $s_i = \frac{1}{r_i}$

גם את אי-השויונות (3) נחלק ב $r_i^2 r_k^2$ ונקבל

$$(8) \qquad s_i^2+s_k^2-2qs_is_k \geq 0$$

הדטרמיננטה (7) היא, כפי שקל לראות, צורה רבועית סימטרית ב s_i, שערכה יהיה

$$D = f_n(q) \sum_{i=1}^{n+2} s_i^2 + g_n(q) \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{k>i} s_i s_k \tag{9}$$

לשם חישוב $f_n(q)$ נמחוק ב (7) את השורה הראשונה והאחרונה ואת העמודה הראשונה והאחרונה, ונקבל

$$f_n(q)=(-1)(-2)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & \overbrace{q \; q \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; q}^{n} \\ q & 1 \; q \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; q \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ q & q \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; 1 \end{vmatrix} =(-1)(-2)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & q & \cdots q & q \\ q-1 & 1-q & 0 \cdots 0 & 0 \\ q-1 & 0 & 1-q \cdots 0 & 0 \\ \cdots & & 1-q & 0 \\ q-1 & 0 & \cdots 0 & 1-q \end{vmatrix} = \tag{10}$$

$$= (-1)(-2)^{n+1} \begin{vmatrix} 1+nq & q & q \cdots & q \\ & 1-q & & 0 \\ & & 1-q & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & 1-q \end{vmatrix} = (-1)(-2)^{n+1}(1+nq)(1-q)^n$$

ובאופן אנלוגי לגמרי

$$g_n(q) = 2.(-2)^{n+1} \begin{vmatrix} q & q & q \cdots q \\ q & 1 & q \cdots q \\ q & q & 1 \cdots q \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q & q & q \cdots 1 \end{vmatrix} =2(-2)^{n+1} \begin{vmatrix} q & q & & q \\ 0 & 1-q & & 0 \\ 0 & & 1-q & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & 1-q \end{vmatrix} =2(-2)^{n+1}q(1-q)^n \tag{11}$$

התנאים הם אפוא אי-השויונות (8) והשויון

$$(1-q)^n -(1+nq)\left[\sum s_i^2+2q \sum s_i s_k\right] = 0 \tag{12}$$

רואים שכאשר $q=1$ מתמלא התנאי (12) באופן בלתי תלוי ב s_i, וגם אי-השויונות (8) מתמלאים אז לכל מערכת s_i ממשיים. זהו המקרה הסינגולרי שפגשנו אותו לעיל. נתעלם אפוא ממנו ונפנה למקרה הכללי.

נבחר לנו q ו n+1 s-ים ראשונים כאלה, שיקימו את הראשונים מבין אי-השויונות (8), ל s_{n+2} נקרא t; הוא יקבע ע"י המשואה (12) אשר שם הוא הנעלם היחידי, ואז נצטרך לדרוש ממנו שיהיה ממשי ושיקים את הנותרים מבין אי-השויונות (8). נסמן לשם קיצור

$$\sum_1^{n+1} s_i=u, \tag{13}$$ $$\sum_1^{n+1} s_i^2=v, \tag{14}$$ $$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k>i} s_i s_k=w, \tag{15}$$ $$u^2=v+2w \tag{16}$$

אנו מקבלים את אי-השויונות הבאים

$$\sum (s_i-s_k)^2=nv-2w=(n+1)v-u^2 \geqslant 0 \tag{17}$$

וכמו כן, מתוך חבור אי-השויונות (8)

$$\sum (s_i^2+s_k^2-2qs_i s_k)= nv-2qw=(n+q)v-qu^2 \geqslant 0 \tag{18}$$

המשואה (12) נותנת בעד t, לפי סימונים אלה

$$-(1+nq)v-(1+nq)t^2+2qw+2qut=0 \tag{19}$$

ומכאן לפי (16)

$$(1+nq)t^2-2qut+[1+(n+1)q]v-qu^2=0 \tag{20}$$

הדיסקרימיננטה צריכה להיות אי-שלילית, לכן

$$q^2u^2-(1+nq)[1+(n+1)q]v+(1+nq).qu^2 \geqslant 0 \tag{21}$$

$$[1+(n+1)q][qu^2-(1+nq)v] \geqslant 0 \tag{22}$$

אם הביטוי בסוגריים השמאליים של (22) הוא אי-שלילי, הרי גם הביטוי בסוגרים הימניים צריך להיות אי-שלילי. אך בכדי להראות שזה לא יתכן, נחלק את המקרה הזה לשלשה מקרים חלקיים:

א) $q>1$, אז

$$qu^2-(1+nq)v=[qu^2-(n+q)v]+(1-n)(q-1)v<0 \tag{23}$$

כי $qu^2-(u+q)v\leqslant 0$ לפי (18) והביטוי השני שלילי, מאחר ש v סכום ריבועים, $q>1$, $n>1$.

ב) $0\leqslant q<1$. אז, לפי (17)

$$qu^2-(1+nq)v<qu^2-(q+nq)v=q[u^2-(n+1)v]\leqslant 0 \tag{24}$$

ג) $\frac{-1}{n+1}<q<0$ אז בכל אופן $1+nq>0$ ולכן $qu^2-(1+nq)v<0$ כי הוא סכום שני ביטויים שליליים. בזאת נדחה האפשרויות $1+(n+1)q>0$ (פרט לטריביאלית $q=1$). נראה כעת שבעד כל זוית המקימת $1+(n+1)q\leqslant 0$ ישנה אפשרות להגשים תצורה ממשית.

לשם כך נבחר $s_1=s_2=...=s_{n+1}=s$. המשואה (20) נותנת אז

$$(1+nq)t^2-2q(n+1)st+(n+1)s^2=0 \tag{25}$$

אשר הדיסקרימיננטה שלה, d, הניתנת ע"י

$$d=(n+1)s^2(q-1)[1+(n+1)q] \tag{26}$$

תהיה באמת אי-שלילית כאשר $1+(n+1)q\leqslant 0$. התנאים הראשונים (8) ביחס ל s יתקימו אז כפי שמובן מאליו, אך גם התנאי האחרון בין s ו t, כי, לפי (25) יוצא

$$(n+1)(s^2+t^2-2\tilde{q}st)=n(1-q)t^2 \geqslant 0 \tag{27}$$

בזה קבלנו את הזוית הגבולית ב n ממדים

$$z = \arccos \frac{-1}{n+1} \tag{28}$$

על רגולריות מחלטת של טרנספורמציות ליניאריות

צבי שור

1. יהיו נתונים סדרת ערכים קבועים $s\equiv\{s_n\}$ ומטריצה אין-סופית בעלת אברים קבועים $A\equiv(a_{mn})$. אם כל הטורים $\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}s_n$ מתכנסים נאמר כי A __שמושית__ כלפי s, והסדרה $t\equiv\{t_m\}\equiv\{\sum_n a_{mn}s_n\}$ היא ה __A-טרנספורם__ של s. נסמן $t\equiv A(s)$.

