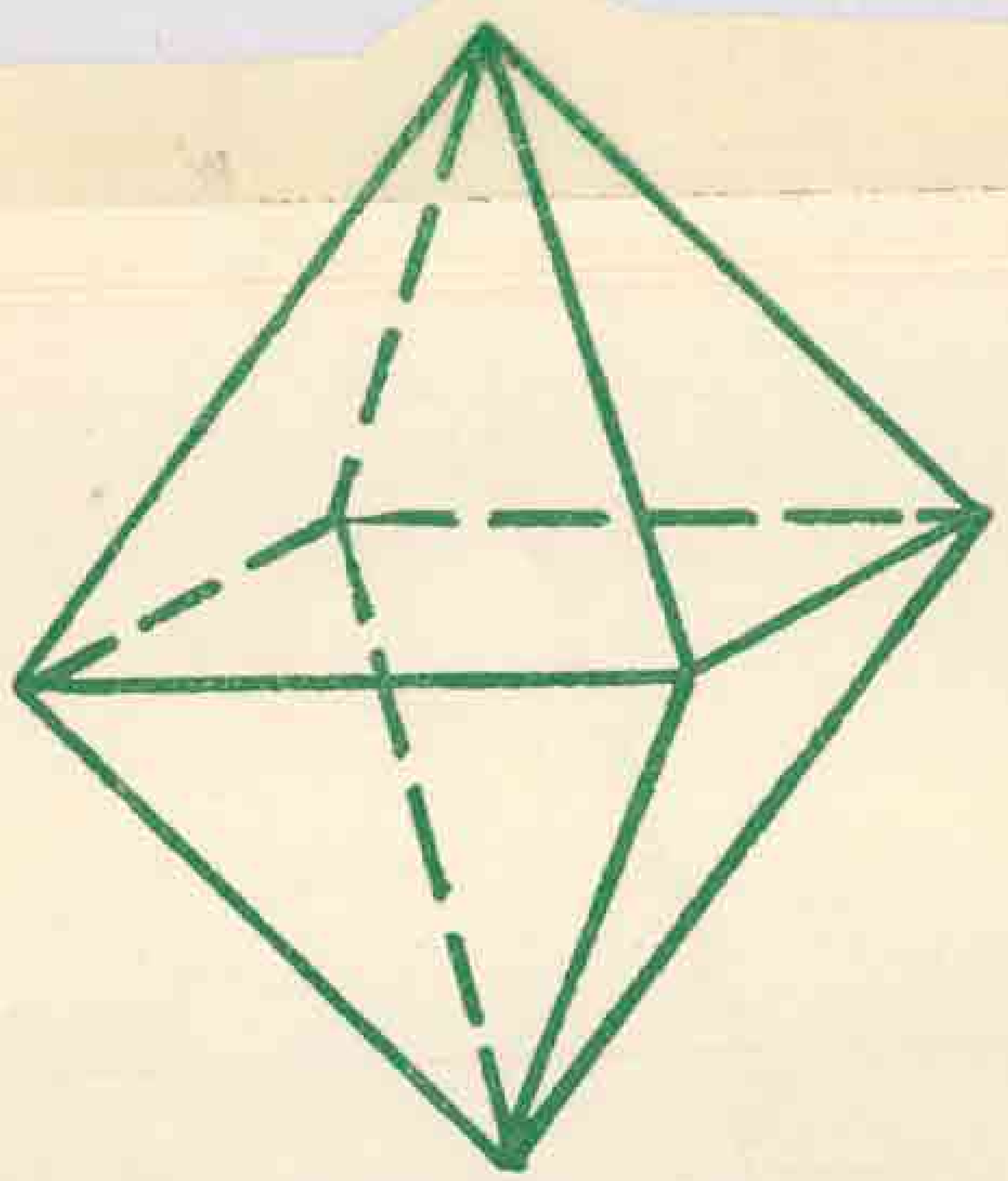


כרך 2 ת״א, טבת תשכ״ג - ינואר 1963 מס' 2

יוצא לאור בחסות

ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. דוד

המערכת: א. גינזבורג, מ. כהן, צ. שור

דבר המערכת לקורא

בזה מוגשת לכם החוברת השניה של כרך ב'. נקוה שתמצאו בה ענין והקריאה תעורר אצלכם התענינות בנושאים מתמטיים אשר אינכם לומדים אותם בבית-הספר.

המערכת מעונינת גם בהשתתפות פעילה מצדכם - לא רק ע"י התרת הבעיות - אלא גם ע"י כתיבת מאמרים. נשתדל לפרסם מאמרים מתאימים, כפי שעשינו זאת גם בעבר.

אגב, אם מוריכם מלמדים אתכם פרקים לא שגרתיים אשר אינם כלולים בחומר ספרי הלמוד, אנא, בקשו מהם שיכתבו עליהם בגליונות.

השתדלנו לקיים את הבטחתנו ביחס לדרגת הקשי של החמר, כך שתלמידים טובים מכל הכתות התיכוניות ימצאו מאמרים מתאימים לרמתם, ואנו חוזרים על בקשתנו לא להתיאש, אם מאמר מסוים קשה מדי, אלא לחזור על קריאתו בעוד שנה או שנתיים.

בעיה ופתרונה

חנוני רוצה לשקול כמויות שוות של סחורה ללקוחותיו, אבל אינו בטוח, אם זרועות המאזניים בדיוק שוות. כדי לשמור על הגינותו, הוא שם את הסחורה פעם על הכף הימנית ואת המשקולת על הכף השמאלית ופעם להיפך. האם הוא ירויח, יפסיד או יצא בלי רוח והפסד ע"י כך, אם אכן הזרועות אינן שוות ומספר הלקוחות זוגי?

תשובה: הוא יפסיד.

יהיו a ו- b ארכי הזרועות, c המשקל, x ו y כמויות הסחורה הנשקלות בשני צדי המאזנים, אזי:

$$ac = bx$$
$$bc = ay$$
$$x + y = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)c$$

וזה גדול מ $2c$, כי $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ $(a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 > 0$, כאשר $a \neq b)$

זהירות קומבינטוריות המתקבלות משקולים הסתברותיים

אסתר סמואל

אם קבוצה מכילה n עצמים, מספר האפשרויות בהן אפשר לבחור קבוצה של k עצמים מתוכה (בלי לשים לב לסדר הבחירה) הוא:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

נוסחה זו מהוה יסוד לפתרון בעיות רבות בהסתברות(*. כך למשל, אם בכד יש m כדורים לבנים ו-n כדורים אדומים, ההסתברות שבבחירה מקרית של k כדורים מתוך הכד, $(k \le m + n)$ נעלה בדיוק s כדורים לבנים ו-$k-s$ כדורים אדומים היא

$$P(A_s) = \frac{\binom{m}{s}\binom{n}{k-s}}{\binom{m+n}{k}} \tag{1}$$

כאשר A_s מסמן את המאורע להוציא בדיוק s כדורים לבנים. כדי שנוסחה זו תהיה נכונה גם עבור $s > m$ נצטרך להגדיר $\binom{n}{k}=0$ עבור $k > n$, ואכן זו ההגדרה המקובלת.

נוסחה (1) מתקבלת אם נשים לב לכך שמספר האפשרויות להוציא k כדורים מתוך סך הכל של $m + n$ כדורים הוא $\binom{m+n}{k}$ ומאחר ואפשר להוציא s כדורים לבנים מתוך m ב $\binom{m}{s}$ דרכים ו- $k-s$ כדורים אדומים מתוך n ב- $\binom{n}{k-s}$ דרכים, הרי שמספר המאורעות הנוחים (ראה[1] עמ' 169) ל- A_s הוא $\binom{m}{s}\binom{n}{k-s}$ ומכאן (1).

ברור שאם נבחר k כדורים מתוך הכד, אזי נעלה 0 כדורים לבנים, או כדור אחד לבן, או שני כדורים לבנים, או כל מספר אחר (קטן או שוה ל- k) של כדורים לבנים. לכן אחד ורק אחד מתוך המאורעות $A_0, A_1, \ldots, A_k$ מוכרח לקרות, (כי מאורעות אלו מונעים אחד את השני (ראה [1] עמ' 170). לכן נקבל את השויון (ראה [1] עמ' 168).

$$I = \sum_{s=0}^{k} P(A_s) = \sum_{s=0}^{k} \frac{\binom{m}{s}\binom{n}{k-s}}{\binom{m+n}{k}} \tag{2}$$

מ (2) נובעת הזהות הקומבינטורית:

---

*) קוראים בשם הסתברות של תופעות ליחס בין מספר תופעות רצוי למספר כל התופעות האפשריות.

$$(3) \qquad \binom{m+n}{k} = \sum_{s=0}^{k} \binom{m}{s}\binom{n}{k-s}$$

הוכחת (3) בעזרת שקולים הסתברותיים פשוטה יותר מהוכחה ישירה של הנוסחה. בספרו החשוב של פלר [2] ניתנות זהויות קומבינטוריות רבות המוכחות בדרכים דומות.

אנו נוכיח כאן את הזהות

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{[k/2]} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{k-2j} = \binom{2n}{k} - \binom{n}{k} 2^k$$

עבור כל k טבעי, $k \leq n$.

(השתמשנו בסמון $[k/2]$ לציין את $k/2$ עבור k זוגי, ואת $(k-1)/2$ עבור k אי-זוגי).

לא ידוע לי אם נוסחה (4) מוכחת בספרות המתמטית.

להוכחת (4) נשתמש במשפט על ההסתברות של מאורע A שהוא אחוד של מאורעות $A_1, A_2, \dots, A_t$ כאשר אין ה-A_i-ים מונעים בהכרח זה את זה בזוגות. המאורע A נכתב בצורה $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t$ ופרושו שקורה לפחות אחד מהמאורעות A_i $(i = 1, 2, \dots, t)$,

אם נסמן ב- $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t$ את המאורע שקורים כל המאורעות A_i, $(i = 1, 2, \dots, t)$, אזי המשפט שנשתמש בו טוען

$$(5) \qquad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t) = \sum_{i=1}^{t} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{t+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t)$$

נוסחה זאת היא הכללה של הנוסחה הכתובה בעמוד 168 למטה ב [1] , הדורשת שהמאורעות A_i $(i = 1,2,\dots,t)$ מונעים זה את זה בזוגות. הוכחת נוסחה (5) נמצאת בעמוד 89 של [2] .

הפרוש המלולי של (5) הוא שההסתברות שיקרה לפחות אחד המאורעות A_i, $i = 1,2,\dots,t$ שוה לסכום ההסתברויות של כל אחד המאורעות A_i , פחות סכום ההסתברויות של כל שנים מהמאורעות, ועוד סכום ההסתברויות של כל שלשה מאורעות וכו׳, כאשר הסכום נלקח תמיד על כל האפשרויות השונות לבחור ב- s מתוך t המאורעות. (לכן במחובר ה s׳ באגף ימין של (5)

יש בדיוק $\binom{s}{t}$ מחוברים).

נקבל עתה את האגף הימני של (4) מתוך פתרון השאלה ההסתברותית הבאה:

לסטודנט יש n זוגות שונים של גרביים המונחים במגירה. כיוון שהוא עצל אין הוא מסדר את הגרביים לזוגות, וכאשר הוא זקוק לזוג גרביים הוא מוציא באופן מקרי מן המגירה k גרביים בודדות. מה ההסתברות שבין k הגרביים שיוציא ימצא לפחות זוג אחד?

ברור שאם $k>n$ ההסתברות לכך היא 1, לכן נדון בבעיה רק עבור $k\leq n$
אם נצמיד לכל זוג גרביים מספר, כלומר, נדבר על הזוג הראשון, השני, וכו' עד הזוג ה n-י, ונסמן ב A_i את המאורע "יוצא הזוג ה i-י", $i=1, 2, \ldots, n$, הרי המאורע "יוצא זוג אחד לפחות" הוא בדיוק המאורע $A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n$ וכד' למצוא את $P(A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n)$ נוכל להשתמש בנוסחה (5). משום הסימטריה שבבעיה ברור ש $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n)$

שקול נוסף נותן $P(A_i) = \binom{2n-2}{k-2} / \binom{2n}{k}$

כי מספר האפשרויות להוציא k גרביים מתוך 2n גרביים הוא $\binom{2n}{k}$ ואילו מספר האפשרויות הנוחות ל- A_i הן כל האפשרויות בהן יבחרו שני הגרביים של הזוג ה i -י ועוד k-2 גרביים אחרות כלשהן מתוך 2n-2 הגרביים הנותרות, שהן סך הכל $\binom{2n-2}{k-2}$ אפשרויות.

שקולים דומים מראים $P(A_{i_1}\cap A_{i_2})= \binom{2n-4}{k-4}/\binom{2n}{k}$

בתנאי ש $k\geq 4$ ו $i_1\neq i_2$ הם שני מספרים בין 1 ל n.

כמו כן $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}) = \binom{2n-6}{k-6} / \binom{2n}{k}$

בתנאי ש $k\geq 6$
ובאופן כללי
$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap \ldots \cap A_{i_j}) = \binom{2n-2j}{k-2j}/ \binom{2n}{k}$$

בתנאי ש $k\geq 2j$ ז"א $[k/2]\geq j$, כאשר $i_1, i_2, \ldots, i_j$ הם j מספרים שונים בין אחד ו n .

אם $[k/2] < j$ אזי $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_j}) = 0$
מאחר ובלתי אפשרי להוציא j זוגות מסוימים של גרביים, אם בסך הכל מוציאים k גרביים ו $k<2j$.

לכן נקבל מ (5), בהתחשב במספר המחוברים שבכל אחד מן הסכומים שבאגף הימני של (5), אשר במקרה שלנו כולם זהים

$$(6) \quad P\left\{\begin{matrix}\text{ימצא לפחות זוג} \\ \text{אחד בין } k \text{ הגרביים}\end{matrix}\right\} = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{[k/2]} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{k-2j} \Big/ \binom{2n}{k}$$

אולם ההסתברות שימצא לפחות זוג אחד מבין k הגרביים יכולה להתקבל גם בדרך אחרת. המאורע המנוגד (ראה [1] עמוד 170) למאורע שימצא לפחות זוג אחד בין k הגרביים הוא המאורע שלא ימצא אף זוג בין k הגרביים, לכן

$$(7) \quad P\begin{pmatrix}\text{ימצא לפחות זוג} \\ \text{אחד בין } k \text{ הגרביים}\end{pmatrix} = 1 - P\begin{pmatrix}\text{לא ימצא אף זוג} \\ \text{בין } k \text{ הגרביים}\end{pmatrix}$$

נחשב את מספר המאורעות הנוחים למאורע "לא ימצא אף זוג בין k הגרביים". כדי שיקרה מאורע זה הרי k הגרביים צריכים להבחר מ n הזוגות באופן שלכל זוג יהיה לכל היותר נציג אחד בין k הגרביים. אך מספר האפשרויות לבחור ב k נציגים של זוגות גרביים מבין n הזוגות הוא $\binom{n}{k}$. אחרי בחירת k הזוגות מהם ילקחו k הגרביים הבודדות יש לגבי כל זוג 2 אפשרויות של בחירת גרביים מתוכה, לכן לכל אחת מבחירת k הזוגות יש 2^k אפשרויות לבחירת גרביים בודדות מתוכם. לכן סך הכל מספר המאורעות הנוחים לנו הוא $\binom{n}{k} 2^k$. מכאן נקבל

$$(8) \quad P\begin{pmatrix}\text{לא ימצא אף זוג} \\ \text{בין } k \text{ הגרביים}\end{pmatrix} = \binom{n}{k} 2^k \Big/ \binom{2n}{k}$$

השואת (6) ו-(7) נותנת עכשיו בעזרת (8) את הזהות (4) אותה רצינו להוכיח.

דרך אגב נזכיר שאם לסטודנט הנדון יש 8 זוגות גרביים, הרי כדי שההסתברות להוצאת זוג גרביים תהיה לפחות 1/2 יצטרך

להוציא ממגירתו 5 גרביים בודדות לפחות. (הוכח זאת!)

ספרות

[1] י. רייכבך: "על מושגים ראשונים בתורת ההסתברות" גליונות מתמטיקה כרך 1, 1961-1962 עמודים 164-172 ו- 196-202.

[2] Feller, W. : An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol.1, 2nd ed., Wiley, 1957.

