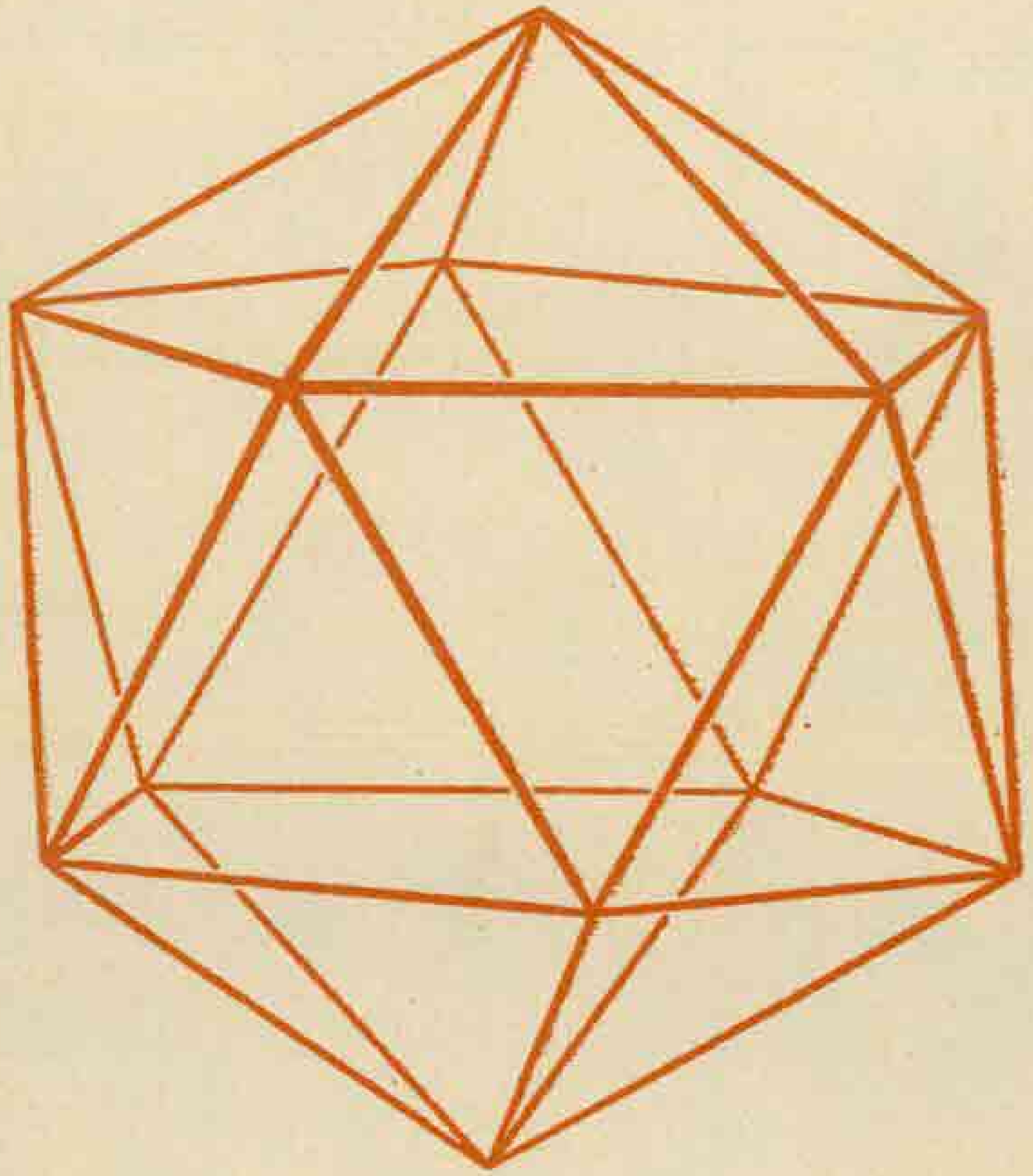


כרך 2   ת"א. ניסן תשכ"ג – אפריל 1963   מס' 3

יוצא לאור בחסות

ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. דוד

המערכת: א. גינזבורג, מ. כהן, ש. פ. קלעי, צ. שור

דבר המערכת

אנו שמחים על ההשתתפות ההולכת וגדלה מצד הקוראים הן בקריאת הגליונות, הם בהתרת הבעיות והן בכתיבת מאמרים.

נשתדל לפרסם את המאמרים הנשלחים אלינו, אם הם מתאימים מבחינת ענינם וצורתם, אך נבקש את המחברים להתאזר בסבלנות, עד שיופיע פרי עטם בדפוס.

מתוך נסיון השנים הקודמות למדנו שלא כדאי להוציא חוברת בסוף שנת הלמודים, ולכן תהיה חוברת זו האחרונה בשנת הלמודים תשכ"ג.

החוברת הבאה תופיע בעת חופשת הקיץ. המנויים יקבלוה מיד עם הופעתה, והיא תשלח לבתי הספר בראשית שנת הלמודים.