הבעיה הכללית הפשוטה ביותר בתורת הטרנספורמציות הליניאריות היא קביעת קריטריון לשמירת תכונה מסוימת ז.א., מציאת תנאים הכרחיים ומספיקים לכך שכל הסדרות s (או קבוצה חלקית מהן) בעלות תכונה מסוימת תעברנה ע"י A לסדרות t שגם להן התכונה הנדונה. הבעיה הראשית בכוון זה היא שמירת ההתכנסות; אפיון המטריצות A המעבירות כל סדרה מתכנסת s לסדרה מתכנסת t. חשיבות מיוחדת לבעיה זו בהשקיפנו על הטרנספורמציה הליניארית כעל שיטת סומביליות כלומר, כעל אמצעי להכללת מושג הגבול. אם $t\equiv A(s)$ מתכנסת נאמר כי s סומבילית-A ונסמן $\lim_{m\to\infty} t_m = A\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n$. תהיינה (c) ו I_A קבוצות הסדרות המתכנסות והסומביליות-A בהתאמה. שמירת ההתכנסות תתבטא בקיום היחס $I_A\supseteq(c)$. מטריצה A המקימת יחס זה תקרא __משמרת__ (קונסרב-טיבית). מטריצה משמרת A מגדירה איפוא שיטת סומביליות שאינה חלשה מההת-כנסות הרגילה, במובן זה שכל סדרה מתכנסת בהכרח סומבילית-A, ולכן גוכל לראותה כהרחבה להתכנסות.

__משפט 1.1__ *(Kojima[1], Schur[2]) תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה משמרת הם

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_{mn}|\leq M \qquad m=0,1,2,\ldots \tag{1.11}$$

$$\exists \lim_{m\to\infty} a_{mn}=\alpha_n \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{1.12}$$

$$\exists \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0} a_{mn}=\rho \tag{1.13}$$

ואם התנאים מתמלאים יתקים

$$\tau\equiv\lim_m t_m=\rho\sigma+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(s_n-\sigma) \tag{1.14}$$

בהיות $\sigma\equiv\lim_n s_n$ ו $t\equiv A(s)$.

להלן יסמנו s סדרה כלשהי, A מטריצה אין-סופית, $t\equiv A(s)$, σ ו τ את גבולות s ו t בהתאמה.

__הגדרה 1.2__ A משמרת המקימת $\tau=\rho\sigma$, בהיות ρ ערך קבוע שאינו תלוי ב s, תקרא מטריצה כופלת. ρ יקרא הגורם של A.

__משפט 1.3__ תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה כופלת הם (1.11), (1.13) ו $\exists \lim_m a_{mn}=0$ (1.31).

__הגדרה 1.4__ A המעבירה כל s מתכנסת ל t המתכנסת ל σ תקרא מטריצה __רגולרית__. A רגולרית היא A כופלת בעלת הגורם 1. ממשפט 1.3 נקבל

---

(1) T. Kojima, On generalized Toeplitz's theorems on limit and their applications. Tôhoku M.J. 12 (1917) 291-326.

(2) I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. Crelle 151 (1920) 79-111.

* ההוכחות למשפטים 1.1, 1.3 ו 1.5 נמצאות בספרו של Dienes: "The Taylor Series" פרק XII.

<u>משפט 1.5</u> (O. Toeplitz[3]) תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה רגולרית הם (1.11), (1.31) ו $\exists \lim_{m} \sum_{n} a_{mn}=1$ (1.51).

במאמר זה נדון בשמירת ההתכנסות המחלטת.

2. <u>הגדרה 2.1</u> s תקרא מתכנסת בהחלט אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}|s_n-s_{n-1}|$, בהיות $s_{-1}=0$, מתכנס ז.א., אם היא סדרת סכומיו החלקיים של טור מתכנס בהחלט.

להלן יסמן אבר בעל הציון 1- את הערך 0.

<u>הגדרה 2.2</u> (M. Fekete [4]) s תקרא סומבילית בהחלט לפי A (או <u>סומבילית-|A|</u>) אם $t\equiv A(s)$ מתכנסת בהחלט.

תהיינה $(|c|)$ ו $I_{|A|}$ קבוצות הסדרות המתכנסות בהחלט והסומביליות-|A| בהתאמה.

<u>הגדרה 2.3</u> (F.M. Mears [5]) A המעבירה כל s מתכנסת בהחלט ל t מתכנסת בהחלט תקרא <u>משמרת-בהחלט</u>**.

ובכן A משמרת בהחלט היא מטריצה שמושית כלפי כל $s\in(|c|)$ ומקימת $I_{|A|}\supseteq(|c|)$, כלפי ההתכנסות המחלטת קים משפט אנלוגי למשפט 1.1.

<u>משפט 2.4</u> (F.M. Mears[5]) תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה משמרת בהחלט הם

(2.41) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \text{ מתכנס} \qquad m=0,1,2,\ldots$$

(2.42) $$\sum_{m=0}^{\infty}\Big|\sum_{k=n}^{\infty}(a_{mk}-a_{m-1,k})\Big|\leq M \qquad n=0, ,2,\ldots$$

ואם התנאים מתמלאים יתקים

(2.43). $$\sum_{m=0}^{\infty}|t_m-t_{m-1}|\leq M\sum_{n=0}^{\infty}|s_n-s_{n-1}|$$

בנגוד למשפט 1.1 אין ב 2.4 קשר בין τ ל σ. אמנם מובא הקשר (2.43) אך הוא אי-שויון בלבד ונוסף לזאת איננו מקשר את τ ו σ אלא את $\sum_{m}|t_m-t_{m-1}|$ עם $\sum_{n}|s_n-s_{n-1}|$. להלן נמצא את הקשר בין τ ל σ ובעזרתו נוכיח משפטים אנלוגים ל 1.3 ו 1.5. (עין משפטים 3.6-3.8).