הכללה של משפט פיתגורס

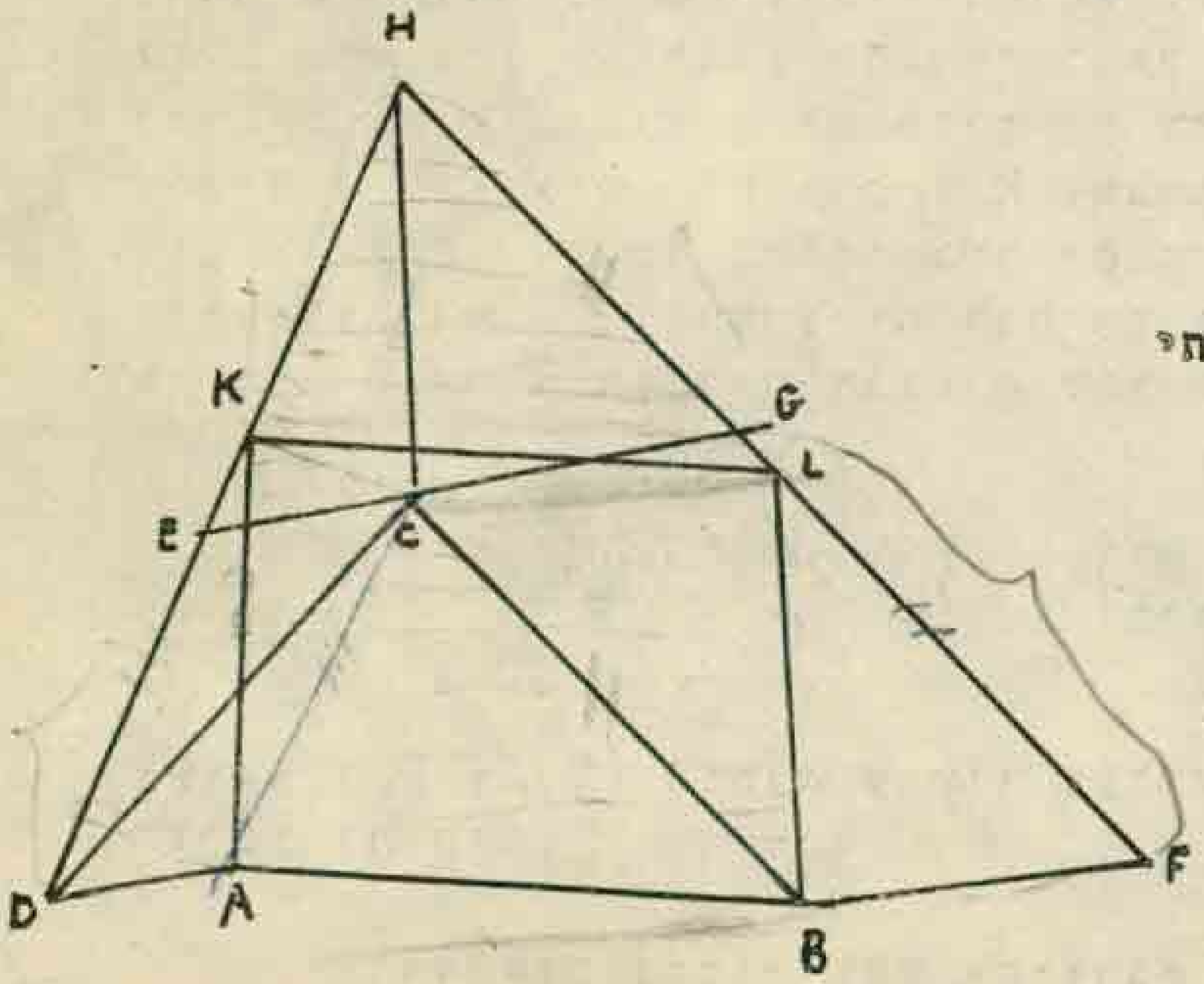
הכללה למשפט פיתגורס לגבי משלש כללי ידועה לכם: משפט הקוסינוס בצורה הטריגונומטרית.

הכללה אחרת מצא פפוס מאלכסנדריה (Pappos) שחי במאה השלישית לפני הספירה הנוצרית.

בונים על שתי צלעות BC ו- AC של משלש כללי מקביליות כל שהן ADEC ו- BCGF . נסמן ב- H את נקודת החתוך של המשכו DE ו- FG . נבנה מקבילים ל-CH דרך A ו- B אשר יחתכו את DE ו- FG (או המשכיהם) בנקודות K ו- L .

והרי המשפט: סכום שטחי מקביליות כל שהן הבנויות על שתי צלעות משלש כללי שוה לשטח המקבילית על הצלע השלישית המתקבלת לפי הבניה המתוארת כאן (כלומר ABKL).

ההוכחה קלה ולכן נשאיר אותה לקורא.



$S_2 = CB \cdot BF$
HC

$S = AB \cdot KA$

$S_1 = AC \cdot AD$

מהי הנדסה פרויקטיבית?

י. דוד

בבית הספר מציגים את ההנדסה האויקלידית כבנין מושלם אשר בעזרתו מוכיחים מתוך משפטים ראשונים פשוטים (אקסיומות) בעזרת הקשים הגיוניים משפטים פרטיים רבים. שיטה זו משמשת דוגמא להוכחות הגיוניות גם בשטחים אחרים. על פיה נוהגים לחנך את התלמיד למחשבה הגיונית ברורה.

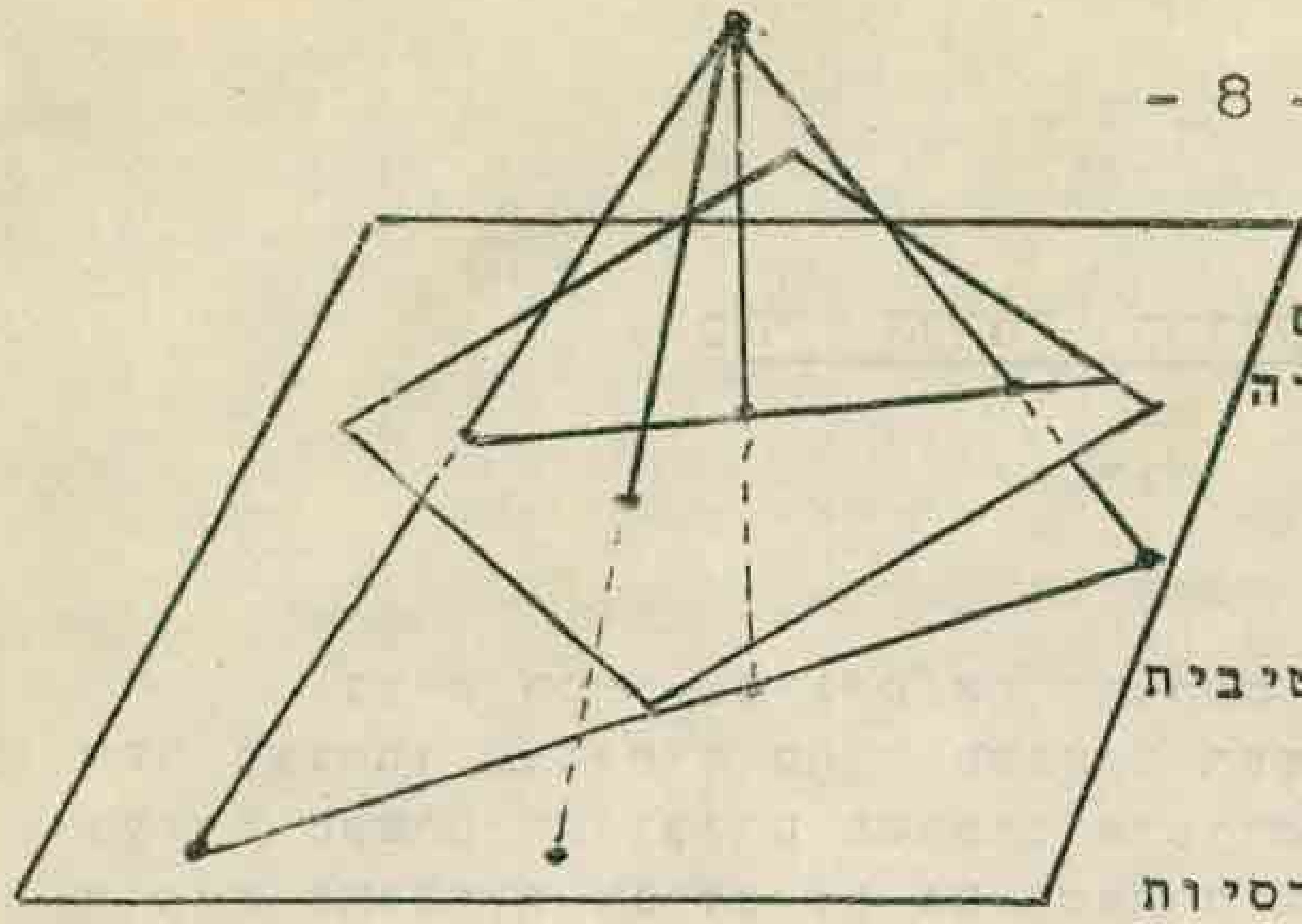
יחד עם כל יתרונותיה יש להנדסה זאת גם חסרונות והם:
א) אין שיטה להתחיל הוכחה של משפט מסוים. יש צורך ברוב המקרים ברעיון חדש, בהברקה מסויימת. כדוגמא: בכדי להוכיח את המשפט ששלשת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת יש להעביר מקבילים לצלעות דרך הקדקדים הנגדיים. הראשון שמצא רעיון זה היתה לו תפיסה יפה במתמטיקה.
ב) אין קשר הגיוני בין המשפטים אשר מוכיחים אותם בהנדסה. הם למעשה אוסף פחות או יותר מקרי של תכונות בצורות הנדסיות אשר מסודרות לפי נושאים מסויימים, כגון משולש, מרובע, מעגל וכו׳.

אשר לחסרון הראשון מצא דיקרט (Descartes) דרך לסלוקו ע"י אלגבראיזציה של ההנדסה, כלומר ע"י ההנדסה האנליטית, בה אנו מחשבים הוכחות, במקום לחשוב על הוכחות. כך למשל יכול השולט בשיטה של ההנדסה האנליטית לחשב את ההוכחה על צומת הגבהים ויגיע בהכרח לתוצאה, אם לא יטעה בחשבון, אם כי החשבון יכול להיות ארוך ומיגע, בו בזמן שההוכחה ההנדסית קצרה ואלגנ-טית.

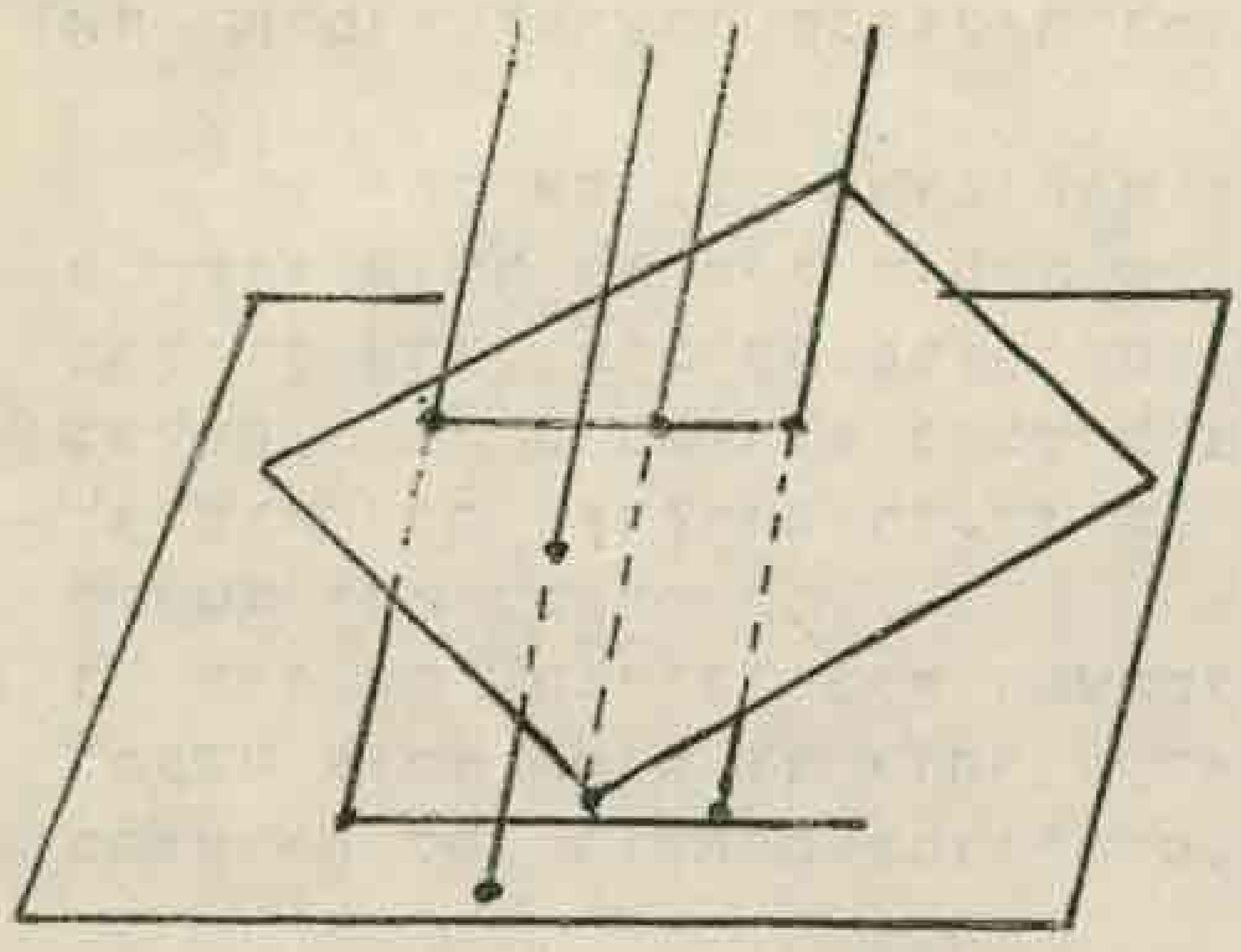
תפקיד ההנדסה הפרויקטיבית הוא - בין השאר - להתגבר על החסרון השני הנ"ל. אם כי משפטים פרויקטיביים בודדים היו ידועים כבר מימי הקדם, התפתח ענף זה רק בזמן החדש החל מן המאה ה-16. מתמטיקאים כגון דזרג (Desargues), פסקל (Pascal), פונסלה (Poncelet) ושטיינר (Steiner) קשורים בהתפתחותה.

כדי להזכיר לכם משפט פרויקטיבי מובהק שבודאי ידוע לרבים ביניכם הוא משפט ציבה (Ceva) הקובע תנאי הכרחי ומספיק לפגישת שלשה ישרים דרך קדקדי משולש בנקודה אחת.בעזרתו אפשר לבדוק בלי תהבולות, אם קוים מצוינים במשולש נפגשים או לאו.

ובעת נראה מהי הנדסה פרויקטיבית. לשם כך נבחר שני מישורים במרחב ונקודה אשר אינה נמצאת על אף אחד משניהם.