חוברת נוספת תופיע חדש לאחר מכן, כדי לפצות את קוראינו על ההפסקה הארוכה. הקוראים שאינם מקבלים את החוברת דרך בית-ספרם, מתבקשים להקל עלינו ולחתום על הגליונות שנה מראש באמצעות בנק הדאר, חשבון מספר 23357 של המערכת.

לפי בקשת קוראים רבים הדפסנו מחדש מספר מצומצם של עתקי גליון 2, כרך א, ואפשר להשיגם במערכת במחיר 75 אגורה. כל שמונת הגליונות של כרך א ניתנים לרכישה במחיר -.4 ל"י.

אנו מאחלים לכל קוראינו הלומדים בבתי הספר התיכונים והגבוהים סיום שנת למודים מוצלח, ולתלמידי כתה י"ב בפרט הצלחה בבחינות הבגרות.

"כדורגל ומתמטיקה"

כידוע, משוים יחסי שערים בין קבוצות כדורגל (או יחסי סלים בין קבוצות כדורסל וכד') ע"י השוואת גדלם של השברים המתאימים. למשל, היחס 7:3 עדיף על 19:10, כי $\frac{7}{3} > \frac{19}{10}$. אולם, קיימת אי-נוחיות מסוימת מכתיבת יחסי שערים כשברים, משני טעמים:

א) חיבור יחסי שערים אינו מתבצע לפי המתכונת הרגילה של חיבור שברים ($\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$), אלא לפי $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

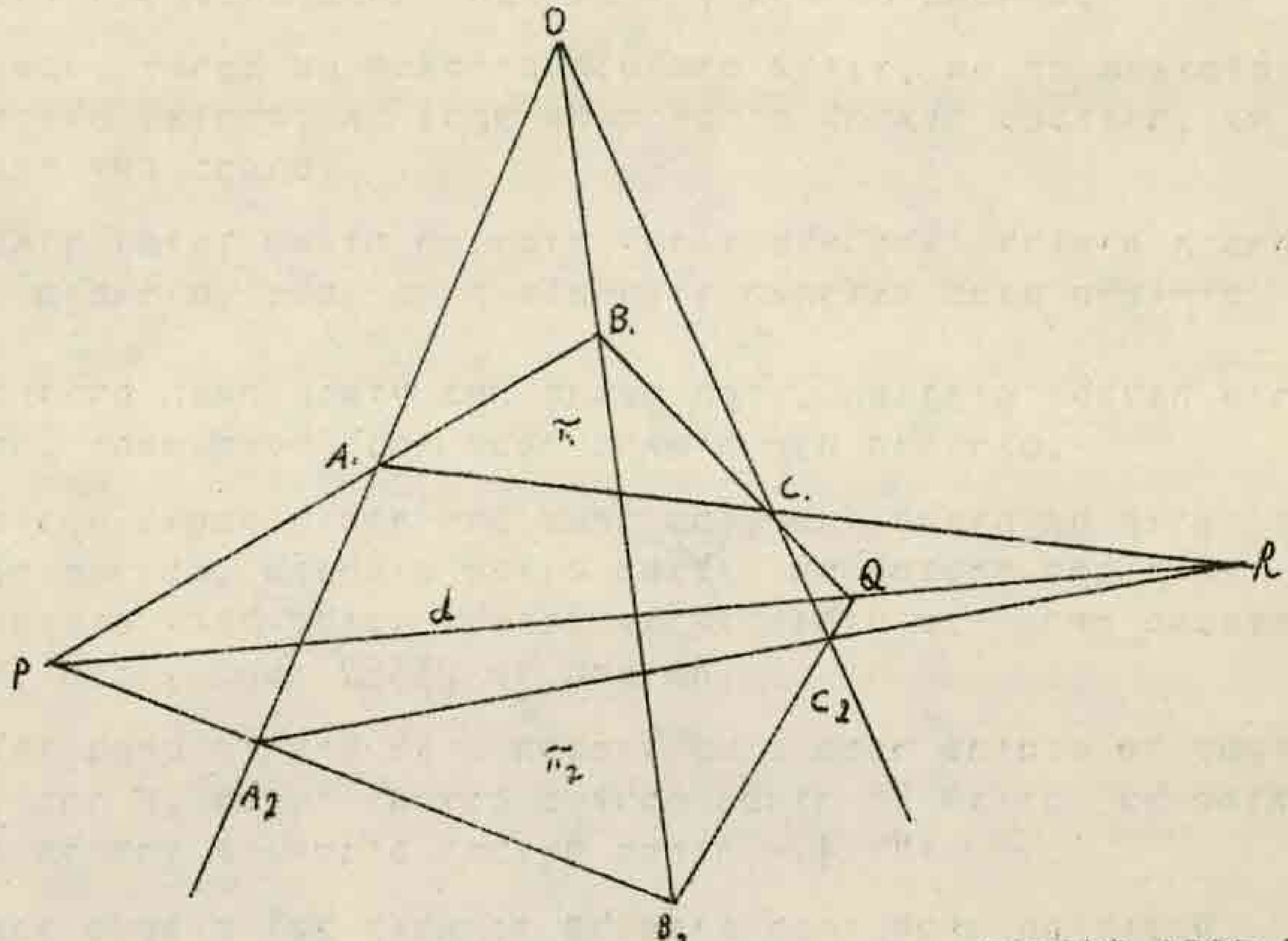
ב) קיים יחס שערים שבו המספר השני הוא 0, בעוד ששבר $\frac{a}{0}$ אינו קיים.