תנאי משפט 1.1 אינם נתנים להשואה עם תנאי 2.4. אפשר היה לשער זאת מראש שהרי מצד אחד A משמרת בהחלט נדרשת להעביר כל s מתכנסת בהחלט ל t מתכנסת בהחלט בה בשעה ש A משמרת מעבירה את s ל t מתכנסת (לאו דוקא בהחלט). אך מצד שני משמרת חיבת להעביר כל s מתכנסת (לאו דוקא בהחלט) ל t מתכנסת ואילו משמרת בהחלט יכלה להעביר s מתכנסת (לא בהחלט) ל t מתבדרת או אפילו לא להיות שמושית כלפיה.

3. נפנה למטריצה הנתנת להשואה עם שתי האחרונות; "מטריצה משמרת על-פני קבוצת הסדרות המתכנסות בהחלט" כלומר, המקימת $I_A\supseteq(|c|)$. ברור כי כל A משמרת ז.א., המקימת $I_A\supseteq(c)$ או משמרת בהחלט ז.א., המקימת $I_{|A|}\supseteq(|c|)$

---

(3) O. Toeplitz. Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace. Mat. Fiz. 22 (1911) 113-19.

(4) M. Fekete. Vizsgálatok az absolut summabilis sorokról, alkalmazással a Dirichlet- és Fourier-sorokra, Math. és Term. Ért. 32 (1914) 389-425.

(5) F.M. Mears. Absolute regularity and the Nörlund Mean. Ann. Math. II 38 (1937) 594-600.

** גב' Mears קוראת לה רגולרית בהחלט אך ברור כי טרמינולוגיה זו איננה אנלוגית למונחים ב §1.

תקים ממילא $I_A \supset (|c|)$.

<u>למה 3.1</u> תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תעביר כל סדרה $\{(s_n-s_{n-1})\}$, בהיות s מתכנסת בהחלט (ז.א., תעביר כל סדרה $\{a_n\}$ בהיות $\sum_n |a_n|$ מתכנס), לסדרה מתכנסת הם

(3.11) $$|a_{mn}| \leq M \qquad m,n=0,1,2,\dots$$

(3.12) $$\exists \lim_m a_{mn} = \alpha_n \qquad n=0,1,\dots$$

ואם התנאים מתמלאים יתקיים

(3.13) $$A\text{-}\lim_n (s_n-s_{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (s_n-s_{n-1}).$$

הוכחה. נוכיח כי התנאים הכרחיים. כל הסדרות $s^k \equiv \{0,\dots,0,1_k,1,\dots\}$ מתכנסות בהחלט. $\{(s^k_n-s^k_{n-1})\} = \{\delta_{nk}\}$ בהיות δ_{mn} הסימבול של Kronecker. $\sum_n a_{mn}(s^k_n-s^k_{n-1})=a_{mk}$. לכן כדי ש $\{\delta_{nk}\}$ תהיה סומבילית-A הכרח שיתקיים הגבול $\lim_m a_{mk}=\alpha_k$ ז.א., (3.12) הכרחי. מ (3.12) נובע $|a_{mn}| \leq N_n$ בהיות $m=0,1,\dots$ ז.א., כל עמודה של A חסומה. נוכיח שכל שורה חסומה. אם שורה מסוימת m_1 איננה חסומה יתקיים $\overline{\lim}_n |a_{m_1 n}| = \infty$. לכן קימת סדרת ציונים $n_1,n_2,\dots$ כך ש $|a_{m_1 n_k}| \geq k^3$ בהיות $k=1,2,\dots$. בהפעילנו את A על הסדרה המתכנסת בהחלט $s_n=\frac{1}{k}$ בהיות $n_k \leq n < n_{k+1}$ נקבל

$$\sum_n a_{m_1 n}(s_n-s_{n-1}) = \sum_k a_{m_1 n_k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right) = \sum_k a_{m_1 n_k}\frac{-1}{k(k-1)}$$

אך אברו הכללי של הטור הימני מקים $|a_{m_1 n_k}/k(k-1)| \geq \frac{k^3}{k^2}=k$ ולכן הטור אינו מתכנס ז.א., A אפילו איננה שמושית כלפי $\{(s_n-s_{n-1})\}$. ובכן קבלנו

(3.14) $$|a_{mn}| \leq M_m \quad n=0,1,2,\dots \; ; \qquad |a_{mn}| \leq N_n \quad m=0,1,2,\dots$$

מכאן נובע שאם (3.11) אינו מתקיים, יתקיים $\overline{\lim}_{m,n\to\infty} |a_{mn}| = \infty$ (3.15).
נניח זאת. נבחר זוג ציונים m_1 ו n_1 כך ש $|a_{m_1 n_1}| \geq 4$. זה אפשרי הודות ל (3.15). נסמן $M^*_{m_1} \equiv \sup_{n \geq n_1} |a_{m_1 n}|$ (חסם עליון). מ (3.14) נובע כי $M^*_{m_1}$ סופי. נבחר ציון $n^*_1 \geq n_1$ כך ש $|a_{m_1 n^*_1}| \geq M^*_{m_1} - \frac{1}{4}$. זה אפשרי לפי הגדרת $M^*_{m_1}$.
נקבע $s_n=0$ עבור $n<n^*_1$. נמשיך לבחור שלוש סדרות ציונים $m_1,m_2,\dots;\; n_1,n_2,\dots;\; n^*_1,n^*_2,\dots$ לפי האינדוקציה הבאה. לאחר שבחרנו r-1 שלישיות ציונים $m_1,n_1,n^*_1;\dots;m_{r-1},n_{r-1},n^*_{r-1}$ נבחר זוג ציונים $m_r>m_{r-1}$ ו $n_r>n^*_{r-1}$ כך ש $|a_{m_r n_r}| > 4^{r^2}+4^r\sum_{k=1}^{r-1} N_{n^*_k}$ (3.16). זה אפשרי הודות ל (3.15). נסמן $M^*_{m_r} \equiv \sup_{n \geq n_r} |a_{m_r n}| \leq M_{m_r}$ (3.17). נבחר ציון $n^*_r \geq n_r$ כך ש $|a_{m_r n^*_r}| \geq M^*_{m_r} - \frac{1}{4^r} > 4^{r^2}+4^r\sum_{k=1}^{r-1} N_{n^*_k} - \frac{1}{4^r}$ (3.18) ונקבע $s_n=\sum_{k=0}^{r-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ (3.19)

בהיות $n_r^* < n < n_{r+1}^*$. ברור כי s המגדרת ע"י (3.19) מתכנסת בהחלט.