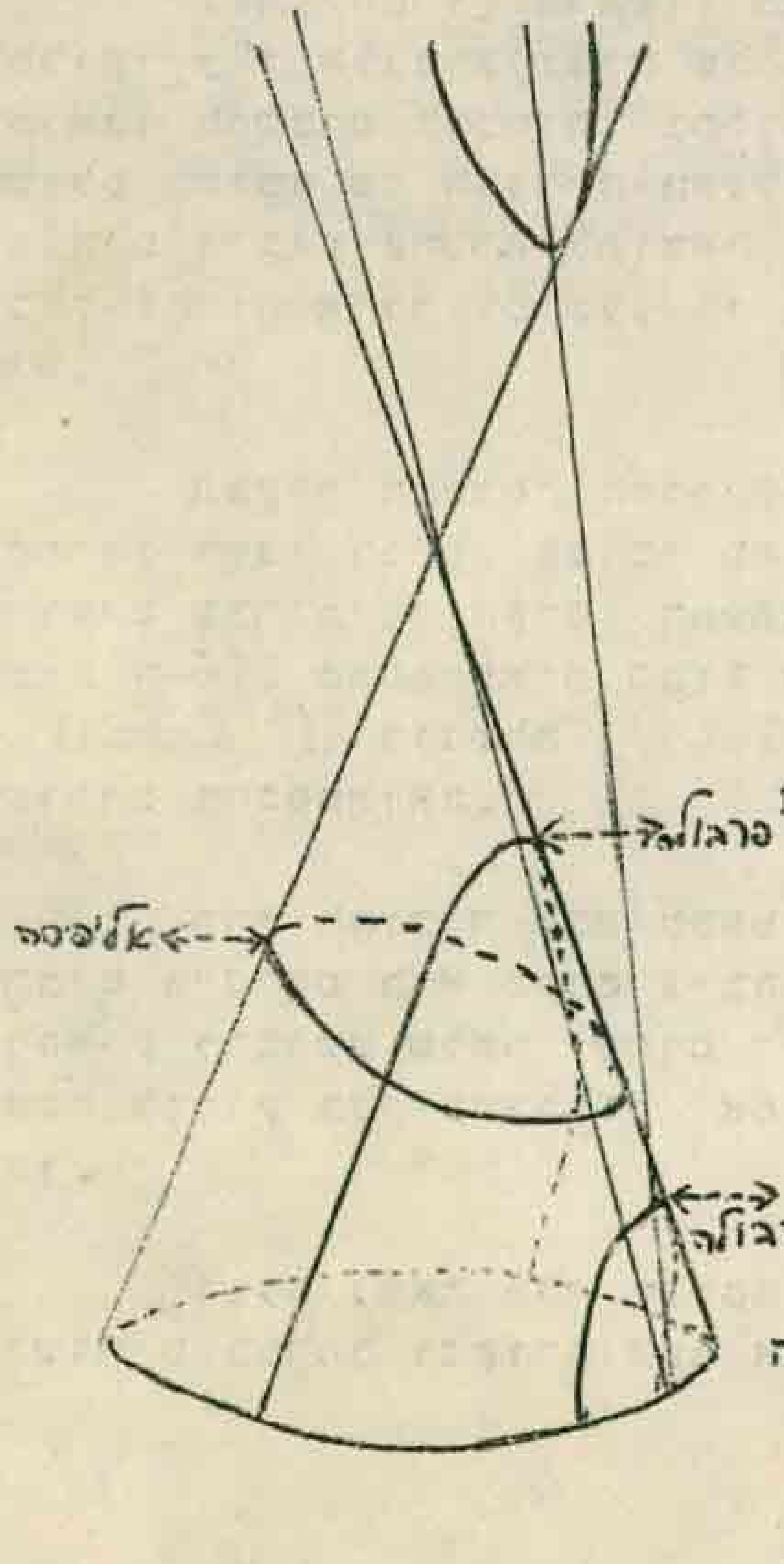


נשרטט על אחת המישורים עקומה כל שהיא ונחבר את הנקודה הנתונה עם כל אחת מנקודות העקומה ע"י ישרים, אשר יחתכו את המישור השני בעקומה שניה. קוראים עקומה זאת דמות פרספקטיבית של העקומה הראשונה.



תהליך יצירת צורות הנדסיות במישור השני מתוך צורות הנדסיות בדרך זו נקראת העתקה פרויקטיבית. תפקיד ההנדסה הפרויקטיבית הוא לגלות תכונות הנדסיות הנשמרות ע"י העתקה פרויקטיבית. תוכחו בנקל שישרים נשארים ישרים בהעתקה זו. גם משיק לעקומה יהפך למשיק לעקומה המועתקת.

כמו כן הופכים חתכי חרוט - מעגל, אליפסה, היפרבולה ופרבולה - לחתכי חרוט. אזכיר לכם שאליפסה היא חתך חרוט בשפוע קטן משפוע קו היוצר, פרבולה חתך מקביל לקו היוצר והיפרבולה חתך בשפוע גדול מקו היוצר החותך את החרוט הכפול בשני ענפים. (ראה ציור).



לכן העתקה פרויקטיבית הופכת אחת מן העקומות הנ"ל לאחרת מאותה המשפחה. אם נמצא תכונה פרויק- טיבית ונוכיח אותה לגבי המעגל למשל היא תהיה נכונה לגבי כל העקומות הללו יחד.

להעתקה הפרויקטיבית יש העתקות פרטיות אשר לחלקן ידועות לכם. אם למשל שני המישורים מקבילים נקבל ממצולע מצולע דומה למצולע המקורי. מציאת התכונות הנשמרות בהעתקה זו נקראת תורת הדמיון. אם המישורים אינם מקבילים, אבל הישרים המעתיקים מקבילים - כלומר הנקודה הנתונה עוברת לאין-סוף - מקבלים הנדסה הנקראת אפינית בה נשמרת ההקבלה בין ישרים. במקרה שגם המישורים וגם

הקרניים מקבילים לפניכם ההנדסה המטרית העוסקת בחפיפה.

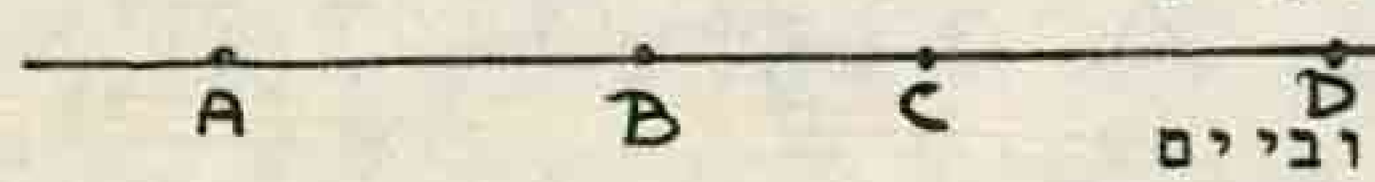
נגש כעת לברור תכונות פרויקטיביות כלליות. אנחנו יודעים כבר שישר נשאר ישר. נסמן שלש נקודות על הישר הראשון ונסתכל בשלש הנקודות המתאימות בדמותו. קבלנו על כל ישר שני קטעים. מובן שארכיהם השתנו בהעתקה, אבל מה לגבי יחס שני הקטעים? קל להוכח שגם יחס זה השתנה, כי רק בקוים מקבילים הוא קבוע. לעומת זאת נשמר "יחס כפול" הנוצר מארבע נקודות בהעתקה שלנו, וזאת נוכיח כאן.

קודם כל נגדיר את היחס הכפל לגבי 4 נקודות A,B, C , D על קו ישר כלקמן:

$$, \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = (A, B, C, D)$$

כלומר יחס של יחס, והבטוי בסוגרים ישמש לנו סימון ליחס הכפול. נוהגים לתת לקטעים סימנים חיוביים או שליליים בהתאם לכיוון שלהם. נסכים על הכיוון ימינה כחיובי ושמאלה שלילי. לכן אם הנקודות מסודרות על הישר לפי הסדר הנ"ל, היחס הכפול יהיה חיובי, אבל אם C תמצא בין A ל B הוא יהיה שלילי.

$(A,B,C,D) > 0$



$(A,B,C,D) < 0$

נניח שהיחס הכפול במקרה מסוים יקבל את הערך k. נחליף את סדר הנקודות. יש לשער שגם הערך של היחס הכפול ישתנה. מספר האפשרויות להחלפת סדר האותיות הוא 4!=24, אבל יתברר שלכל 4 תמורות כאלה יש אותו יחס כפול, כך שנקבל רק 6 ערכים שונים והם

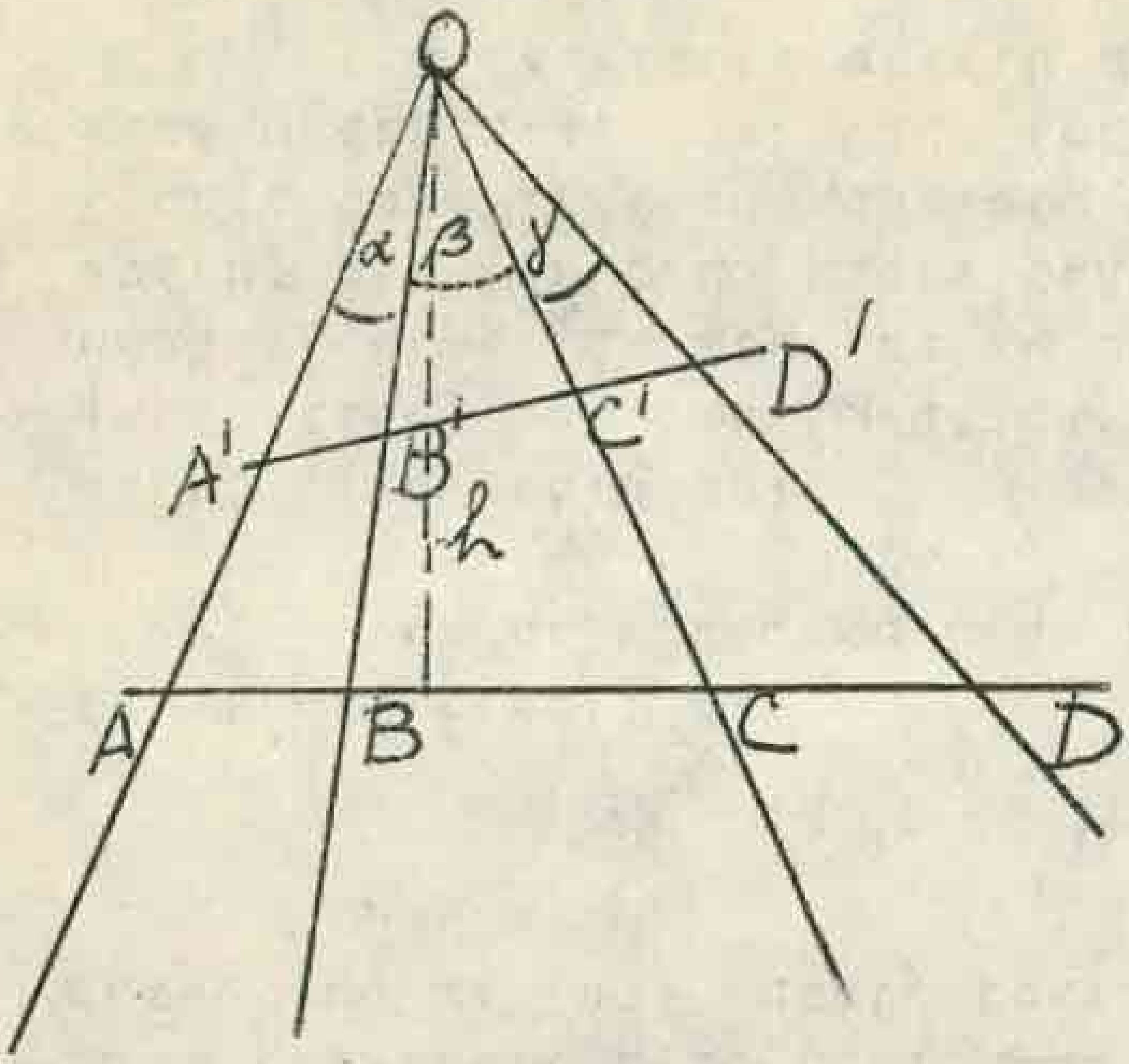
$$\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k-1}, \frac{1}{1-k}, 1-k, \frac{1}{k}, k$$

נחשב כדוגמא את ערך היחס הכפול (B,A,C,D), כאשר (A,B,C,D) = k נתון. לפי ההגדרה יהיה

$$(B, A, C, D) = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$

אבל $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k$ לכן $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{1}{k}$

במקרה ש $(A, B, C, D) = -1$ קוראים ל 4 הנקודות רביעה הרמונית, כי במקרה זה מחולק הקטע AB ע"י C בפנים ביחס k וע"י D בחוץ (בהמשך הקטע) ביחס ‎-k (בררו לכם זאת!).



וכעת נגש להוכחת המשפט שהיחס הכפול איננו משתנה בהעתקה פרויקטיבית (קוראים לו בגלל זה גם שמורה פרויקטיבית).

נביע את שטחי המשולשים הבאים בשני אופנים:

$$\triangle OCA = \tfrac{1}{2}\overline{CA}\cdot h = \tfrac{1}{2}\overline{OC}\cdot\overline{OA}\,\sin(\alpha+\beta)$$

$$\triangle OCB = \tfrac{1}{2}\overline{CB}\cdot h = \tfrac{1}{2}\overline{OC}\cdot\overline{OB}\,\sin\beta$$

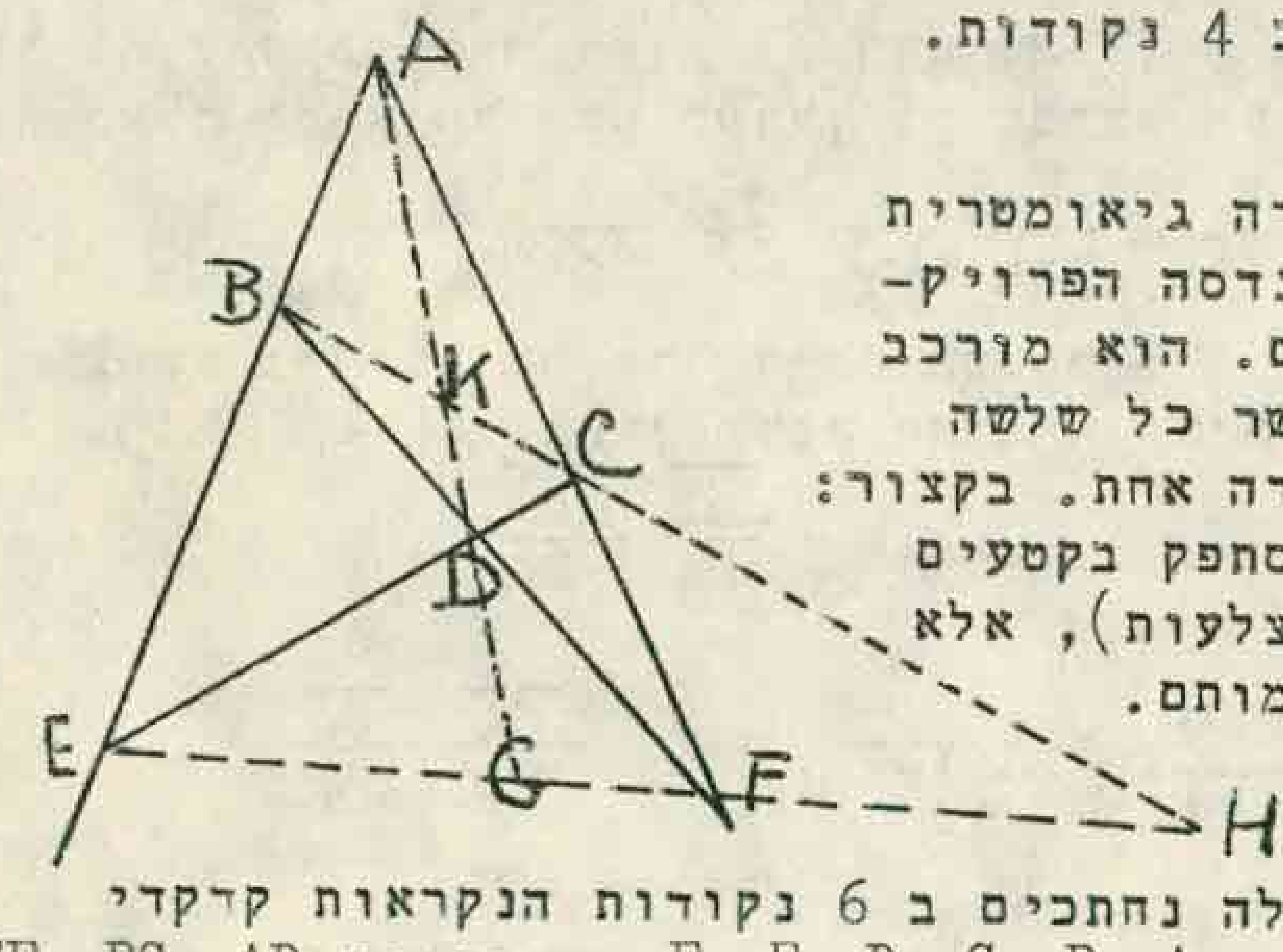
$$\triangle ODA = \tfrac{1}{2}\overline{DA}\cdot h = \tfrac{1}{2}\overline{OD}\cdot\overline{OA}\,\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\triangle ODB = \tfrac{1}{2}\overline{DB}\cdot h = \tfrac{1}{2}\overline{OD}\cdot\overline{OB}\,\sin(\beta+\gamma)$$

נחלק קודם את שתי המשוואות הראשונות אחת בשניה, כמו כן השלישית ברביעית וגם את התוצאות אחת בשניה ונקבל:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\ \sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

ובזה המשפט מוכח, כי מצאנו שהיחס הכפול תלוי רק בזויות בין הקרניים, כלומר הוא יקבל את אותו הערך המספרי לגבי כל ישר החותך את האלומה ב 4 נקודות.