התוכל להציע מערכת מתמטית המתאימה יותר לחשבון היחסים ממערכת השברים?

ראה תשובה בעמ' 24

משפט של דזרג (Desargues)

אריה כרוך



משפט דזרג במישור.

אם מצבם ההדדי של שני משולשים כל-שהם A,B,C ו- $A_2B_2C_2$ הוא כזה שהקוים המחברים את קדקדיהם המתאימים (לקדקד A_1 מתאים A_2, ל- B_1 - B_2, ל- C_1 - C_2), כלומר הקוים $A_1\ A_2$, B_1B_2, ו- C_1, C_2, נפגשים בנקודה אחת O - כי אז קוי הצלעות המתאימות של שני המשולשים (לצלע $A_1\ B_1$ מתאימה הצלע $A_2\ B_2$ וכו׳) נפגשים בשלוש נקודות הנמצאות על ישר אחד:

הישר $A_1\ B_1$ נפגש עם הישר $A_2\ B_2$ בנקודה p
$B_1\ C_1$ נפגש עם $B_2\ C_2$ בנקודה Q
$C_1\ A_1$ נפגש עם $C_2\ A_2$ בנקודה R
והנקודות P ,Q, ו- R נמצאות על ישר d הנקרא "קו דזרג".

משפטו של דזרג הוא משפט תאורי (דסקריפטיבי) שאינו מותנה בגודלן של הצלעות או של הזויות. הוא מגדיר תכונה הנתנת להכללה במישור ובמרחב מבלי להעזר בתכונות מטריות.

האכסיומה שלפיה שני ישרים במישור נחתכים לכל היותר בנקודה אחת נתנת להכללה, אם נגדיר שגם שני ישרים מקבילים נחתכים בנקודה אחת, היא הנקודה האידאלית או הנקודה שבאין-סוף המשותפת לשני קוים מקבילים. בדרך זו מתקבלת אכסיומה בעלת משמעות כוללת ללא יוצאים מן הכלל - שכל שני ישרים נחתכים בנקודה אחת (ממשית או אידאלית). בדומה לכך נתן להכליל גם את המשפט של דזרג ולהקנות

לו תקף גם במקרה שהנקודה O היא אידיאלית, היינו כאשר שלושת הקוים $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$ הם מקבילים. המשפט נתן להכללה גם עבור צלעות מקבילות, כלומר:

$A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ ו- $C_1A_1 \parallel C_2A_2$;

במקרה זה יהיה קו דזרג עצמו אידאלי וגם שלושת נקודות החתוך RQp תהיינה נקודות אידאליות על גבי הישר שבאין-סוף. בהעזרנו באלמנטים אידאליים מקנים אנו איפוא למשפט דזרג משמעות כוללת.

נשאלת עתה השאלה כיצד להוכיח את המשפט. כאן נתקלים אנו בקושי מסוים. אפשר להראות, והדבר נעשה, שהמשפט אינו נתן להוכחה במישור אלא אם כן נעזר בתכונות מטריות כגון: פרופורציונליות של קטעים. ההוכחה לא תובא כאן, כי ברצוננו לשמור במאמר זה על האופי הדסקריפטיבי של המשפט. יש שמניחים את המשפט כאכסיומה שאינה טעונה הוכחה, אולם הוא נתן להוכחה בעזרת גישה מן המרחב.

נעין בשרטוט המתאר את משפטו של דזרג ונתאר לעצמנו את ההטל של שני משולשים במרחב $A_1B_1C_1$ הנמצא במישור π_1 השונה מן המשור π_2 ובו נמצא המשולש $A_2B_2C_2$, הקרנים A_1A_2 , B_1B_2 ו- C_1C_2 הן שלושה קוים במרחב הנפגשים בנקודה אחת O. במלים אחרות, נוכל לראות בשרטוט זה פינה מרחבית משולשת (שלושה מישורים הנפגשים בנקודה O) החתוכה ע"י שני מישורים נבדלים π_1 ו- π_2 , בתנאים אלה נוכל בנקל להוכיח את המשפט אם נעזר באכסיומות הידועות שכל שני מישורים נחתכים לפי ישר אחד (ממשי או אידאלי), ושלושה מישורים שאינם עוברים דרך ישר אחד נחתכים בנקודה אחת (ממשית או אידאלית).