אך $t \equiv A\{(s_n - s_{n-1})\}$ תקים

$$|t_{m_r}| \equiv \Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_{m_r n}(s_n - s_{n-1})\Big| = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_r n_k^*}(s_{n_k^*} - s_{n_k^*-1}) =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{r-1} a_{m_r n_k^*}(s_{n_k^*} - s_{n_k^*-1}) + a_{m_r n_r^*}(s_{n_r^*} - s_{n_r^*-1}) + \sum_{k=r+1}^{\infty} a_{m_r n_k^*}(s_{n_k^*} - s_{n_k^*-1})\Big|$$

מ (3.19) נקבל
$$\geq |a_{m_r n_r^*}|\left(\tfrac{1}{4}\right)^{r-1} - \sum_{k=1}^{r-1} |a_{m_r n_k^*}|\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=r+1}^{\infty} |a_{m_r n_k^*}|\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1}$$

מ (3.17) נקבל
$$\geq |a_{m_r n_r^*}|\left(\tfrac{1}{4}\right)^{r-1} - \sum_{k=1}^{r-1} |a_{m_r n_k^*}|\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1} - M_{m_r}^* \sum_{k=r}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k}$$

מ (3.18) נקבל
$$\geq |a_{m_r n_r^*}|\left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^{r-1} - \sum_{k=r}^{\infty}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k}\right] - \sum_{k=1}^{r-1} a_{m_r n_k^*}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{r} \sum_{k=r}^{\infty}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k}$$

$$\geq \left(4^{r^2} + 4^r \sum_{k=1}^{r-1} N_{n_k^*} - \frac{1}{4^r}\right)\cdot\left(\frac{1}{4^{r-1}} - \frac{1}{3.4^{r-1}}\right) - \frac{1}{4^r}\cdot\frac{1}{3.4^{r-1}} - \sum_{k=1}^{r-1} N_{n_k^*}$$

$$> \left(4^{r^2} + 4^r \sum_{k=1}^{r-1} N_{n_k^*} - \frac{1}{4^r}\right)\frac{1}{4^r} - \sum_{k=1}^{r-1} N_{n_k^*} - \frac{1}{3.4^{2r-1}} > 4^{r^2}/4^r - 1$$

$$\therefore \lim_{r\to\infty} |t_{m_r}| = \infty$$

$$\therefore \overline{\lim_{m\to\infty}} |t_m| = \infty$$

לכן t אינה מתכנסת. קבלנו סתירה, ולכן (3.11) הכרחי.

נוכיח כי התנאים מספיקים. הודות ל (3.11) הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(s_n - s_{n-1})$ מתכנסים במדה שוה כלפי m עבור כל s מתכנסת בהחלט כי $\sum_n |a_{mn}(s_n - s_{n-1})| \leq M \sum_n |s_n - s_{n-1}|$. לכן הודות ל (3.12) נקבל, ע"י מעבר לגבול אבר אבר, $\exists \lim_m \sum_n a_{mn}(s_n - s_{n-1}) = \sum_n \alpha_n(s_n - s_{n-1})$. מ.ש.ל.

<u>משפט 3.2</u> תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה משמרת על-פני קבוצת הסדרות המתכנסות בהחלט הם

$$|A_{mn}| \equiv \Big|\sum_{k=n}^{\infty} a_{mk}\Big| \leq M \qquad m,n=0,1,2,\ldots \tag{3.21}$$

$$\exists \lim_{m\to\infty} A_{mn} = A_n \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{3.22}$$

ואם התנאים מתמלאים יתקים

$$\tau \equiv A\text{-}\lim_n s_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s_n - s_{n-1}). \tag{3.23}$$

הוכחה. נסתכל בסדרה $\{\delta_{nn}\} \equiv \{1\}$. היא מתכנסת בהחלט. כדי ש A תהיה שמושית כלפיה הכרח שכל הטורים $\sum_n a_{mn}$ יתכנסו. לכן יתקים

$|A_{mn}| = \Big|\sum_{k=n}^{\infty} a_{mk}\Big| \leq M_m$ ואפילו $\lim_n A_{mn} = 0$ לכל m סופי.

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}s_n = \lim_{r\to\infty}\sum_{n=0}^{r} a_{mn}s_n = \lim_{r}\sum_{n=0}^{r}(A_{mn}-A_{m,n+1})s_n = \tag{3.24}$$

$$= \lim_{r}\left[\sum_{n=0}^{r} A_{mn}(s_n-s_{n-1}) - A_{m,r+1}s_r\right] =$$

היות ו $\sum_n |s_n-s_{n-1}|$ מתכנס, $|A_{mn}|\leq M_m$ ו $\lim_r A_{m,r+1}=0$ נקבל

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}(s_n-s_{n-1})$$

ובכן $t\equiv A(s)$ קימת והיא טרנספורם ליניארי של $\{(s_n-s_{n-1})\}$ לפי המטריצה $(A_{mn})\equiv(\sum_{k=n}^{\infty} a_{mk})$. לכן נובע מלמה 3.1 כי (3.21) ו (3.22) הכרחיים ומספיקים ויתקים השויון (3.23)*.
מ.ש.ל.

מה היחס בין תנאי משפט 1.1 ו 3.2? מהגדרת המושגים נובע כי תנאי 1.1 אינם חלשים מתנאי 3.2. אך הם אפילו חזקים מהם כפי שמתברר מהדוגמא הבאה שהנה מטריצה המקימת את תנאי 3.2 ואינה מקימת את (1.11).

$$\begin{vmatrix} 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 0, & 0, & \dots \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & -1, & \dots \end{vmatrix}$$

לעומת זאת, כפי שרואים בקלות, התנאי (3.22) אקוילנטי לזוג התנאים (1.12) ו (1.13);

$$\lim_m \sum_{k=n}^{\infty} a_{mk} = A_n \quad n=0,1,2,\dots \longleftrightarrow \begin{cases} (1.13)\ \exists \lim_m \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} = \rho \\ (1.12)\ \exists \lim_m a_{mn} = \alpha_n \end{cases} \tag{3.22}$$

ויתקימו הקשרים

$$A_n = \rho - \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k \quad ; \quad \alpha_n = A_n - A_{n-1} \qquad n=0,1,2,\dots$$