נכיר עכשיו צורה גיאומטרית בעלת חשיבות גדולה בהנדסה הפרויק-טיבית, את המרובע השלם. הוא מורכב מארבעה קוים ישרים, אשר כל שלשה מהם אינם נחתכים בנקודה אחת. בקצור: מרובע רגיל, אלא לא נסתפק בקטעים בין 4 נקודות חתוך (הצלעות), אלא נשתמש ב 4 הישרים בשלמותם.

ארבעה ישרים אלה נחתכים ב 6 נקודות הנקראות קדקדי המרובע, במקרה שלנו A, B, C, D, E, F . הקוים AD, BC, EF הם אלכסוני המרובע השלם. נוכיח את המשפט הבא: על אחד האלכסו-נים יהוו שני קדקדי המרובע ושתי נקודות החתוך עם שני האלכסו-נים הנותרים רביעיה הרמונית, במקרה שלנו $(E,F,G,H) = -1$

הוכחה: נביט על A כמרכז אלומת קרניים, אזי E, G, F, H ו B, K, C, H במצב פרספקטיבי, לכן יחסם הכפול שוה:

$$(E, F, G, H) = (B, C, K, H)$$

כמו כן אפשר לבחור ב D כמרכז ואזי יהיה:

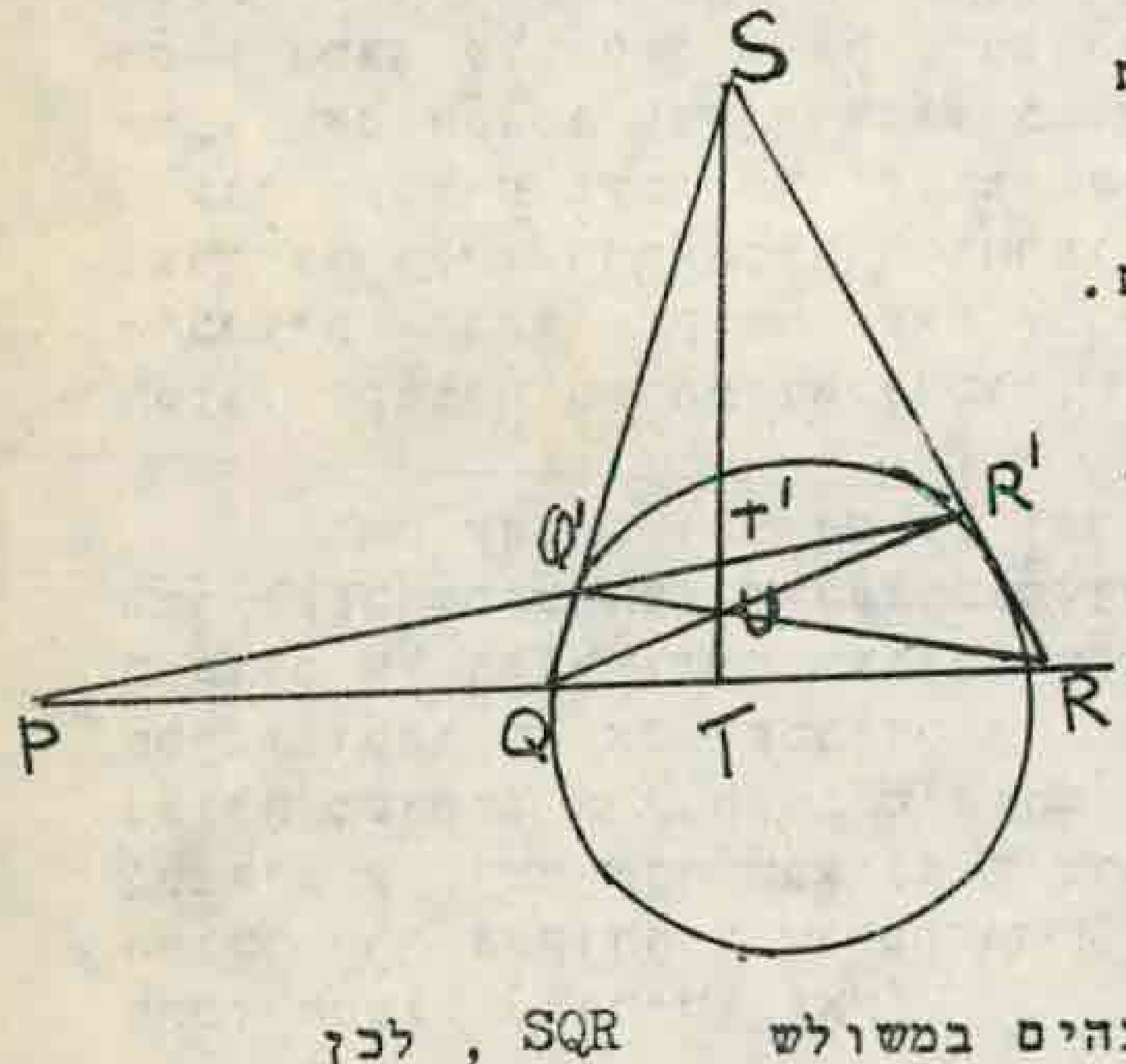
$$(B, C, K, H) = (F, E, G, H)$$

לכן: $$(E, F, G, H) = (F, E, G, H)$$

שני היחסים הכפולים שונים רק בסדר הנקודות ולפי מה שהוכחנו למעלה, יהיה היחס השני $\frac{1}{k}$, אם הראשון k. לכן $k = \frac{1}{k}$ או $k = \pm 1$.

הואיל ו G נמצאת בין E ו F היחס צריך להיות שלילי ויהיה 1- ובזה הוכחנו את טענתנו.

תכונה זאת של המרובע השלם מאפשרת לנו לבנות בסרגל בלבד לשלוש נקודות נתונות נקודה רביעית הרמינית. לשם כך נבחר נקודה מחוץ לישר הנתון ונחבר אותה עם שלוש הנקודות בישרים. נקבע על האמצעי נקודה כלשהיא ונעביר דרכה ישרים דרך שתי הנקודות האחרות אשר יחתכו את שני הישרים האחרים בשתי נקודות, הישר דרכן יחתוך את הישר שלנו בנקודה המבוקשת. (ראה את ציור המרובע השלם!).



ובסוף נוכיח משפט פרויקטיבי במעגל אשר ישאר נכון לגבי כל חתכי החרוט, כפי שהוסבר למעלה.

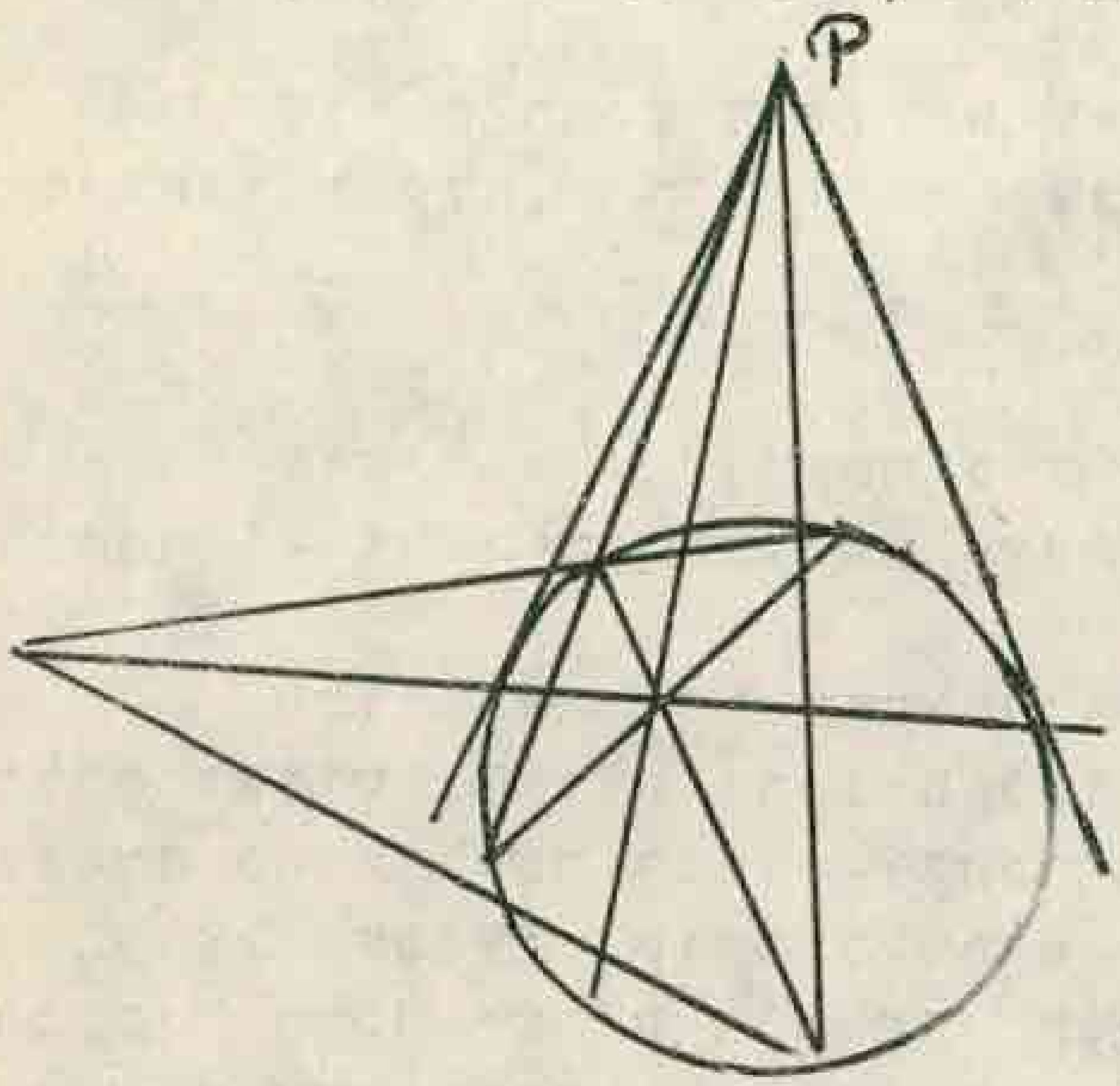
נעביר מנקודה חיצונית ישר דרך מרכז מעגל נתון וגם חותך שני כלשהוא. נחבר את נקודות החתוך עם המעגל ע"י 4 מיתרים אשר יחתכו בנקודות S ו U. QR' ו RQ' הם גבהים במשולש SQR, לכן SU צריך להיות הגבה השלישי ויהיה נצב על PR, בודאי תכירו שהצורה כלה מרובע שלם ולכן P, T, Q, R רביעה הרמונית.

היות ו R, Q, P קבועים, מצב הישר ST בלתי תלוי בכיוון הישר $PQ'R'$ כי הנקודה T כנקודה הרמונית רביעית קבועה וכמו כך כיוונו הישר ST כאנך על PQ גם קבוע. מכאן שהנקודות S ו U ינועו על הישר הזה, אם החותך $PQ'R'$ יסתובב סביב P. קוראים את הישר ST קטבית (Polara) של הנקודה P לגבי המעגל ואת P קוטב.

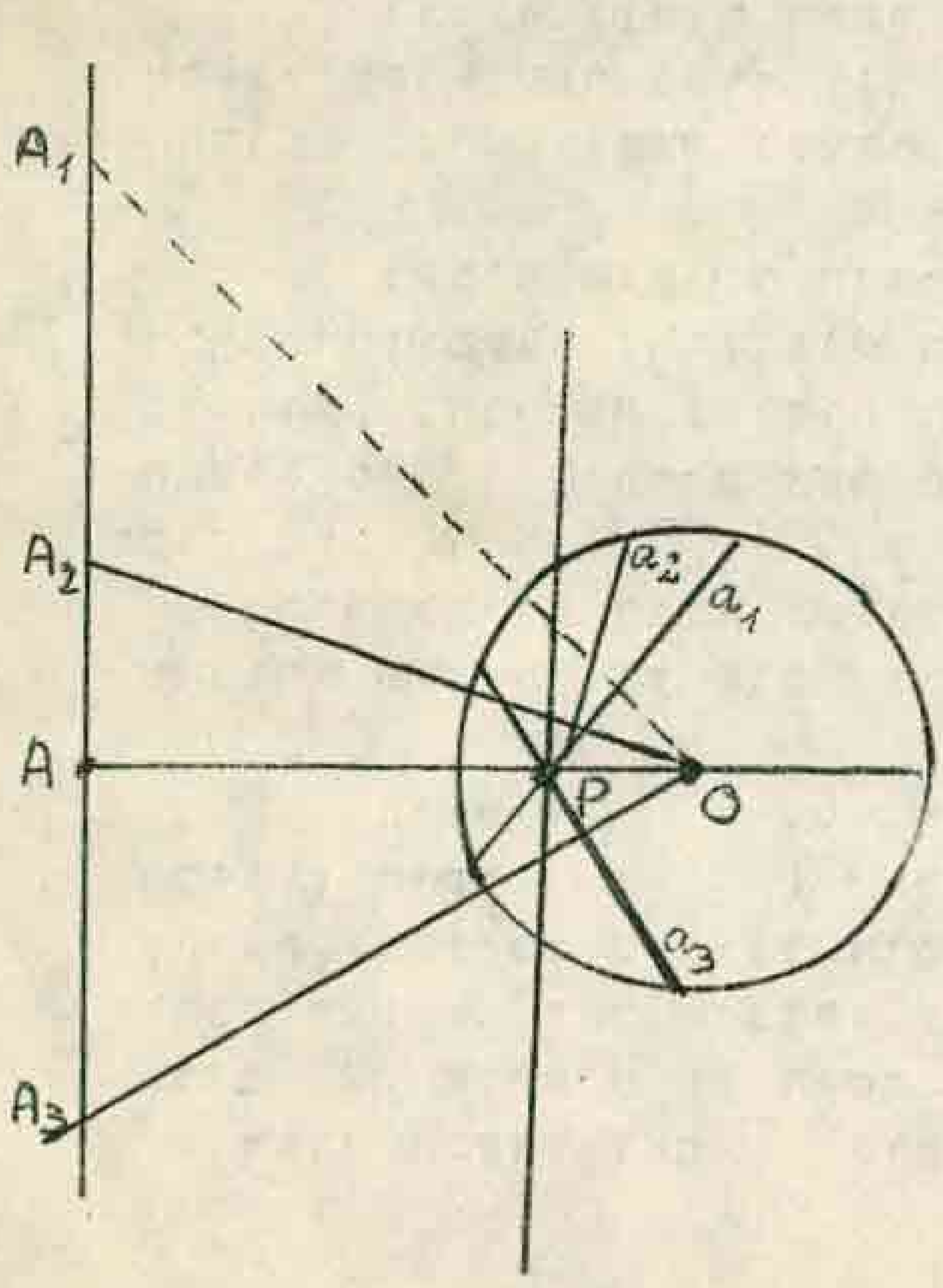
מצב גבולי של החותך יהיה המשיק. בנקודת המגע יתלכדו ארבע הנקודות S, U, Q', R' . לכן קו הקוטב עובר דרך נקודות המגע של המשיקים מ P.

אם נסובב עכשיו את החותך דרך המרכז סביב P וניצור עם החותך הקודם מרובע שלם נגיע שוב לאותה הקטבית.

תכונה זאת מאפשרת לנו לבנות משיקים למעגל מנקודה חיצונית בעזרת סרגל בלבד. עלינו להעביר רק שני חותכים ובעזרת 4 הישרים המחברים את נקודות החתוך עם המעגל לבנות את הקטבית אשר זחתך את המעגל בנקודות המגע. בניה זאת טובה גם לגבי אליפסה, פרבולה והיפרבולה, כי השתמשנו בהוכחה רק במשפטים פרויקטיביים.