לפיכך מתקבל ששני מישורי המשולשים π_1 ו- π_2 נחתכים בקו אחד d , הוא קו דזרג, ונרשם: $\pi_1 \cap \pi_2 \in d$. על ישר זה d נמצאות שלש הנקודות המבוקשות, משום ששלושת המישורים π_1 ו- π_2 והמישור ($OA_1A_2B_2B_1$) קובעים נקודה P על הישר d . שלושת המישורים π_1 ו- π_2 והמישור ($OB_1B_2C_2C_1$) קובעים נקודה Q על הישר d המשותף ל- π_1 ו- π_2 ; ושלושת המישורים π_1 ו- π_2 והמישור ($OC_1C_2A_2A_1$) קובעים נקודה R על הישר d המשותף ל- π_1 ו- π_2 . כך מתקבל שהנקודות P, Q ו- R נמצאות על ישר d - הוא הקו המשותף.

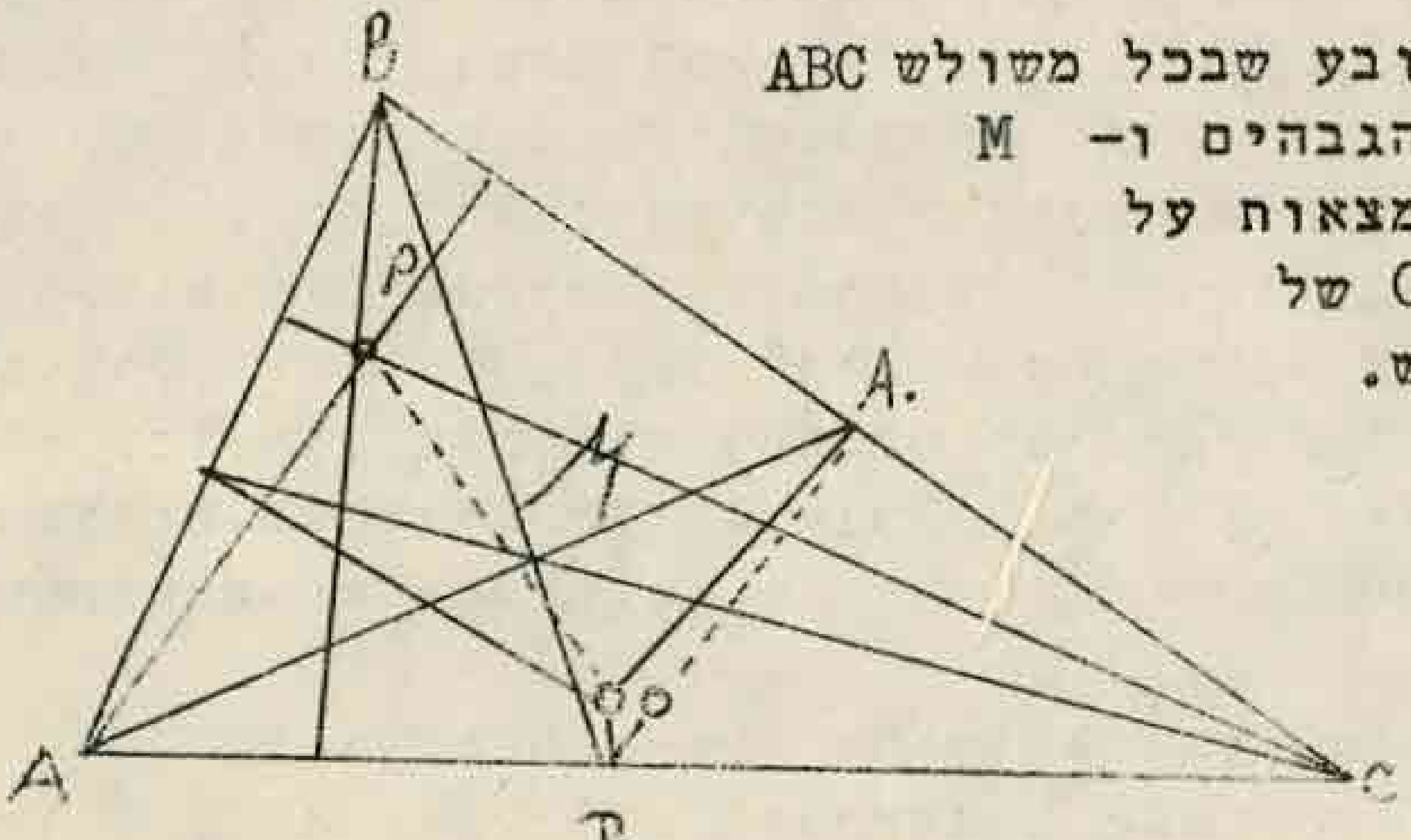
את המשפט אפשר להרחיב עוד יותר בהתאם לחוק השניות (דואליות), הקובע כי במשפטים דסקריפטיביים בהם זכות שוה לאלמנטים אידאלים כמו לאלמנטים ממשיים, רשאים אנו להחליף במישור את הנקודה בישר ואת הישר בנקודה מבלי לפגוע ע"י כך בתקפו של המשפט. לדוגמה - שני ישרים קובעים תמיד נקודה אחת, המשפט הדואלי הוא, ששתי נקודות קובעות תמיד ישר אחד.