מה היחס בין הבטויים (1.14) ו (3.23)? תנאי משפט 1.1 המתמלאים ע"י A מבטיחים את התכנסות הטור $\sum_n \alpha_n(s_n-\sigma)$, המופיע ב (1.14), בהיות s מתכנסת. כי $|s_n-\sigma|\longrightarrow 0$ ו $\sum|\alpha_n|\leq M$ כפי שנובע מ (1.11) ו (1.12). תנאי משפט 3.2 מבטיחים את התכנסותו של $\sum_n A_n(s_n-s_{n-1})$, המופיע ב (3.23), בהיות s מתכנסת בהחלט. כי $\sum_n|s_n-s_{n-1}|$ מתכנס ו $|A_n|\leq M$ כפי שנובע מ (3.21) ו (3.22). אם A מקימת את תנאי משפט 1.1 (ממילא מתקימים תנאי 3.2) ו s מתכנסת בהחלט ישתוו הבטויים המופיעים ב (1.14) וב (3.23) ז.א.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s_n-s_{n-1}) = \rho\sigma + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(s_n-\sigma) \tag{3.25}$$

אך שויון זה יתקים אף בתנאים יותר חלשים כך שיוכל להכתב בכל אחד מהמשפטים 1.1 ו 3.2 ז.א., שאם A מקימת את תנאי משפט 1.1 ו s מתכנסת (לאו דוקא בהחלט) הטור באגף השמאלי של (3.25) יתכנס ויתקים השויון (3.25), ואם A מקימת את תנאי משפט 3.2 ו s מתכנסת בהחלט יתכנס הטור באגף הימני ויתקים השויון (3.25).

* בהוכחת הלמה לא השתמשנו בתכונה $\lim_n A_{mn}=0$ שיש למטריצה הנדונה במשפט הנוכחי, לו השתמשנו

דבר זה נובע מהמשפט הבא.

משפט 3.3 אם A מקימת את תנאי משפט 3.2, התכנסותו של אחד הטורים המופיעים ב (3.25), בהיות s מתכנסת, גוררת אחריה את התכנסות הטור השני ואת השויון (3.25).

הוכחה:

$$\rho\sigma+\sum_{n=0}^{k}\alpha_n s_n=\rho\sigma+\sum_{n=0}^{k}(A_n-A_{n+1})=\rho\sigma+A_0(s_0-\sigma)+\sum_{n=1}^{k}A_n(s_n-s_{n-1})-A_{k+1}(s_k-\sigma) \qquad (3.31)$$

אך $\rho=A_0$ ולכן

$$=\sum_{n=0}^{k}A_n(s_n-s_{n-1})-A_{k+1}(s_k-\sigma)$$

מ (3.21) ו (3.22) נובע כי $|A_k|\le M$ ולכן, היות ו $s_k\longrightarrow\sigma$, $\lim_k A_{k+1}(s_k-\sigma)=0$. מהתוצאה האחרונה ומ (3.31) מתקבלת מיד טענת המשפט.

משפט 3.4 תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה כופלת על-פני (| |) (קבוצת הסדרות המתכנסות בהחלט) הם (3.21) ו

$$\exists\lim_m A_{mn}=\rho \qquad n=0,1,\ldots \qquad (3.41).$$

הוכחה. A כופלת היא משמרת ולכן נובע מ 3.2 כי (3.21) הכרחי. הסדרה $\{0,\ldots,0,1_k,1,\ldots\}$ מתכנסת בהחלט לערך 1 וכדי שתהיה סומבילית לערך ρ הכרח שיתקיים $\lim_m \sum_n a_{mn}s_n=\lim_m\sum_n A_{mn}(s_n-s_{n-1})=\rho$.
אך $\sum_n A_{mn}(s_n-s_{n-1})=A_{mk}$ ומאחר ש k שרירותי (3.31) הכרחי. מ (3.23) נובע כי התנאים מספיקים. מ.ש.ל.

התנאי (3.31) אקויולנטי לזוג התנאים (1.13) ו (1.31). היות ו A רגולרית היא A כופלת בעלת הגורם 1 יתקים

משפט 3.5 תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה רגולרית על-פני (|c|) הם (3.11) ו

$$\exists\lim_m A_{mn}=1 \qquad (3.51).$$

התנאי (3.51) אקויולנטי לזוג התנאים (1.31) ו (1.51).

נחזר כעת למשפט Mears (משפט 2.4). כפי שהערנו לעיל הפגם בו הוא חסר קשר בין τ ל σ וכתוצאה מזה נעדרים משפטים על A כופלת בהחלט ורגולרית בהחלט. תנאי משפט 3.2 חלשים מתנאי 2.4 ולכן הקשר (3.23) (וכתוצאה מ 3.3 גם הקשר (1.14)) המתקים במשפט 3.2 יתקים גם במשפט 2.4. מ 2.4 בצרוף 3.3 ו 3.2, 3.4, 3.5 בהתאמה נקבל את שלשת המשפטים הבאים.

משפט 3.6 ("Mears") תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה משמרת בהחלט הם (2.41) ו (2.42). ואם התנאים מתמלאים יתקימו הקשרים (2.43), (3.23) ו (1.14).

משפט 3.7 תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה כופלת בהחלט ז.א., משמרת בהחלט כך ש $\tau=\rho\sigma$, הם (2.41), (2.42) ו $\lim_m A_{mn}=\rho$ (3.41)*.

משפט 3.8 תנאים הכרחיים ומספיקים ש A תהיה רגולרית בהחלט (כופלת בהחלט בעלת הגורם 1) הם (2.41), (2.42) ו $\lim_m A_{mn}=1$ (3.51)*.

(המשך יבוא)

סדרות-נסיגה

ז'ב ירדן

בשם *סדרת-נסיגה* $W=(W_n)$ קוראים לסדרת מספרים

$$W_o, W_1, \dots$$

הממלאים נוסחת-נסיגה מצורת

$$a_oW_n+a_1W_{n+1}+\dots+a_sW_{n+s}=0 \quad (a_oa_s\neq 0)$$

באשר $a_o,\dots,a_s$ היא מערכת *קבועה* של מקדמים. s נקרא *סדר* הסדרה, המערכת $a_o,\dots,a_s$ נקראת *סקלת* הסדרה, $W_o,\dots,W_{s-1}$ נקראים *אברי-התחלה*.