עוד הערות אחדות: כאשר הקוטב P נע על קרן שראשה במרכז המעגל בכיוון ראש הקרן וישאף לנקודה על המעגל, גם הקטבית תשאף למעגל באותה הנקודה. הקוטב של משיק נמצא על הקטבית והוא נקודת המגע. אם הקוטב ממשיך לנוע בפנים המעגל הקטבית תעבור לחוץ המעגל (אנך על הקרן דרך הנקודה ההרמונית הרביעית) וכאשר הקוטב ישאף למרכז המעגל הקטבית תתרחק לאין-סוף.



אם קטבים נמצאים על ישר אחד, לקטביות שלהם יש נקודה משותפת הנמצאת על האנך לישר העובר דרך המרכז וכמו כן אם לקטביות יש נקודה משותפת הרי הקטבים שלהם נמצאים על ישר אחד המאונך לישר העובר דרך הנקודה המשותפת ודרך מרכז המעגל (הוכיחו זאת!).

היחס ההדדי הזה בין נקודה וישר נקרא יחס דואלי. בחוברות הבאות נתקל שוב ביחס חשוב זה.

כבר בחוברת הבאה ימצא מאמר על נושא בהנדסה פרויקטיבית, על משפט דזרג (Desargues) ובו מופיעה תכונת הדואליות.

<u>בעיות מוצעות נוספות:</u>

1. נתונות שתי נקודות A ו B ונקודות האמצע C של הקטע AB. איפה נמצאת הנקודה ההרמונית הרביעית? התוכל להעביר עכשיו בעזרת סרגל בלבד מקביל ל AB דרך נקודה מחוץ לישר AB ? ראה בעיה 107 ב"גליונות" מס' 8.

2. נתון ישר AB וישר מקביל לו. מצא בעזרת סרגל בלבד את אמצע הקטע AB .

3. מעגל חותך ישר נתון AB . מהישר רק שתי נקודות A ו B הנמצאות מחוץ למעגל ומצד אחד למרכז. מצא בעזרת סרגל בלבד נקודות על הישר מחוץ למעגל מצדו השני באופן שהישרים שתבנה לא יחתכו את המעגל.

<u>בעיה ופתרונה:</u>

מצא את המספר הטבעי הקטן ביותר אשר בחלקו ב 2 השארית תהיה 1, בחלקו ב 3 השארית תהיה 2, ב 4 - 3, ב 5 - 4, ב 6 - 5 וב 7 - 6?

<u>תשובה:</u> 3.4.5.7 -1 = 419

פתרונות השאלות של ההתחרות המתמטית
לשם סטיפנדיה ע"ש פרופ' ירמיהו גרוסמן.

(ראה "גליונות מתמטיקה" כרך 2 מס. 1 עמ' 18)

לפי דניאל לובזנס.

1) כל חזקה של מספר המסתיים בספרה 5 מסתיימת אף היא ב 5. כל חזקה זוגית של מספר המסתיים בספרה 4 מסתיימת ב 6. מכאן שהמספר $575^{1962} + 24^{1962}$ מסתיים בספרה 1. ז.א. שאם קיים n המקיים את השוויון $575^{1962} + 24^{1962} = n^2$

הרי המספר n יסתיים ב 9 או ב 1.

$$575^{1962} < n^2 \quad \text{ולכן} \quad 575^{981} < n$$

נוכל איפוא לרשום $n = 575^{981} + a \quad (a > 0)$

a חייב להיות לפחות 4, כי אם $a < 4$, הרי n יסתיים ב 6, 7 או 8 וראינו ש n חייב להסתיים ב 9 או ב 1.

ז.א. $n \geq 575^{981} + 4$,

מכאן $n^2 \geq 575^{1962} + 8.575^{981} + 16$

ובודאי יתקיים $n^2 > 575^{1962} + 8.575^{981}$

אך מאידך הנחנו כי $n^2 = 575^{1962} + 24^{1962}$

אם יתקיים השויון הזה בעת ובעונה אחת עם אי-השויון נקבל:

$$24^{1962} > 8.575^{981} \quad , \quad 576^{981} > 8.575^{981} \quad , \quad \left(\frac{576}{575}\right)^{981} > 8$$

ע"י חשוב קצר בעזרת לוגריתמים אפשר להוכח שאי-שויון זה איננו נכון, לכן מתבטלת ההנחה

$$575^{1962} + 24^{1962} = n^2$$

2) א) נתונות הפונקציות $y=x : f_1$, $y=\frac{1}{1-x} : f_2$, $y=\frac{x-1}{x} : f_3$

אם נביע את x כפונקציה של y נקבל את הפונקציות:

$$x = y : f_1' \ , \ x = \frac{y-1}{y} : f_2' \ , \ x = \frac{1}{1-y} : f_3'$$

שלשת הישרים $x = f'(a)$ הם שלשת המקבילים שמעבירים אותם דרך נקודות החתוך של $y = a$ עם הפונקציות הנתונות. שעורי של 9 נקודות החתוך של הפונקציות עם הישרים יהיו איפוא $y = f[f'(a)]$. מתוך חשוב ערכי $f[f'(a)]$

נוכח בקלות כי y יכול לקבל רק 3 ערכים שונים

$$y = \frac{a-1}{a}; \quad y = \frac{1}{1-a}; \quad y = a$$

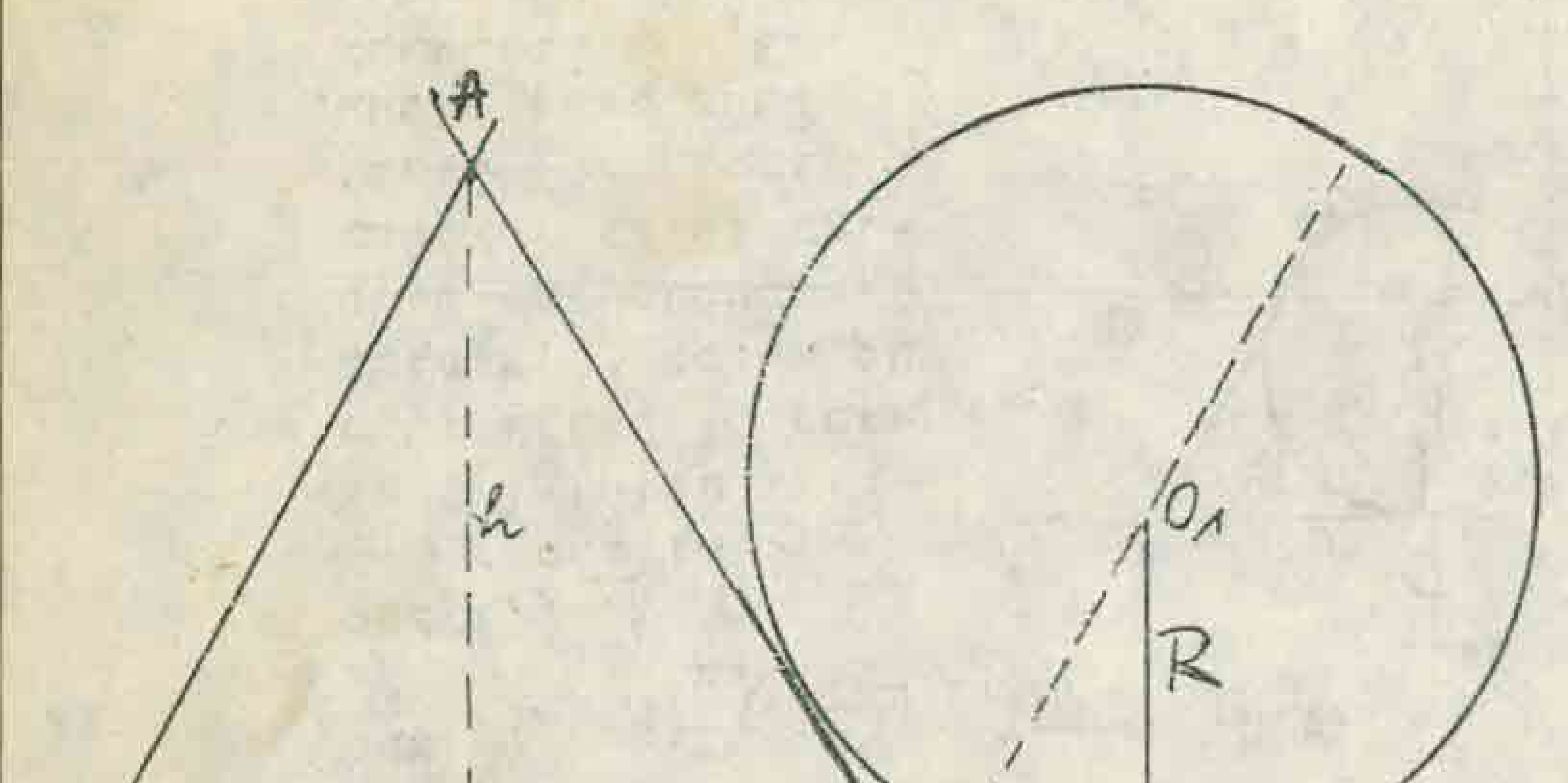
ז.א. 9 הנקודות נמצאות על שלושה ישרים מקבילים.

		f_1	f_2	f_3
		$y=x$	$y=\frac{1}{1-x}$	$y=\frac{x-1}{x}$
f_1	$y=x$	$y=x$	$y=\frac{1}{1-x}$	$y=\frac{x-1}{x}$
f_2	$y=\frac{1}{1-x}$	$y=\frac{1}{1-x}$	$y=\frac{x-1}{x}$	$y=x$
f_3	$y=\frac{x-1}{x}$	$y=\frac{x-1}{x}$	$y=x$	$y=\frac{1}{1-x}$

כאשר עשית הפעולה $f_k\left[f_1(x)\right]$ $(k,1 = 1,2,3)$ נוצרת שוב אחת הפונקציות המקוריות, כפי שמראה הטבלה, וזאת התכונה הדרושה לנו. אומרים ששלוש הפונקציות יוצרות חבורה.

ב) גם במקרה זה מהוות שש הפונקציות חבורה בנ"ל ולכן קיימת התכונה הנדרשת. שלוש הפונקציות הראשונות מהוות חבורה חלקית בתוך חבורת שש הפונקציות.

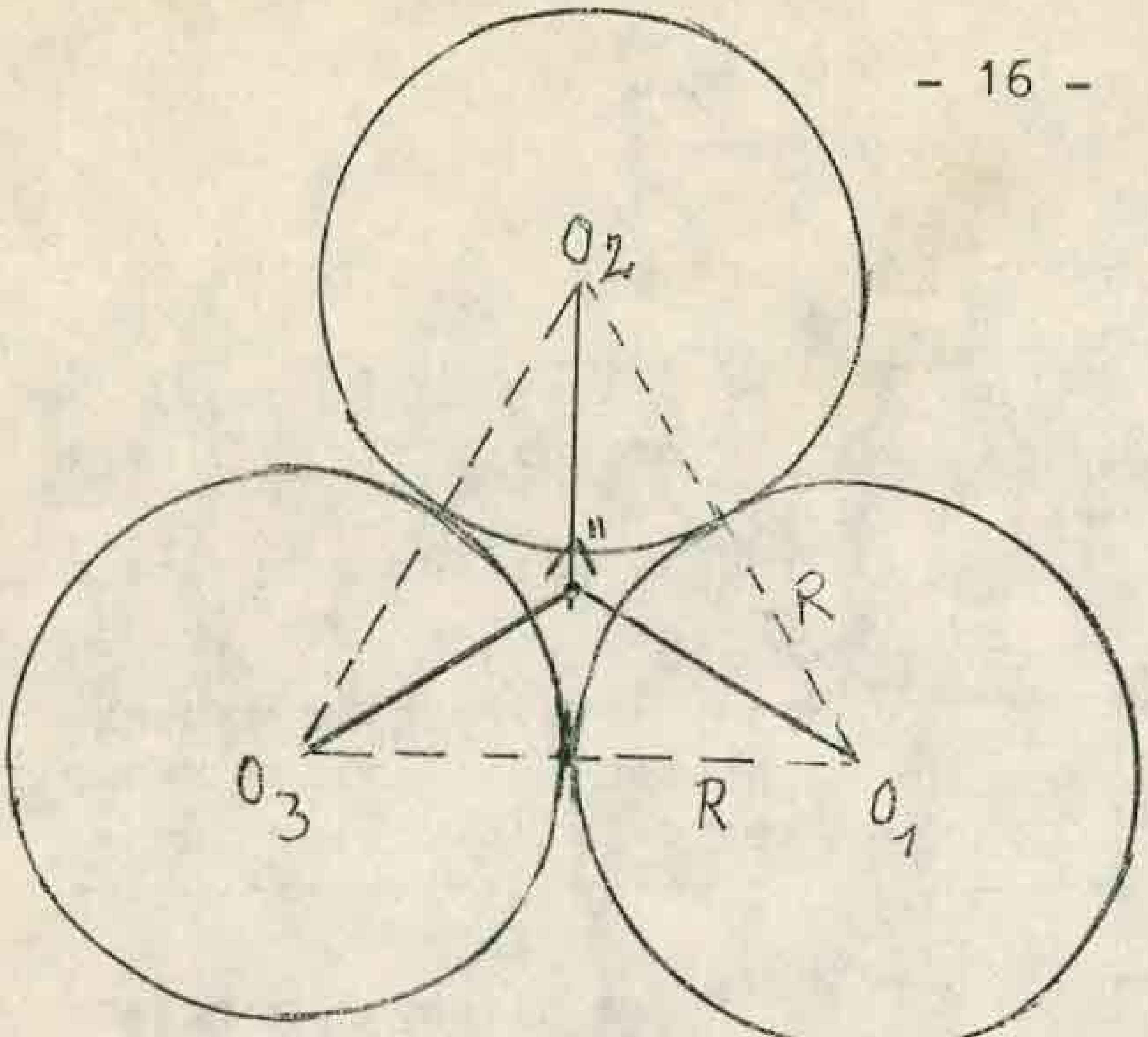
3) יש להבחין בפתרון בין שני מקרים: א) הכדורים נמצאים מחוץ לחרוט, ב) הכדורים נמצאים בתוך החרוט.