אם נשתמש בחוק הדואליות נגיע למשפט שנוכל לקרוא לו המשפט ההפוך למשפטו של דזרג, היינו:

אם מצבם ההדדי של שני משולשים הוא כזה שהנקודות המתקבלות ע"י חתוך הצלעות (הצלע דואלית לקדקד) המתאימות נמצאות על ישר אחד d (d דואלי לנקודה A). כי אז הקוים המחברים את הקדקדים המתאימים של שני המשולשים נחתכים בנקודה אחת O. כדאי שנתן את תשומת לבנו לשרטוט שבעזרתו הוכיחו את קו דזרג. למערך כזה של נקודות וקוים אנו קוראים בשם קונפיגורציה, היינו תצורה גיאומט-רית בעלת תכונה מיוחדת. לפנינו 10 ישרים ו-10 נקודות, על גבי כל ישר 3 נקודות ודרך כל נקודה עוברים 3 ישרים. קיימות קונפי-גורציות רבות, שהפשוטה מהן היא - המשולש.

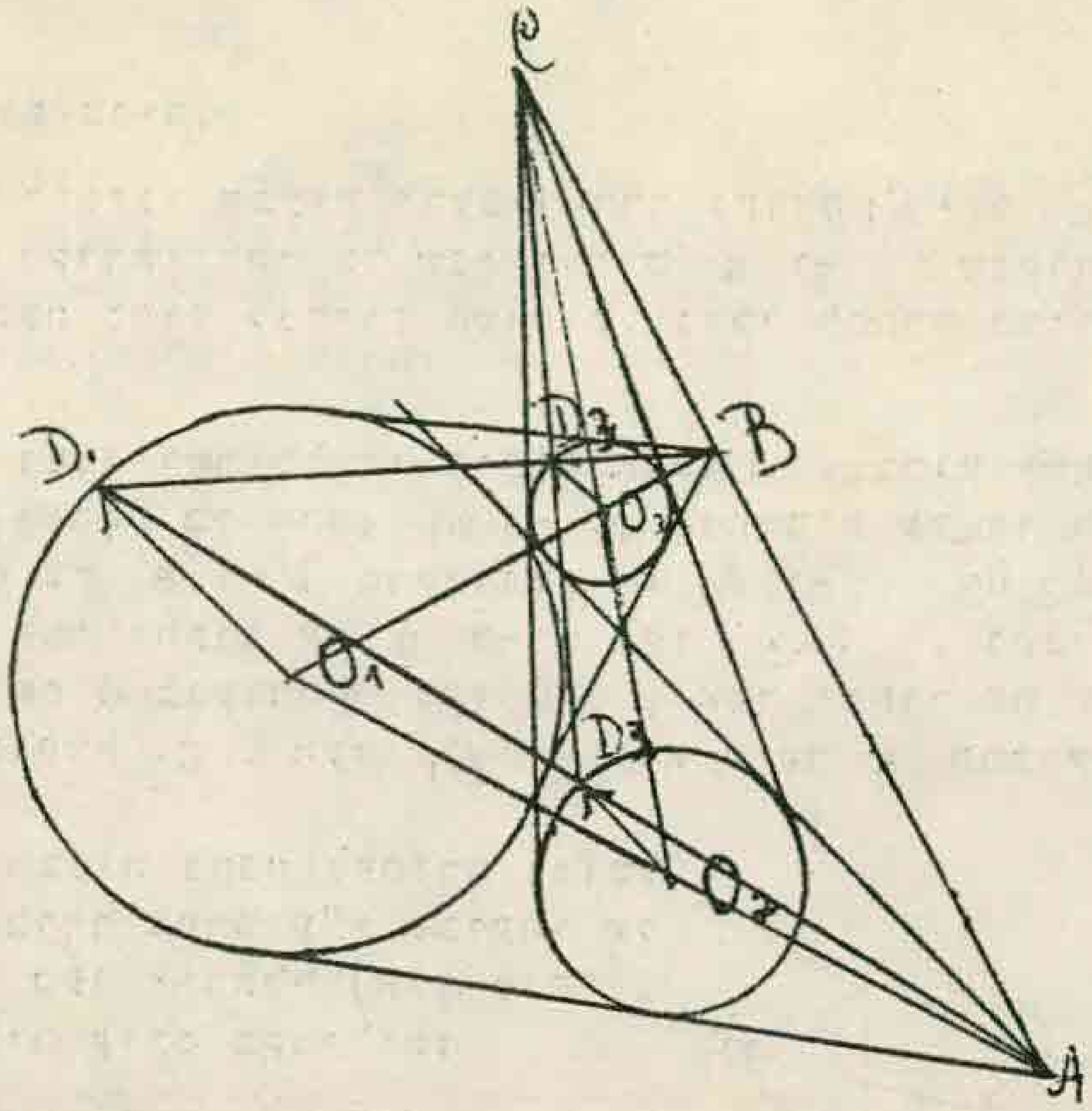
נסכם בקצרה את משפטו של דזרג בשתי צורותיו: זוג משולשים הקובע נקודה (O) קובע גם ישר (d), וזוג משולשים הקובע ישר d קובע גם נקודה O.