בגלל ההומוגניות אפשר לשים במקום $a_o,\dots,a_s$ כל $s+1$ מספרים מתכונתיים אחרים.

כרגיל מטפלים במקרה כאשר $W_o,\dots,W_{s-1}$ ו $a_o,\dots,a_s$ הם מספרים שלמים ו $a_s=-1$. אז כל אברי הסדרה הם מספרים שלמים. אם, נוסף לזה, קים $(W_o,\dots,W_{s-1})=1$, קוראים לסדרה *מצומצמת*.

<u>משפט 1.</u> לכל s סדרות-נסיגה מסדר s

$$W^{(1)}, \dots, W^{(s)}$$

בעלות נוסחת-נסיגה משותפת

$$W_{n+s}=a_oW_n+a_1W_{n+1}+\dots+a_{s-1}W_{n+s-1} \quad (a_o\neq 0)$$

הבטוי

$$\frac{(-1)^{n(s-1)}}{a_o^{n-1}}\begin{vmatrix} W^{(1)}_{n+1} & W^{(1)}_{n+2} & \dots & W^{(1)}_{n+s} \\ W^{(2)}_{n+1} & W^{(2)}_{n+2} & \dots & W^{(2)}_{n+s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^{(s)}_{n+1} & W^{(s)}_{n+2} & \dots & W^{(s)}_{n+s} \end{vmatrix}=(-1)^{n(s-1)}a_o^{1-n}D$$

הוא *שמורה* (אינוריינטה) כלפי n.

<u>הוכחה.</u> אם נכתוב בקצור את השורה הכללית של הקוצב (דטרמיננטה) במקום כולו, יהיה לנו:

$$(-1)^{n(s-1)}a_o^{1-n}D=(-1)^{n(s-1)}a_o^{-n}|a_oW_{n+1}\ W_{n+2}\ \dots\ W_{n+s}|$$

$$=(-1)^{n(s-1)}a_o^{-n}|a_oW_{n+1}+a_1W_{n+2}+\dots+a_{s-1}W_{n+s}\ W_{n+2}\ \dots\ W_{n+s}|$$

$$=(-1)^{n(s-1)}a_o^{-n}|W_{n+s+1}\ W_{n+2}\ \dots\ W_{n+s}|$$

$$=(-1)^{(n+1)(s-1)}a_o^{-n}|W_{n+2}\ W_{n+3}\ \dots\ W_{n+s+1}|.$$

זאת אומרת, $(-1)^{n(s-1)}a_o^{1-n}D$ שוה ב n וב $n+1$, ולכן איננו תלוי כלל ב n.

<u>משפט 2.</u> אם $W^{(o)},\dots,W^{(r)}$ הן $r+1$ סדרות-נסיגה בעלות סקלה משותפת מסדר s

$$a_o, \dots, a_s \quad (a_oa_s\neq 0)$$

ואם הקשר הלינארי

$$b_oW^{(o)}_n+\dots+b_rW^{(r)}_n=0$$

קים ב s ערכים עוקבים של n, הוא קים בכל ערך של n.

<u>הוכחה.</u> נניח כי (1) קים ב $n=m,m+1,\dots,m+s-1$ ונסתכל ב $s+1$ הבטויים הבאים:

$$b_0a_0\ W_m^{(0)}\ +\dots+b_ra_0\ W_m^{(r)}$$
$$b_0a_1\ W_{m+1}^{(0)}\ +\dots+b_ra_1\ W_{m+1}^{(r)}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_0a_{s-1}W_{m+s-1}^{(0)}+\dots+b_ra_{s-1}W_{m+s-1}^{(r)}$$
$$b_0a_s\ W_{m+s}^{(0)}\ +\dots+b_ra_s\ W_{m+s}^{(r)}$$

s הבטויים הראשונים מתאפסים בהתאם להנחת המשפט. סכומי המחוברים המתאימים בכל בטוי מתאפסים בהתאם לנוסחת-הנסיגה. לכן מתאפס גם הבטוי האחרון, גם לאחר חלוק ב $a_s\neq0$. הקשר הליניארי קים אפוא גם ב $n=m+s$.

כיוצא בו מוכיחים שהוא קים ב $n=m-1$. לפיכך הוא קים בכללו.

<u>משפט 3.</u> אם $W, W^{(1)},\dots,W^{(s)}$ הן $s+1$ סדרות-נסיגה בעלות סקלה משותפת

$$a_0,\dots,a_s \quad (a_0a_s\neq0)$$

מסדר s, והם

$$D=\begin{vmatrix} W_0^{(1)} & W_0^{(2)} & \dots & W_0^{(s)} \\ W_1^{(1)} & W_1^{(2)} & \dots & W_1^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{s-1}^{(1)} & W_{s-1}^{(2)} & \dots & W_{s-1}^{(s)} \end{vmatrix}\neq0,$$

קים לכל n הקשר הליניארי

$$DW_n=D_1W_n^{(1)}+D_2W_n^{(2)}+\dots+D_sW_n^{(s)},$$

באשר D_i הוא הקוצב מסדר s המתקבל מ D אם במקום עמודתו ה i שמים את האברים

$$W_0,\ W_1,\ \dots,\ W_{s-1}.$$

<u>הוכחה.</u> בתנאי $D\neq0$ יש בודאי פתרון מן הסוג האמור ב $x_1,\dots,x_s$ למערכת s המשואות

$$W_0\ =W_0^{(1)}x_1+W_0^{(2)}x_2+\dots+W_0^{(s)}x_s$$
$$W_1\ =W_1^{(1)}x_1+W_1^{(2)}x_2+\dots+W_1^{(s)}x_s$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$W_{s-1}=W_{s-1}^{(1)}x_1+W_{s-1}^{(2)}x_2+\dots+W_{s-1}^{(s)}x_s$$

הקשר הליניארי המדובר קים אפוא ב s ערכים עוקבים של n. לכן, לפי משפט 2, הוא קים בכל ערך של n.