ציור מס. 1

א) בציור 1 נראה חתך דרך מרכז אחד הכדורים O_1, ודרך ציר החרוט AA'. בחתך זה החרוט נחתך בצורת משולש שוה-צלעות שגובהו h והכדור במעגל שרדיוסו R והוא משיק לקו BC ולצלע המשולש AC. ז"א שהמרכז O_1 נמצא על הישר CO_1 חוצה הזוית ACD במראה הציור. ממשולש O_1CD מקבלים:

$$CD = \frac{\sqrt{3}}{3} R$$



ציור מס.2

ממשולש $AA'C$ מקבלים:

$A'C = \frac{\sqrt{3}}{3} h$

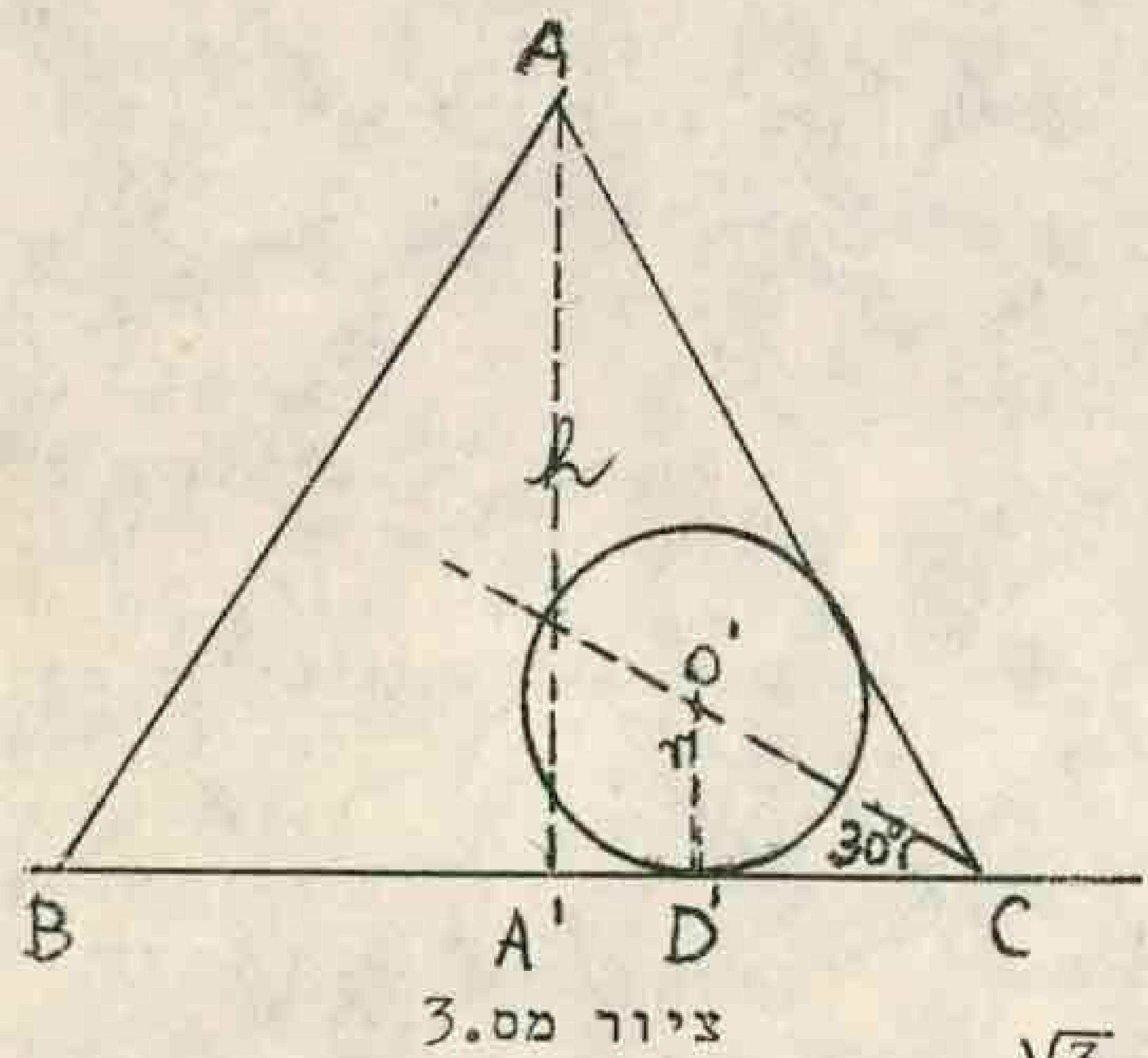
ז"א

$A'D = \frac{\sqrt{3}}{3} (R+h)$

נפנה לחתך העובר דרך שלשת מרכזי הכדורים (ציור 2) הכדורים נחתכים בצורת שלשה מעגלים המשיקים זה לזה כך שהמשולש $O_1\ O_2\ O_3$ הוא שוה-צלעות ומשיקולי סימטריה מרכזו A'' נמצא על ציר החרוט.

לכן $O_1A'' = A'D$ אבל $O_1A'' = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot R$

מכאן: $\frac{2\sqrt{3}}{3}R = \frac{\sqrt{3}}{3}(R + h)$ $\quad 2R = R + h \quad$ $\underline{\underline{R = h}}$



ציור מס.3

ב) השיקולים דומים לאלו שבחלק א', אלא שהחתך דרך מרכז אחד הכדורים ודרך ציר החרוט נראה אחרת (ציור 3). (לסמון השתמשתי באותן האו-תיות כפי שהשתמשתי בחלק א'). במקרה זה מרכז הכדור O_1 נמצא על O_1C חוצה זוית ACB. ממשולש $O_1'D'C$ מתקבל $D'C = \sqrt{3} \cdot r$

מכאן $A'D' = \frac{\sqrt{3}}{3} h - \sqrt{3} r = \frac{\sqrt{3}}{3}(h - 3r)$

החתך העובר דרך מרכזי הכדורים דומה לזה שבחלק (א) גם כאן נקבל $A''O_1' = A'O'$

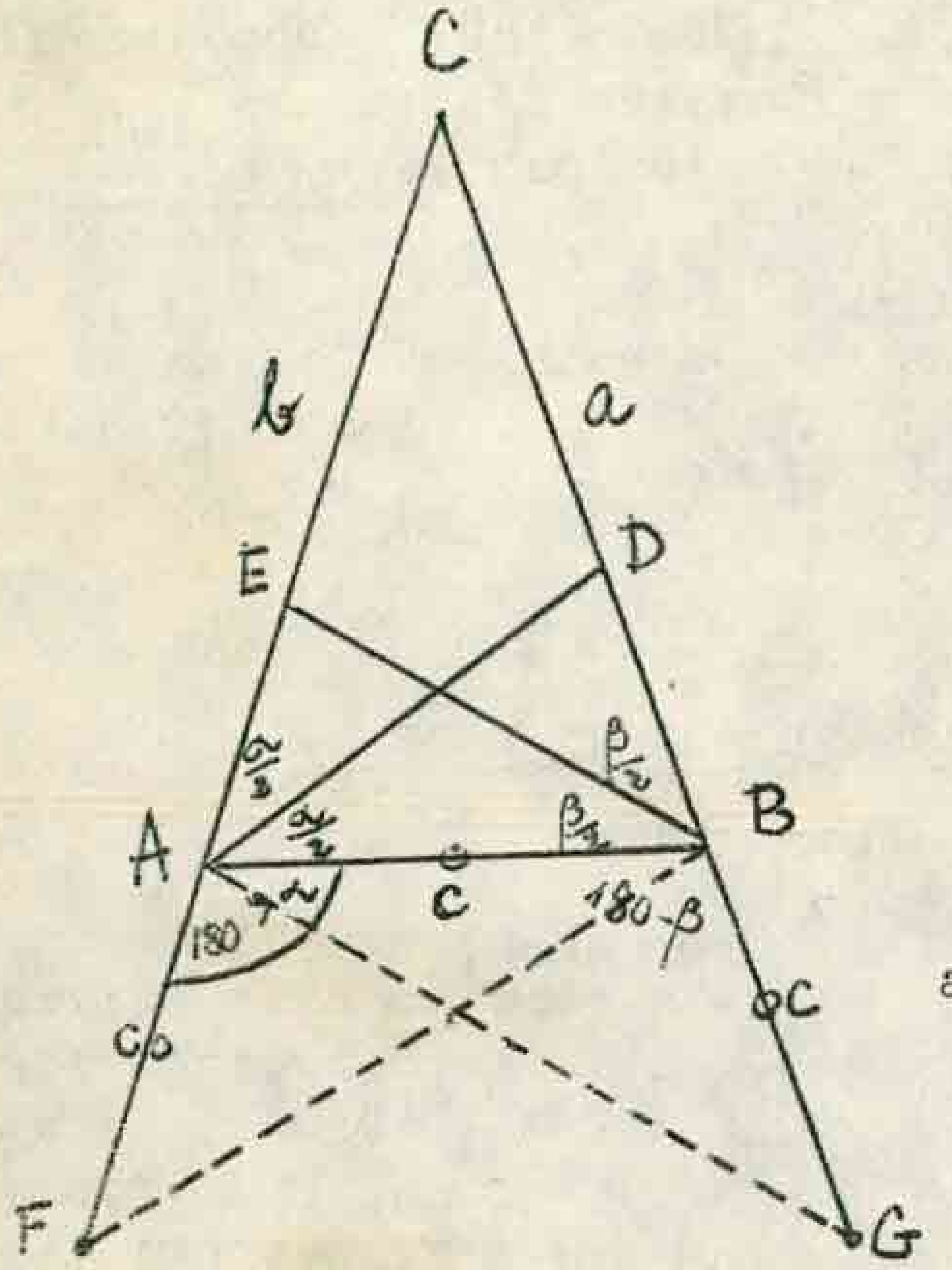
ומהצבת הערכים נקבל

$\frac{2\sqrt{3}}{3} r = \frac{\sqrt{3}}{3}(h - 3r) \quad 2r = h - 3r \quad \underline{\underline{r = \frac{h}{5}}}$

הערה: הבעיה הראשונה נפתרה גם ע"י דב פלוק.

<u>הוכחה נוספת בדרך השלילה למשפט:</u>
<u>אם חוצי שתי זוויות במשולש שווים באורכם -</u>
<u>המשולש הוא שווה שוקים.</u>

מאת דניאל שמיר.



<u>משפט:</u> משולש שבו שני חוצי זויות שלו חופפים זה את זה הוא משולש שוה שוקים.

<u>נתון:</u> משולש ABC. D נקודה על BC. כך ש

$$\widehat{DAB} \cong \widehat{CAD}$$

E נקודה על AC כך ש

$$\overline{BE} = \overline{AD} \quad . \quad \widehat{CBE} \cong \widehat{ABE}$$

צ"ל $\overline{BC} = \overline{AC}$

<u>הוכחה:</u> (בדרך השלילה) נניח כי $a \neq b$ ואפשר להניח בלי להצר את הכלליות $a > b$, כי אחרת נחליף את A עם B.

נסמן נקודה F על המשך CA באופן ש $AB = AF$
כמו כן נקודה G על המשך BG כך ש $AB = BG$.

$$AF = BG = AB = c.$$

חשבון זוויות פשוט מביאנו במקרה זה למסקנה שאם נקשר BF ו AG הרי $EB \parallel AG$; $FB \parallel AD$ לכן נוצרים שני זוגות של משולשים דומים $\triangle CEB \sim \triangle CAG$; $\triangle CAD \sim \triangle CFB$

ולכן מתקבלות הפרופורציות

$$\frac{AG}{EB} = \frac{a+c}{a} \quad ; \quad \frac{FB}{AD} = \frac{b+c}{b}$$

היות ולפי הנחת המשפט אורכי חוצי הזוויות שווים זה לזה נוכל להציב $EB = AD = x$ ולכן

$$AG = x\left(1 + \frac{c}{a}\right) \quad ; \quad FB = x\left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

עתה נוכל לסיים את ההוכחה בנקל בדרך השלילה:

לו היה $a > b$ הרי היה נובע מזה כי $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$ ולכן $AG < FB$

אבל מתוך ההנחה $a > b$ נובע גם כי $\alpha > \beta$ ולכן $180-\alpha < 180-\beta$

כיוון שהמשולשים $\triangle FAB$, $\triangle ABG$ שווים בשתי צלעות (שארכן c) ולא בזווית הכלואה ביניהן מקבלים לפי משפט ידוע כי $FB < AG$, דבר הסותר את מה שהוכח קודם לגבי צלעות אלה.

בדיוק באותו אופן מגיעים לידי סתירה מתוך ההנחה כי $a < b$ ולכן הוכח כי $a = b$.

על סכום זויות במצולע כוכבי

משה ירדן.

נתון ממצולע קמור בן מספר אי-זוגי $2n + 1 = m$ צלעות. נבחר קדקד אחד, נסמן אותו ב A_1 בכוון השעון נסמן את שאר הקדקדים ב $A_2, A_3, \ldots, A_m$. נבנה אלכסון מ A_1 ל A_{n+1} אלכסון שני $A_{n+1}\,A_m$, $A_m\,A_n$ וכך הלאה עד שהאלכסון האחרון יעבור מ $A_{m-(n-1)}$ ל $A_{n-(n-1)} = A_1$ כלומר נחזור לנקודה שממנה יצאנו. למצולע כזה נקרא מצולע כוכבי הבנוי במצולע קמור.

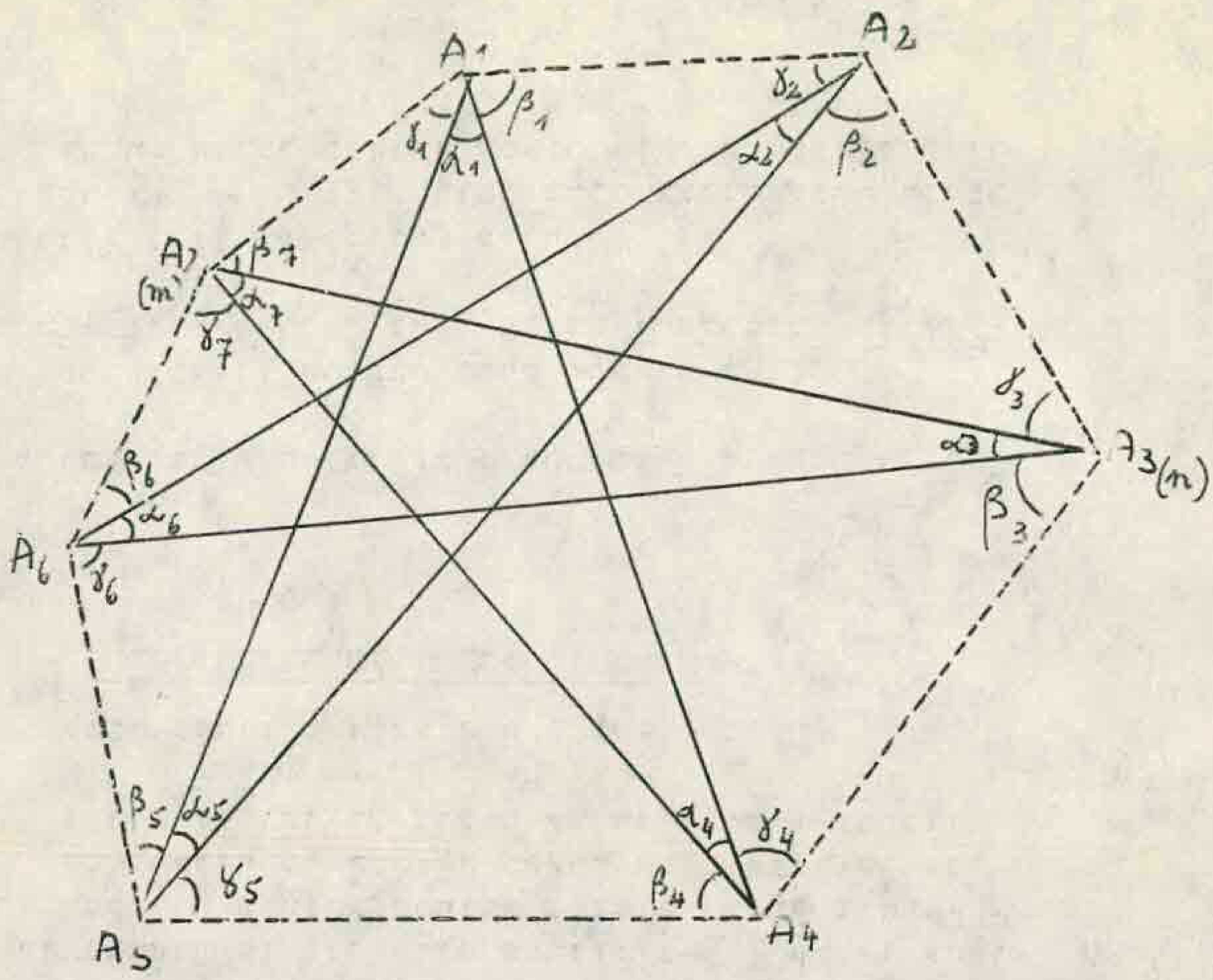
נגדיר כזוית המצולע הכוכבי את הזויות הנוצרות בין שני אלכסונים עוקבים, ובסמון $\sphericalangle A_i A_{i+n} A_{i+2n}$ (A_i יחשב גם כ A_{m+i}).

נתעכב בזה על שתי תכונות של מצולע כוכבי הבנוי במצולע קמור.

א) כל צלע שלו חותכת את שאר הצלעות. את התכונה הזאת נוכיח בדרך הבאה: נקח צלע כל שהיא במצולע $A_1 A_{n+1}$ (זהו מקרה כללי, כי נוכל לסמן כל צלע בצורה זו). הצלע הזאת מחלקת את המצולע הקמור לשני חלקים, ברור שהקדקדים של כל צלע אחרת במצולע אינם יכולים להיות מאותו צד של הצלע. כי ההפרש בין הציונים של הקדקדים של אותה צלע הוא תמיד n.

ב) משפט: סכום הזויות במצולע כוכבי הוא 180^0.