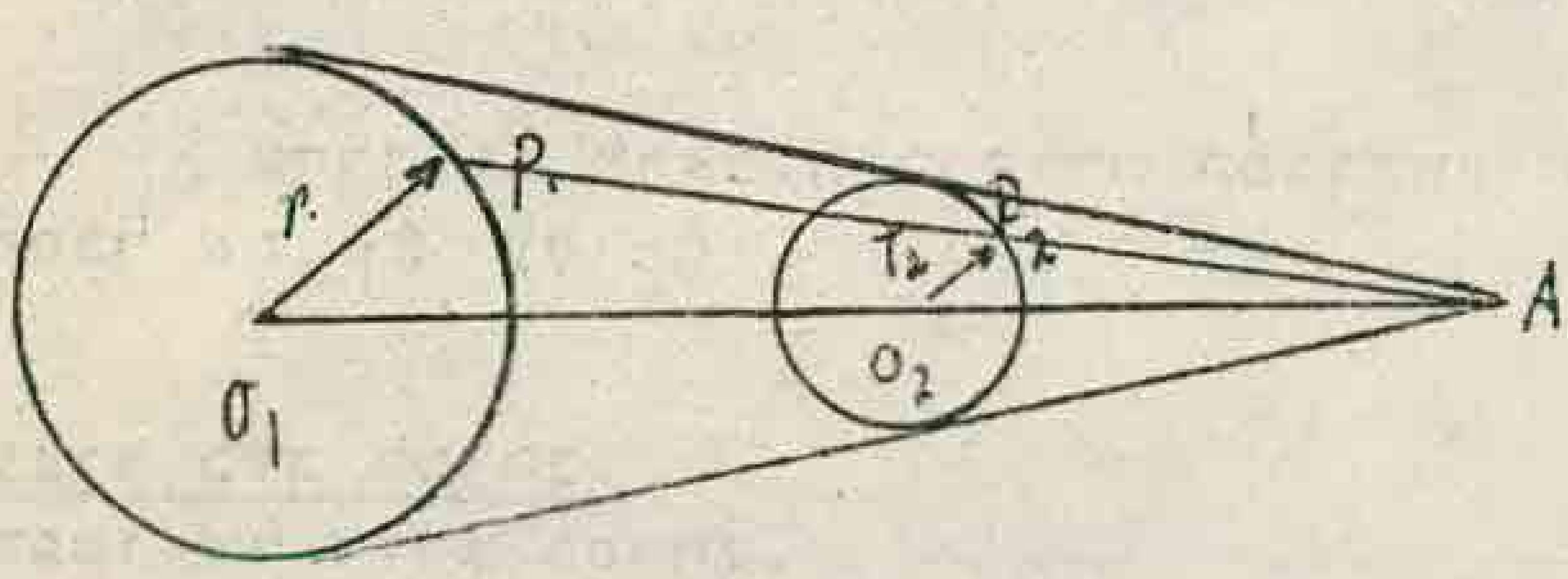
נביא כאן כמה דוגמאות שמושיות של הוכחות בעזרת משפטו של דזרג.



א) ידוע המשפט הקובע שבכל משולש ABC נקודות הפגישה P של הגבהים ו- M של הקוים התיכוניים נמצאות על ישר העובר דרך המרכז O של המעגל החוסם את המשולש. כדי להוכיח את המשפט נעין במשולש ABP שצלעותיו מקבילות לצלעות המשולש A_1B_1O (לנקודה A מתאימה A_1, ל- B- B_1, ל- P - O). היות והצלעות מקבילות מתקבל ישר דזרג אידאלי והקוים המחברים את הקדקדים המתאימים חייבים להפגש בנקודה אחת. במקרה שלפנינו היא הנקודה M, בה נפגשים הישרים A_1A עם BB_1 ועם PO.