בפרט יוצא ממשפט 3

<u>משפט 4.</u> אם W ו $\bar{W}$ הן שתי סדרות-נסיגה בעלות סקלה משותפת מסדר s ואם

$$D=\begin{vmatrix} W_0 & W_1 & \dots & W_{s-1} \\ W_1 & W_2 & \dots & W_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{s-1} & W_s & \dots & W_{2s-2} \end{vmatrix} \neq 0$$

יהיה לכל n

$$D\bar{W}_n=D_1W_n+D_2W_{n+1}+\dots+D_sW_{n+s-1}$$

באשר D_i הוא הקוצב מסדר s המתקבל מ D אם במקום עמודתו ה i שמים את האברים

$$\bar{W}_0,\ \bar{W}_1,\ \dots,\ \bar{W}_{s-1}.$$

<u>משפט 5.</u> בסדרת-נסיגה מצומצמת (W_n) בעלת הסקלה

$$a_0,\ \dots,\ a_{s-1},\ -1$$

כל מחלק ראשוני משותף של s אברים עוקבים הוא מחלק של a_0. בפרט, אם $a_0=\pm 1$, גדל המחלקים המשותפים של כל s אברים עוקבים הוא 1.

<u>הוכחה.</u> המשפט קים ריקם ל s אברי-ההתחלה, הואיל והסדרה מצומצמת. יהי המשפט קים ל s האברים העוקבים

$$W_n,\ W_{n+1},\ \dots,\ W_{n+s-1},$$

ויהי p מחלק ראשוני משותף של

$$W_{n+1},\ W_{n+2},\ \dots,\ W_{n+s}.$$

מתוך נוסחת-הנסיגה

$$W_{n+s}=a_0W_n+a_1W_{n+1}+\dots+a_{s-1}W_{n+s-1}$$

נובע כי p מחלק ל a_0W_n. אם p זר ל W_n, הוא מחלק ל a_0. אם p מחלק ל W_n הוא מחלק משותף של $W_n, W_{n+1}, \dots, W_{n+s-1}$, לכן, לפי ההנחה, הוא מחלק ל a_0.

<u>משפט 6.</u> כל סדרת-נסיגה מצומצמת (W_n) מסדר s בעלת הסקלה

$$a_0,\ \dots,\ a_{s-1},\ -1$$

היא מחזורית טהורה לפי כל מודד (מודול) $m>1$ הזר ל a_0. ארך המחזור P מגבל ע"י

$$P\leq m^s-1.$$

<u>הוכחה.</u> בתקף הנסיגתיות תחלנה השאריות מודולו m לחזור במחזור החל מן המקום שבו מתחילה המערכת הראשונה של s שאריות עוקבות שכבר הופיעו פעם. אך מספר החליפות עם חזרות של m אברים ב s מקומות הוא סופי ושוה m^s. מזה יש, בהתאם למשפט 5, לנכות את החליפה המכילה רק אפסים, הואיל והסדרה מצומצמת, $m>1$ ו $(m,a_0)=1$. מכאן יוצא כי הסדרה היא מחזורית וארך מחזורה איננו עולה על m^s-1. שהיא מחזורית טהורה יש לראות מזה כי ההמשך אחורנית נקבע באפן חדערכי, כי אם

$$r_1,\ \dots,\ r_s$$

הן s שאריות עוקבות לפי המודד m, נקבעת השארית r הקודמת ל r_1 ע"י

$$a_0r+a_1r_1+\dots+a_sr_s\equiv 0\ (m)$$

בתנאי $(a_0,m)=1$ יש לחפפה האחרונה רק פתרון אחד ב r והוא מוכרח לשוות לכל שארית r_0 אחרת הקודמת ל r_1 במערכת שאריות עוקבות $r_0, r_1, \dots, r_s$.

<u>משפט 7.</u> כל מספר טבעי הזר ל a_0 מחלק לאין-סוף אברים של כל סדרת-נסיגה מצומצמת (W_n) בעלת הסקלה $a_0, \dots, a_{s-1}$, -1, שאחד מאבריה מתאפס.

הוכחה. האבר המתאפס מתחלק בכל מספר, ובגלל המחזוריות השהורה, בהתאם למשפט 6, יופיע המספר כמחלק עוד אין-סוף פעמים.

משפט-עזר 1. אם W ו $\bar{W}$ הן שתי סדרות כלשהן של מספרים שלמים כך שהאבר הכללי ב $\bar{W}$ כפול במספר שלם D נתן להתבטא כצרוף לינארי f במקדמים שלמים של אברי W, כל מחזור ב W לפי מודל m הזר ל D הוא גם מחזור ב $\bar{W}$ לפי אותו מודל.

הוכחה. יהי P מחזור ב W לפי מודל m. אז יהיה

$$D\bar{W}_{n+P}=f_{n+P}\equiv f_n=D\bar{W}_n \pmod{m}$$

מכאן, אם $(D,m)=1$,

$$\bar{W}_{n+P}\equiv\bar{W}_n \pmod{m}.$$

משפט 8. ארכי המחזורים לפי מודל m בכל שתי סדרות-נסיגה W ו $\bar{W}$ בעלות סקלה משותפת מסדר s, שוים לכל m הזר ל D ול $\bar{D}$, באשר

$$D=\begin{vmatrix} W_0 & W_1 & \dots & W_{s-1} \\ W_1 & W_2 & \dots & W_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{s-1} & W_s & \dots & W_{2s-2} \end{vmatrix}, \quad \bar{D}=\begin{vmatrix} \bar{W}_0 & \bar{W}_1 & \dots & \bar{W}_{s-1} \\ \bar{W}_1 & \bar{W}_2 & \dots & \bar{W}_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{W}_{s-1} & \bar{W}_s & \dots & \bar{W}_{2s-2} \end{vmatrix}$$

הוכחה. משפט-עזר 1 ומשפט 4.

משפט 9. אם W היא סדרת-נסיגה בעלת הנוסחה

$$a_0W_n+a_1W_{n+1}+\dots+a_sW_{n+s}=0 \qquad (1)$$

ואם למשואה

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_sx^s=0 \qquad (2)$$

יש s שרשים ש ו נ י ם

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_s$$

קים

$$DW_n=D_1x_1^n+D_2x_2^n+\dots+D_sx_s^n$$

באשר

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_s \\ x_1^2 & z_2^2 & x_3^2 & \dots & x_s^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{s-1} & x_2^{s-1} & x_3^{s-1} & \dots & x_s^{s-1} \end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_s-x_1)\dots(x_s-x_{s-1})$$

היא ה ו נ ד ר מ ו נ ד ה של השרשים ו D_i הוא הקוצב מסדר s המתקבל מ D אם במקום עמודתו ה i שמים את האברים

$$W_0,\ W_1,\ \dots,\ W_{s-1}.$$

אם בין השרשים יש קבוצות של שרשים שוים שמים ב D במקום כל k עמודות שוות עמודות אחרות שאחת מהן בנויה מן הנגזרות האפיסיות, אחת מן הנגזרות הראשונות, אחת מן השניות עד הנגזרות מסדר $k-1$ של העמודות המדוברות. תהליך זה כולל, כנקל לראות, גם את התהליך הקודם. במקרה אם כל השרשים שוים מקבלים ורונסקין.