הוכחה: נסמן את זויות המצולע הכוכבי ב $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ בהתאמה לקדקדים $A_1, A_2, \ldots, A_m$. נסמן את הזויות $\sphericalangle A_{i+n} A_i A_{i+1}$ ב $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ בהתאמה לקדקדים. נסמן את סכום הזויות במצולע הכוכבי ב D . ונרשום:



מצולע כוכבי בן 7 צלעות

$$\alpha_1 = 180^\circ - (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) - (\gamma_{n+2} + \alpha_{n+2})$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - (\alpha_{n+2} + \beta_{n+2}) - (\gamma_{n+3} + \alpha_{n+3})$$

- -

$$\alpha_m = 180^\circ - (\alpha_{n+m} + \beta_{n+m}) - (\gamma_{n+m+1} + \alpha_{n+m+1})$$

נתון לנו ש $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = D$

וידוע לנו ש $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i = (m-2)180^\circ$ (סכום הזויות במצולע קמור). נחבר את כל המשואות לפי האגפים. סכום האגפים השמאליים יתן את D . את האגפים הימניים נחבר לפי הטורים

$$D = 180^\circ m - \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)$$

$$D = 180^\circ m - \left[180^\circ (m-2) + D\right]$$

$$2D = 180^\circ m - 180^\circ m + 360^\circ$$

$D = 180^\circ$ מה שהיה להוכיח.

הערת המערכת:

1. בהוכחת ב) השתמש המחבר בעובדה שסכום הזויות במצולע קמור בן n צלעות הוא $180^0(n-2)$. הוכח בדרך האינדוקציה השלמה כי המשפט הנ"ל נכון גם למצולע קעור.

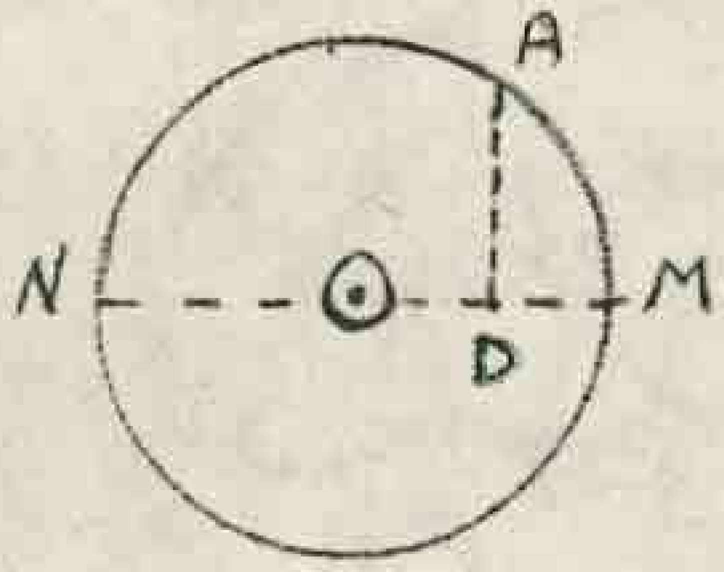
2. כיצד ישתנה המצולע הכוכבי כאשר צלעותיו אלכסוני מצולע קעור? מה ישמר במצולע הכוכבי החדש מתכונה ב)?

3. האם אפשר להוכיח בדרך האינדוקציה את המשפט שבמאמר הנ"ל?

פתרון בעיות של התחרות המתמדת

להלן פתרונות השאלות ת.106 - 120

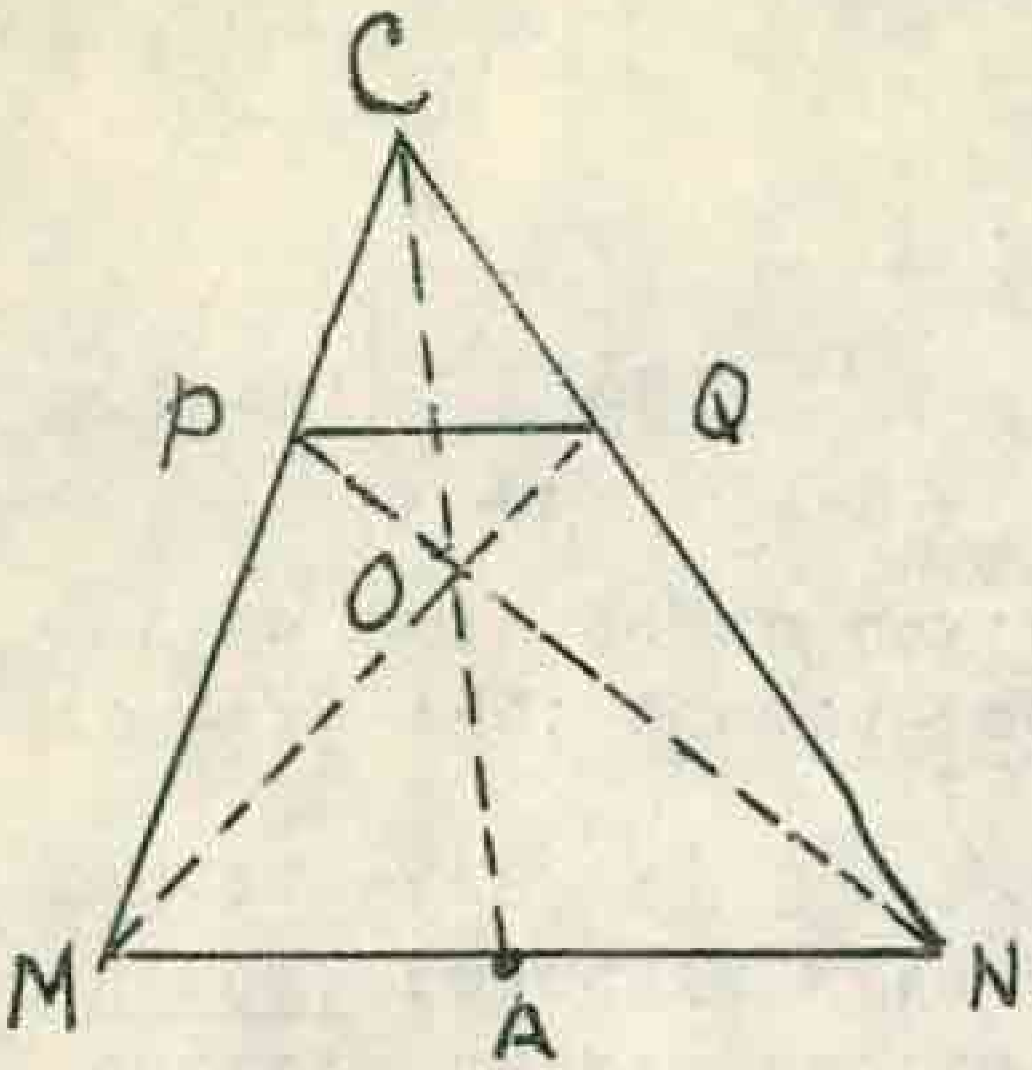
ת.106 תהי N נקודה על הכדור. נרשום על פניו מעגל שמרכזו ב- M. (יש להוכיח כי המחוגה מתארת אמנם מעגל על פני הכדור, הנקודות שמתארת המחוגה נמצאות במרחק שוה מ- M ולכן הן נמצאות על פני כדור שמרכזו ב-M . קבלנו איפוא חתך של שני כדורים). על המעגל שנתקבל נבחר שלש נקודות A , B ו C. אם נחתוך את הכדור במישור העובר במרכזו, דרך M ודרך A - נקבל מעגל ראשי בו MN קוטר המעגל. AD המאונך ל MN הוא רדיוס המעגל המתואר על פני הכדור.



בניה: לפי הקטעים AB , BC ו- AC נבנה את המשולש ABC . נחסום אותו במעגל. נבנה משולש ישר זוית MAN לפי נצב AM (מפתח במחוגה לפיו תואר המעגל על פני הכדור) וגובה על היתר AD (רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC). יתר המשולש הוא הקוטר המבוקש.

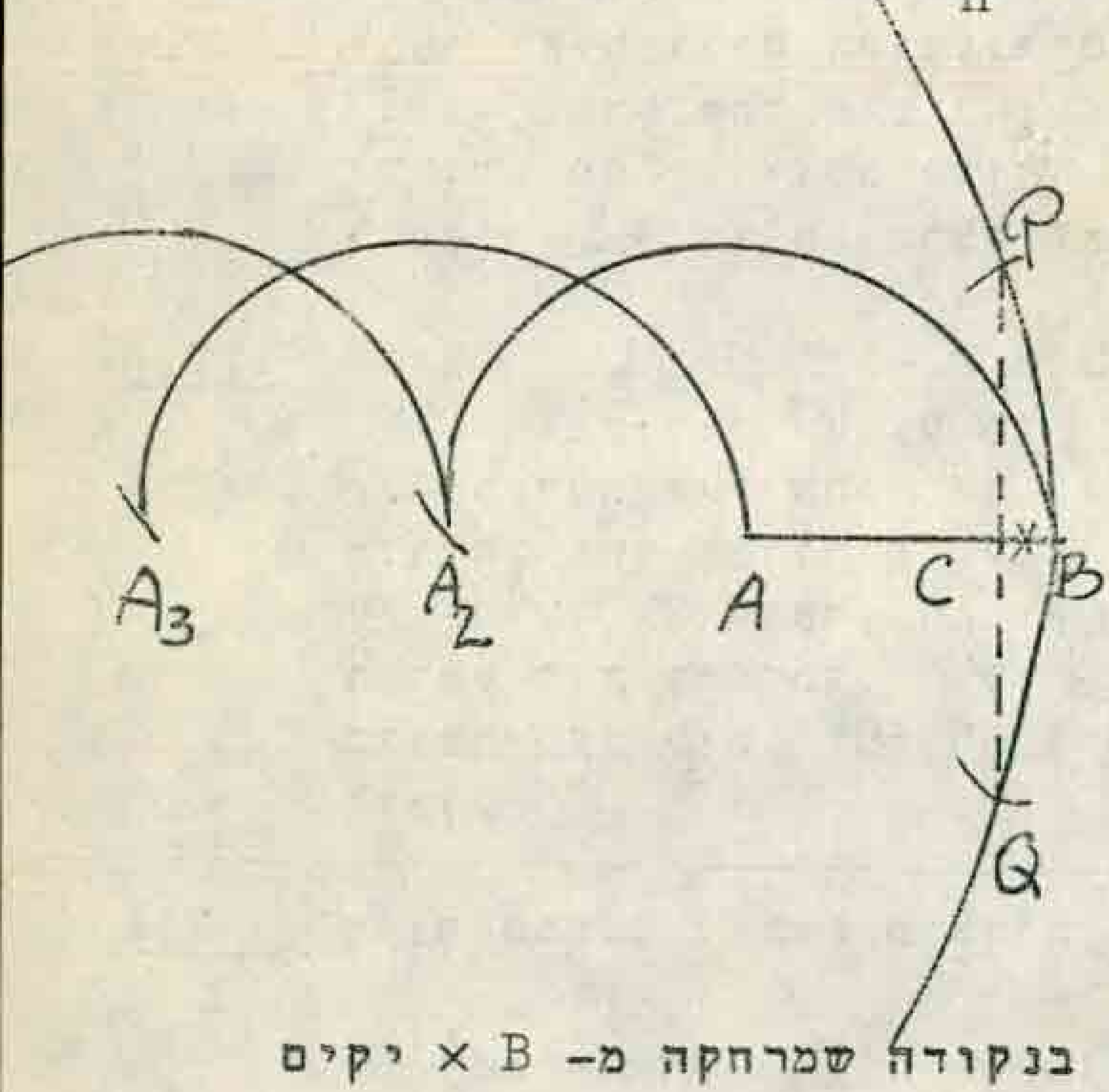
ת.107 דרך P יש להעביר מקביל ל- MN החצוי על ידי A .

נתוח: יהי PQ מקביל ל MN ו- Q נקודה כלשהי עליו. בתנאי ש MP ו- NQ נחתכים (בהמכשם בנקודה C). נעביר MQ, PN ו- CA . שלשתם נחתכים בנקודה אחת (הוכח!).



<u>בניה:</u>(בעזרת סרגל בלבד):
מעבירים את PM ובוחרים על
המשכו נקודה כלשהי C .
מעבירים את NC , AC ו NP .
דרך נקודת החתוך O של AC
ו NP מעבירים את MO .
נקודת חתוכו עם CN היא Q
ומעבירים את PQ . (הוכח כי
אמנם $PQ \parallel MN$).

ת.108 <u>בניה:</u> סביב A חגים מעגל ברדיוס AB ומקצים עליו, החל מ B, שלושה מיתרים השוים ל- AB . נתקבלה נקודה A_2 הנמצאת על הישר AB ו- $A_2A = AB$. בכך הכפלנו את AB . נפעל בצורה דומה לגבי A_2A ונקבל את A_3 . נחזור על פעולה זו $n-1$ פעמים ונקבל את A_n הנמצאת על הישר AB ומקימת $A_nB = n.AB$.



סביב A_n נחוג מעגל ברדיוס A_nB וסביב B מעגל ברדיוס AB. הם יחתכו בנקודות P ו Q. סביב P וסביב Q נחוג מעגלים ברדיוס AB . נקודת חתוכם C (השונה מ- B) מקיימת $BC = AB:n$.

<u>הוכחה:</u> תהי B' הנקודה הסימטרית ל- B ביחס ל- A_n . B, P ו B' מהוות משולש ישר זוית שיתרו $BB' = 2nAB$. PQ המאונך ליתר זה חותכו בנקודה שמרחקה מ- B x יקים

$$2nAB\cdot x = BP^2 = AB^2$$

$$\therefore\ x = \frac{AB^2}{2nAB} = \frac{AB}{2n}$$

אך

$$CB = 2x = \frac{AB}{n}$$

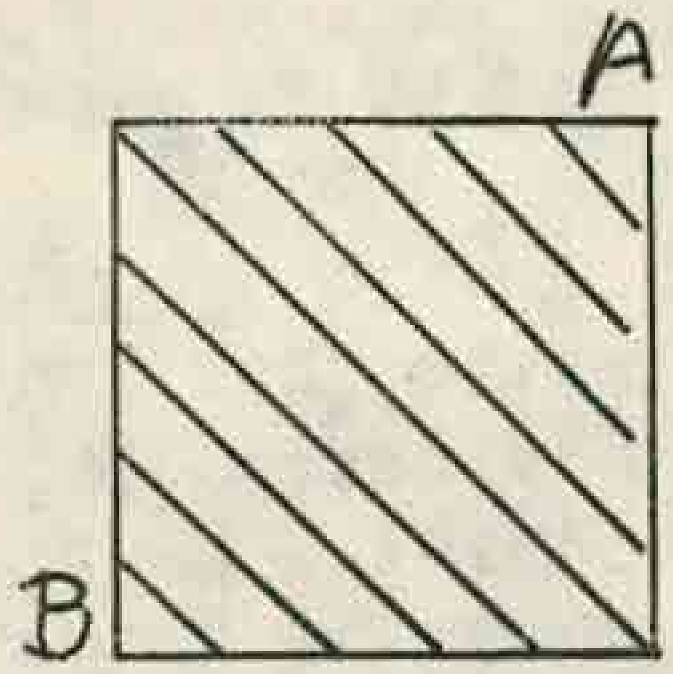
הערה: שים לב כי לא נצלנו את הקטע בין A ו- B אלא את קצותיו בלבד, ע"י שמוש ב- Q .

ת.109

$$x(x^{n-1} - n a^{n-1}) + a^n (n-1) =$$
$$= x^n - a^n - n x a^{n-1} + n a^n = (x^n - a^n) - n a^{n-1}(x-a) =$$
$$= (x-a)(x^{n-1} + a x^{n-2} + \dots + a^{n-1} - n a^{n-1})$$

הגורם השני מתאפס המציבנו $x=a$, לכן הוא מתחלק ב-$(x-a)$ ולכן מתחלקת המכפלה ב-$(x-a)^2$.

ת.110 א) 14 רצים. ב) $2n - 2$



<u>הוכחה:</u> נסתכל על הלוח כבנוי מקבוצות משבצות המהוות "אלכסונים" (מסלולים לארכם נע רץ) בכוון מסוים. אם הלוח הוא $n \times n$ מופיעים $2n-1$ אלכסונים. ברור שעל כל אלכסון כזה יכל לעמוד רץ אחד לכל היותר. אולם לגבי האלכסונים הקיצוניים A ו- B רק אחד מהם נתן לשמוש. עפ"י דוגמא פשוטה אפשר להוכיח כי ניתן אמנם להעמיד $2n-1$ רצים (הראה זאת).