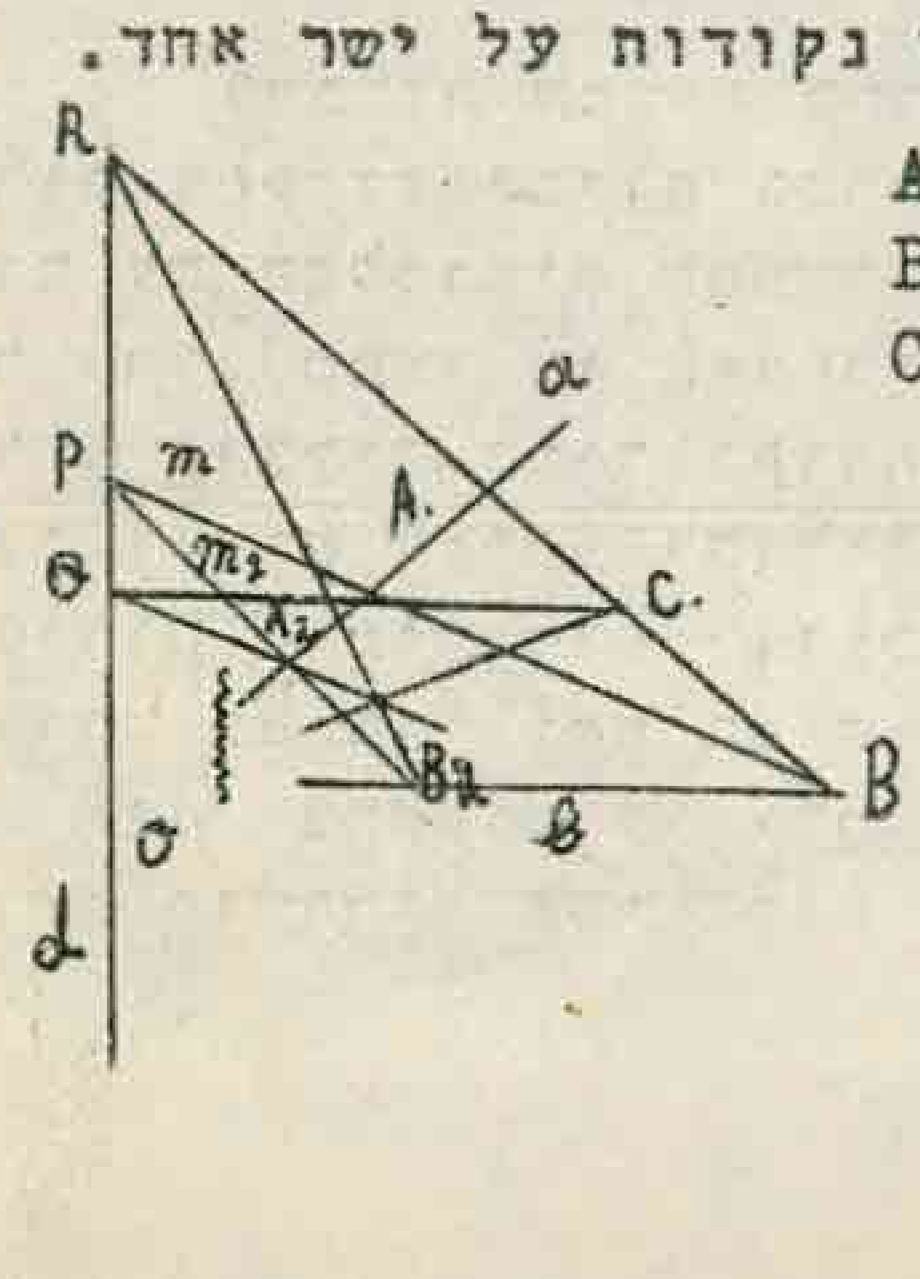
ב) נפתור כעת בעיה אשר הופיעה בגליונות מתמטיקה בחוברת מס' 6 כרך א' עמוד 163, והוצגה בפני תלמידים מצטינים מכתה י"ב תיכונית בתחרות מטעם הטכניון בחיפה לקבלת הפרס ע"ש פרופ' י. גרוסמן. בעיה זו כבר זכתה לשני פתרונות, אולם לא נעשה כל נסיון להעזר במשפטו של דזרג, אם כי זוהי הדרך הקלה והפשוטה ביותר. הבעיה היא: נתונים שלושה מעגלים O_1, O_2 ו- O_3 במישור, בעלי רדיוסים שונים, שמרכזיהם אינם על ישר אחד, וכל מעגל נמצא מחוץ לשני המעגלים האחרים. יש להראות שאם נעביר שלושה זוגות משיקים חיצוניים לשלושה זוגות של מעגלים, נקבל שלוש נקודות A, B, C הנמצאות על ישר אחד. כדי להוכיח את המשפט נזכור שאת נקודת ה-פגישה A של שני משיקים חיצוניים לזוג מעגלים נוכל לקבל ע"י הע-ברתם של רדיוסים מקבילים בשני מעגלים r_1 r_2 וחבור נקודות הפגישה





של הרדיוסים עם היקף
המעגלים, הישר $P_1\ P_2$
יחתוך את הציר המחבר
את מרכזי המעגלים
$O_1\ O_2$ בנקודה המבו-
קשת A. נעביר איפוא
שלושה רדיוסים -וק-
טורים בכוון כל שהוא,
אך מקבילים זה לזה.
בשלושת המעגלים, ונקבל
על הקפיהם שלוש נקודות D_1, D_2, D_3 .