הוכחה. סדרת החזקות של כל שרש $\dots,\ 1,\ x_i,\ x_i^2,\ x_i^3$ (3) היא, בגלל (2), סדרת-נסיגה בעלת הנוסחה (1). כל שרש מריבה-k של $f(x)$ הוא גם שרש של $f'(x),\ f''(x),\ \dots,\ f^{(k-1)}(x)$. כל סדרת נגזרות של (3) מסדר בלתי עולה על $k-1$ ממלאה אפוא גם היא את (1). D המתאים שונה מ 0. מכאן, לפי משפט 3, התוצאה.

השלמת ללוח מספרי פבונצ׳י

דב ירדן

ההשלמות הבאות מתיחסות ללוח מספרי פבונצ׳י שנתפרסם ברבעון למתמטיקה 1 (תשי"ו-ז), 35-37, בתשומת לב לתקונים, שם, 99. הלוח הנזכר הושוה עם הלוח של M. Kraitchik, Recherches sur la Théorie des Nombres 1 (1924), 77-80, שאליו הסב את תשומת לבי D. H. Lehmer במכתב מן ה 12 במרץ 1947. הפרוקים החדשים שיכים ל Jarden (J), Kraitchik (K), Lehmer (L), Poulet (P). בעלות הפרוקים ל U_n, n=67,73,77,122,124,128 ול V_{82} נקבעה כאן בהתאם למכתב של להמר אלי מן ה 6 באוגוסט 1947. הפרוקים בוצעו כאן, כמו בלוחי הקודם, על ידי חלוק ישיר במחלקים ראשוניים מן הצורות הלינאריות המתאימות. על חלק מן החלוקות אני אסיר תודה למר אלכסנדר כץ, מהנדס, שבצע אותן למעני בעזרת מכונות.

בהתאם לנתונות כאן יש לתקן בלוח ציוני-ההופעה בסדרת פבונצ׳י (רבעון למתמטיקה 1 (תשי"ו-ז), 54) כלקמן: 2.3.5.41 410; 1231 2.5.103 206; 1031.

n	פרוק U_n		n	פרוק U_n	
61	4513.555003497	K	81	2.17.53.109.2269.4373.19441	P
67	269.116849.1429913	L	85	5.1597.9521.3415914041	K
71	308061521170129	P	95	5.37.113.761.2007733164641	K
73	9375829.86020717	P	115	5.1381.28657.(2441738887963981)	J
77	13.89.988681.4832521	P	122	4513.555003497.5600748293801	K
			124	3.557.2417.3010349.3020733700601	P
			128	3.7.47.127.1087.2207.4481.186812208641	P
			129	2.257.5417.8513.39639893.433494437	K

n	פרוק V_n		n	פרוק V_n	
61	5600748293801	K	98	3.281.5881.(61025309469041)	J
62	3.3020733700601	P	101	809.7879.(201062946718741)	J
64	127.186812208641	P	102	2.3^2.67.409.63443.66265118449	KJ
66	2.3^2.43.307.261399601	PJ	103	619.1031.(525748002648961)	J
67	4021.24994118449	P	104	47.3329.(34697879376042689)	J
68	7.23230657239121	P	106	3.1483.2969.(1076012367720403)	J
71	688846502588399	P	108	2.7.23.6263.103681.(177962167367)	J
77	29.199.229769.9321929	K	111	2^2.4441.146521.1121101.54018521	K
80	2207.23725145626561	K	114	2.3^2.227.26449.4250681.212067587	J
81	2^2.19.3079.5779.62650261	P	115	11.139.461.1151.5981.324301.686551	K
82	3.163.800483.350207569	P	119	29.239.3571.10711.(27932732439809)	J
85	11.3571.1158551.12760031	P	120	2.47.1103.1601.3041.23735900452321	K
93	2^2.63799.3010349.35510749	K	122	3.19763.(529075907006608521227)	J
94	3.563.5641.(4632894751907)	J	125	11.101.151.251.112128001.28143378001	K
95	11.191.9349.41611.87382901	K	127	509.5081.(134512713741346149401)	J
97	3299.(56678557502141579)	J			

n	פרוק V_n	
135	2^2.11.19.31.181.271.541.811.5779.42391.119611	K
145	11.59.19489.120196353941.1322154751061	K
155	11.311.3010349.29138888651.823837075741	K
165	2^2.11^2.31.199.331.9901.39161.51164521.1550853481	K
175	11.29.71.101.151.911.54601.51636551.4215154433351	K
195	2^2.11.31.79.131.521.859.1951.2081.2731.24571.866581.37928281	K
205	11.1231.5741.370248451.2170732312961.111359800682371	K
215	11.431.1291.1721.6709.144481.1266715025281.66163448516461	K
225	2^2.11.19.31.101.151.181.541.12301.18451.221401.15608701.3467131047901	K
245	11.29.71.491.911.1471.599786069.459807660691.(387380460132262871)	K
255	2^2.11.31.919.1021.3469.3571.53551.95881.1158551.12760031.(162716451241291)	K
315	2^2.11.19.29.31.71.181.211.541.631.911.1009.21211.31249.767131.1051224514831.(1983000765501001)	K
375	2^2.11.31.101.151.251.751.2251.12301.18451.112128001.28143378001.46853582653501.(792081397330050024751)	K

הגורמים הראשוניים של המחלק עלום-הפרוק של U_n גדולים ממאה אלף, כאשר n=79, 91, 93, 111, 115, 125.

מספר המחלקים הראשוניים מן הצורות הלינאריות המתאימות עד מאה אלף הוא בהתאמה 60, 56, 86, 69, 48, 44.

הגורמים הראשוניים של המחלק עלום-הפרוק של V_n גדולים ממאה אלף, כאשר n=73, 74, 79, 83, 86, 91, 98, 103, 106, 108, 110, 117, 119, 126.

מספר המחלקים הראשוניים מן הצורות הלינאריות המתאימות עד מאה אלף הוא בהתאמה 59,138, 60, 54, 57, 62, 53, 45, 40, 134, 50, 68, 47, 69.