ת.111 יהיו A, B, C ו- D מרכזי ארבעת הכדורים. תהיינה M ו N נקודות האמצע של AB ו- CD בהתאמה. מרכז הכבד של המערכת לא ישתנה אם נניח בכל אחת מהן משקולת כפולה מזו של אחד הכדורים. לכן נמצא מרכז המעגל באמצע הקטע MN. לכן MN קוטר, AB ו- CD נחצים על ידו ונמצאים במרחק שוה מהמרכז. לכן AB , CD שוים ומאונכים ל-MN כלומר מקבילים. לכן ABCD מקבילית חסומה במעגל ולכן מלבן.

ת.112 טענת המשפט נובעת מהזהות:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$$

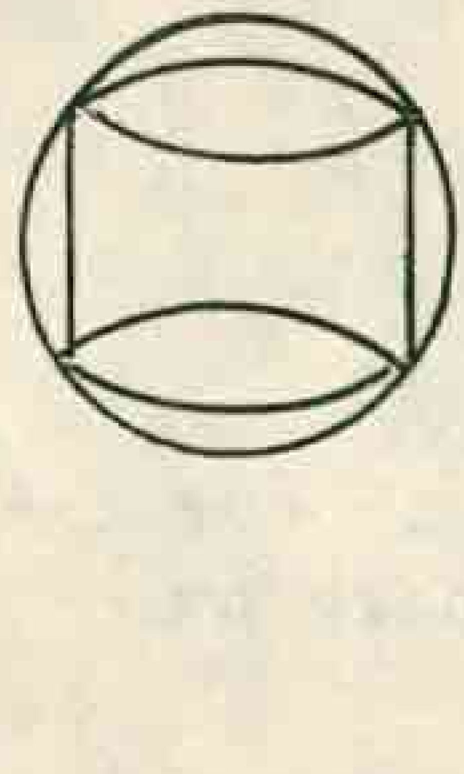
ת.113 יהי R רדיוס הכדור. r רדיוס הגליל ו-h גבהו.

$$R^2 = r^2 + h^2/4$$

שטח המעטפת: $M = 2\pi r h =$

$$= 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$M^2 = 4\pi^2 r^2 (R^2 - r^2)$$



נסמן $x = r^2$ ונחפש מכסימום לבטוי

$$M^2 = -4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 R^2 x$$

וכידוע פונקציה זו מקבלת את ערכה המינימלי בשעה ש $x = R^2/2$ $(X_{min} = -b/2a)$ לכן $r^2 = R^2/2$

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

ת.114

$$a^4(b^2-c^2) + b^4(c^2-a^2) + c^4(a^2-b^2) =$$

$$= a^4(b^2-c^2) + b^4c^2 - b^4a^2 + c^4a^2 - c^4b^2 =$$

$$= (b^4c^2 - c^4b^2) + (c^4a^2 - a^2b^2c^2) - (b^4a^2 - a^2b^2c^2) +$$

$$+ a^4(b^2-c^2) = a^4(b^2-c^2) + b^2c^2(b^2-c^2) -$$

$$- a^2c^2(b^2-c^2) - a^2b^2(b^2 - c^2) =$$

$$= (b^2 - c^2)(a^4 + b^2c^2 - a^2c^2 - a^2b^2) =$$

$$= (b^2 - c^2)\left[a^2(a^2 - c^2) - b^2(a^2 - c^2)\right] =$$

$$= (b^2 - c^2)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) =$$

$$= (a + b)(a - b)(a + c)(a - c)(b + c)(b - c)$$

ת.115 פעולת השרש חוזרת n פעמים

$$- \log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}} =$$

$$= -\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{2n}} = -\log_2 \log_2 2^{2^{-n}} = -\log_2 2^{-n}$$

$$= -(-n) = n$$

ת.116 נתונה המשוואה $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

יהיו שרשי המשוואה a , at at^2

הם מקימים:

$$1)\quad a + at + at^2 = -p$$

$$2)\quad a^2t + a^2t^2 + a^2t^3 = q$$

$$3)\quad a^3t^3 = -r$$

מכאן:

$$3')\quad at = -\sqrt[3]{r}$$

$$1')\quad a - t\sqrt[3]{r} = -p + \sqrt[3]{r}$$

$$2')\quad -a\sqrt[3]{r} + t\sqrt[3]{r^2} = q - \sqrt[3]{r^2}$$

נכפול את המשוואה (1^1) ב $\sqrt[3]{r}$ ונחברן:

$$0 = -p\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r^2} + q - \sqrt[3]{r^2}$$

$$p\sqrt[3]{r} = q$$

$$p^3r = q^3$$

ת.117 מהשויון השני מקבלים:

$$bc + bd = d^2 + cd$$

$$b(c+d) = d(c+d)$$

אך $c + d \neq 0$ (חיוביים) לכן $b = d$

בהציבנו שויון זה בשויון הראשון הנתון נקבל:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{c}$$

$$c^2 = b^2$$

ומאחר והם חיוביים $b = c$.

ת.118 א) מאחר ששלושת מרכזי המעגלים A, B ו-C אינם על ישר אחד לא ייתכן שמעגל אחד ישיק לשני מבפנים והשלישי ישיק (ברור שבאותה נקודת מגע) לשניהם מבחוץ.
אפשריים איפוא רק המבנים הבאים: 1) כלם משיקים זה לזה מבחוץ. 2) שנים משיקים זה לזה מבחוץ ומשיקים לשלישי מבפנים. אך כיון שאת תפקיד המעגל השלישי יכל לקבל כל אחד משלושת המעגלים הרי לפנינו בסך הכל ארבע אפשרויות.

ב) במקרה שכל המעגלים משיקים זה לזה מבחוץ יקימו מחוגיהם x, y ו z את המשואות הבאות:

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + z = c \end{cases}$$

בהיות a, b ו- c צלעות המשולש ABC. מערכת הפתרונות היא:

$$x = \frac{a-b+c}{2} = p - b \,;$$

$$y = \frac{a+b-c}{2} = p - c \,;$$

$$z = \frac{-a+b+c}{2} = p - a$$

בהיות $p = (a+b+c)/2$

אם המעגלים סביב B ו- C משיקים לשלישי מבפנים נקבל את מערכת המשואות:

$$\begin{cases} x - y = a \\ y + z = b \\ x - z = c \end{cases}$$

ופתרונותיה:

$$x = p \qquad y = p-a \qquad z = p-c$$

$(p-a)$ ו- $(p-c)$ כבר הופיעו במקרה הקודם ונוסף אליהם p. מטעמי סימטריה נוכל להוסיף כי אף בשני המקרים האחרים יופיעו שני גדלים המופיעים במקרה הראשון ונוסף להם הגדל p.

ג) במקרה שכל השלושה משיקים זה לזה מבחוץ נקבל, לפי התוצאות לעיל

$$xyz = (p-a)(p-b)(p-c)$$

ומנוסחת הרון

$$xyz = \frac{S^2}{p} = S \cdot \frac{S}{p} = Sr$$

<u>בניה:</u> ערכי המחוגים x, y ו- z שנתקבלו בדרך אלגברית ניתנים לבניה פשוטה ולפיהם אף המעגלים.

ת.119 הבטוי $\sin A + \sin B + \sin C$ איננו מקבל ערך מכסימלי אם המשולש ABC איננו שוה-צלעות. נניח כי ABC איננו שוה צלעות ותהי C זויתו הבינונית (כגון $A \leq C \leq B$ (
$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A+\sin B+\sin(A+B) =$
$= 2\sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B)$

מאחר ש $\sin(A+B)/2 > 0$ ו $\cos(A-B)/2 < 1$
(שויון רק אם המשולש שוה צלעות) נקבל

$$< \sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{A+B}{2} + \sin(A+B)$$

כלומר, אם ABC איננו שוה צלעות קים משולש אחר (שוה-שוקים, בו זויות הבסיס ממוצע של זויותיו הקיצוניות) בו הבטוי הנדון יותר גדול. לכן אם קים ערך מכסימלי לבטוי הנדון הוא מתקבל בהכרח כאשר ABC שוה-צלעות.

ובמקרה זה $\sin A + \sin B + \sin C = 3\sin 60^{\circ} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>הערה:</u> הבטוי הנדון הוא היקפו של משולש החסום במעגל היחידה. וכידוע היקף המשולש מקסימלי בהיותו שוה-צלעות (זהו נסוח שונה לאותה בעיה).

ת.120 מהנתון נובע

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{b}{a}\sin^4 x + \frac{a}{b}\cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$$

ומכאן $$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2 x - \sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2 x\right)^2 = 0$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2 x = \sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2 x$$

נסמן $$\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = k$$

בעיות חדשות

הערה: הבעיות המצויינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' ו-י' בלבד.

ת.136* (4 נקודות) הוכח את אי השויון

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

ת.137* (2 נקודות) ABCDEFGHIJ הוא מעושר משוכלל החסום במעגל שרדיוסו R.
הוכח כי $AD = R + AB$

ת.138* (3 נקודות) הוכח שלגבי כל n שלם גדול מ-2 מתקיים אי-השויון

$$(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n)^2 > n^n$$

ת.139* (4 נקודות) יהיו p ו q מספרים ראשוניים תאומים (ז"א הפרשם 2). הוכח כי p^q+q^p מתחלק ב $p+q$

ת.140 (3 נקודות) הוכח שאם α β ו-γ הן זויות משולש ואם

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$$

הרי המשולש הוא ישר זוית או שוה שוקים.

ת.141* (3 נקודות) (נשלחה ע"י שמואל פרידלנד). בנה משולש לפי זויותיו כך שקדקדיו ימצאו על שלשה ישרים מקבילים.

ת.142 (4 נקודות) (נשלחה ע"י אריה גינגול). יהיו a ו-b מספרים טבעיים המקימים את אי השויונות

$$a-1 < \sqrt{b} < a$$

הוכח כי $(a+\sqrt{b})^n$ איננו מספר שלם, והחלק השלם שבו (ז.א., המספר השלם הגדול ביותר הקטן ממנו) הוא אי זוגי, לגבי כל n טבעי.

ת.143 (5 נקודות) מצא, בלי שמוש בנגזרת, את הערך המינימלי של הפונקציה $y = (2+\sqrt{3}\cos x)/\sqrt{3}\sin x$
כאשר $0 < x < \pi$

ת.144 (3 נקודות) החר את אי השויון

$$(x^2+y^2-1)/(y^2-x^2) > 0$$

ת.145* (2 נקודות) (נשלחה ע"י שלח שהרן) בנה משולש ABC לפי תיכון m_b, גבה h_a וזוית A.

ת.146 (3 נקודות) α, β ו γ הן זויות משולש המקימות
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1\tfrac{1}{2}$$
הוכח כי המשולש הוא שוה צלעות.

ת.147 (4 נקודות) הוכח, ללא שמוש בנגזרת, כי מכל המרובעים בעלי צלעות נתונות (בסדר נתון מראש!) המרובע בעל השטח הגדול ביותר הוא המרובע הניתן להחסם במעגל.

ת.148 (2 נקודות) הוכי כי
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}$$

ת.149 (3 נקודות) במשולש ABC נתונים הזוית A והיחס $k = (b-c)\ /\ h_a$ מצא את B ו- C.

ת.150 (3 נקודות) הוכח כי המספר 277.....88.....9 שבו מופיעה הספרה 7 n פעמים והספרה 8 $n+1$ פעמים הוא תמיד רבוע.

חידוד מוח

(המשך מעמוד 27)

ד) בעל מפעל הציע למועמד לעבודה שתי הצעות משכרת לבחירה: 1) בחדש הראשון - 200 ל"י ובכל חודש אחריו -.30 ל"י הוספה, או ב) אותה המשכרת היסודית, אבל כל חצי חדש (אחרי המחצית הראשונה) -.10 ל"י הוספה. איזו הצעה הטובה יותר בשביל המועמד?

תשובה: השניה. כתוב את הכנסותיו של כל אחד בפרוטרוט!

ה) אדם רוצה להכניס לאוטובוס מוט באורך 1,7 מטר. הנהג אינו מרשה לו את הכנסתו בעומדו על התקנה שמותר רק להוביל חפצים באורך 1 מטר לכל היותר. מה יעשה הנוסע, בכדי להוביל את המוט בהתאם לתקנות?

תשובה: לארוז אותו בתיבה אשר כל ממדיה 1 מטר ולשים את המוט לאורך האלכסון הפנימי (אורכו $1,73 \approx \sqrt{3}$)

הודעות המערכת:

1. אנו פונים בבקשה אל מנהלי בתי הספר ואל המורים למתמטיקה המקבלים "גליונות מתמטיקה" להפצה בין התלמידים להחזיר את אותם הגליונות שלא נמכרו תוך שבועיים. הפעם אזלו הגליונות ולא יכולנו לספק אותם לכל הדורשים ובאחור רב הוחזרו חוברות ממוסדות בהם לא נמכרו כלם.

2. המעוניינים ברכישת הגליונות 1-8, כרך ראשון, יפנו למערכת. מספר 2 אזל, אבל אנו מתכוננים להדפיסו מחדש, אחרי שנקבל הזמנות, כי הדרישה בעבר היתה גדולה.

3. נתקבל במערכת ספר חידות ובידורים מתמטיים "בפרדס המספרים" מאת מ. נחשון. מחיר הספר -.5 ל"י. קוראי ה"גליונות" יכולים להשיג ספר זה דרך המערכת בהנחה של 20%, כלומר ב -.4 ל"י.

4. המערכת מתנהלת בהתנדבות ובעזרת מוסדות צבוריים שונים, לכן נבקש לא לעכב את התשלומים ולהעביר אותם בהקדם ישר לעורך או לבנק הדאר, חשבון מס.23357.

איפה השגיאה?

א) $3 > 2$ לכן $1g(\frac{1}{2})^3 > 1g(\frac{1}{2})^2 \Leftarrow 3\ 1g\frac{1}{2} > 2\ 1g\ \frac{1}{2}$

מזה נובע $(\frac{1}{2})^3 > (\frac{1}{2})^2$ או $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$

ב) 2000 גר' = 2 ק"ג

3000 גר' = 3 ק"ג

וע"י הכפלת שתי המשואות:

6.000.000 גר' = 6 ק"ג

רשימת פותרי השאלות מס. 106 - 120

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגרים סה"כ הנקודות של הפותר.

1. איזנמן מיכאל, י"ב תיכון ירושלים, 120,118,117,114-106 (42 נ.)
2. אורבך אברהם, 120-116,114,112-110,109*,108,107 (38 נ.)
3. גולדשטין מאיר, צה"ל, 113,112*,111,110*,109-107, 119,118,117* (28 נ.)
4. גינגולד אריה, 120-116,114,112-107 (39 נ.)
5. הילר יורם, י"ב תיכון עירוני א' ת"א, 113,111,109, 120,119,117,116,114 (24 נ.)
6. זלטקין מיכאל, י"ב ריאלי חיפה, 116*,115*,114-107, 120-117 (43½ נ.)
7. סליל אורי, י"א ריאלי חיפה, 114,112-109,107, 120,117,116* (27 נ.)
8. לוי אליהו, י"א ריאלי חיפה, 116,114,113*,112-106, 120,119,118*,117 (45 נ.)
9. לביא נתן, י"ב תיכון ירושלים, 114,112,111,109, 120,118,117,116* (24 נ.)
10. לורנד ראובן, י"א ריאלי חיפה, 116*,114-109,107, 120,117 (30 נ.)
11. לובזנס דניאל, 120-117,116*,115-107,106* (50 נ.)
12. מגלס יוסף, 117,110,107 (10 נ.)
13. מימון אורי, י"א ריאלי חיפה, 111,109*,108,107, 118,117,116*,112 (24 נ.)
14. סתוי יונתן, י' הרצליה ת"א, 116*,115*,114-106, 120-117 (49 נ.)
15. עקביה גדעון, י"א ריאלי חיפה, 120,118-116,114-106 (45 נ.)
16. פרידלנד שמואל, י"ב ריאלי חיפה, 113-107,106*, 120-116,115* (44 נ.)
17. קריב עודד, 120-117,116*,114-106 (47 נ.)
18. קושניר ראובן, י"א ריאלי חיפה, 117,116*,114-107, 120,118* (38 נ.)
19. רשף שמואל, 120-117,116*,114-106 (47 נ.)
20. רן אהוד, י"א ריאלי חיפה, 120-117,116*,114-107 (42 נ.)
21. שהרן שלח, שנה א' אוניב' ת"א, 113-108,107*,106, 120-115,114* (48 נ.)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

י. דוד, ביה"ס התיכון עירוני א', רח' בכורי העתים 2, ת"א.

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר התימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.