לפנינו שני משולשים $O_1\ O_2\ O_3$ ו- $D_1\ D_2\ D_3$, הקוים המחברים את קדקדיהם המתאימים נפגשים בנקודה אחת (אידאלית), כי $O_1D_1 \parallel O_2D_2 \parallel O_3D_3$ וקובעים קו דזרג, כלומר הצלעות המתאימות של שני המשולשים נפגשות בשלוש נקודות על ישר אחד.



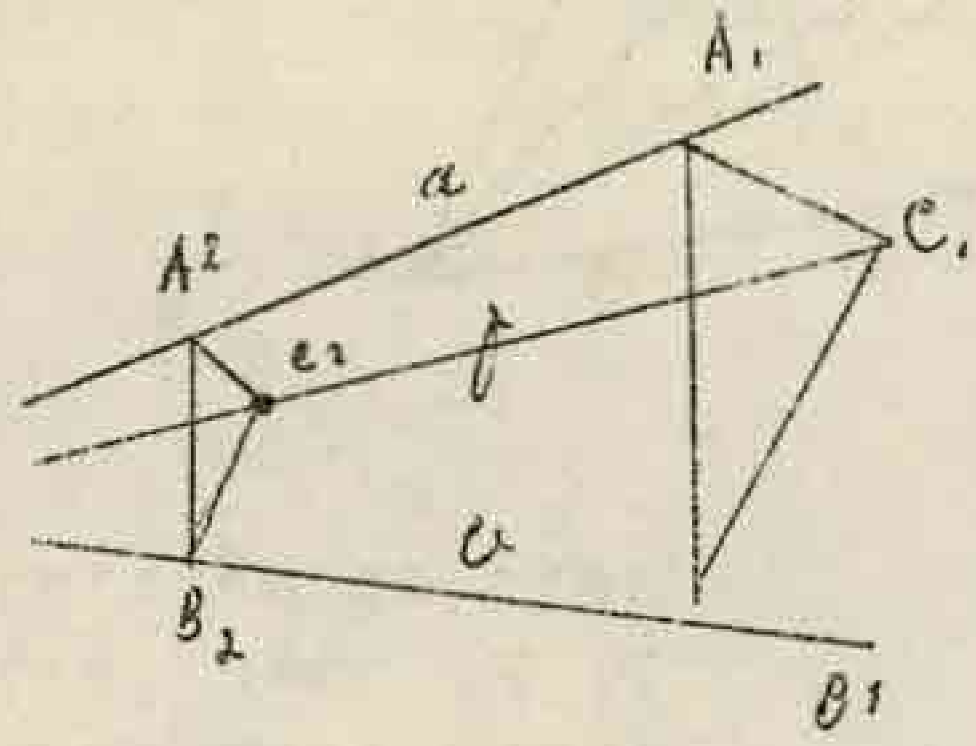
הצלע $O_1\ O_2$ נפגשת עם הצלע D_1D_2 בנקודה A
$O_2\ O_3$ נפגשת עם D_2D_3 בנקודה B
$O_3\ O_1$ נפגשת עם D_3D_1 בנקודה C
והנקודות ABC חייבות להמצא
על ישר אחד, בהתאם למשפטו
של דזרג.

ג) שאלת בניה.

אם לפנינו הבעיה להעביר דרך נקודה C_1 ישר c, אשר צריך לעבור דרך נקודת החתך של שני ישרים a ו- b שנקודת החתוך שלהם O נמצאת מחוץ לגליון השרטוט, נוכל לפתרה בעזרת משפטו של דזרג.

1) נסמן ישר כלשהו ונכנה אותו d, והוא ישמש קו דזרג. נעביר שני ישרים כל שהם, m_1 ו- m_2 הנחתכים על קו דזרג בנקודה P וחותכים את a ו- b בנקודות A_1 B_1 ו- A_2 B_2 נעביר ישר A_1 C_1 אשר יחתוך את d ב- Q וקו QA_2. נעביר ישר OB_1 אשר יחתוך את d בנקודה R וקו RB_2, אשר יחתוך את הקו QA_2 בנקודה המבוקשת C_2. הקו C_2C_1 הוא הישר c המבוקש.

2) הבעיה נתנת לפתירה ונוכל לפותרה גם בדרך אחרת ע"י קביעתו של קו דזרג d כקו אידאלי (אין-סופי). לשם כך נעביר קוים מקבילים:



$$A_2B_2 \parallel A_1B_1$$
$$A_2C_2 \parallel A_1C_1$$
$$C_2B_2 \parallel C_1B_1$$

בדרך זו מתקבלת הנקודה המבוקשת C_2 והקו המבוקש c, המחבר את C_1 עם C_2.

<u>נעבור כעת למרחב.</u>

משפטו של דזרג במרחב.

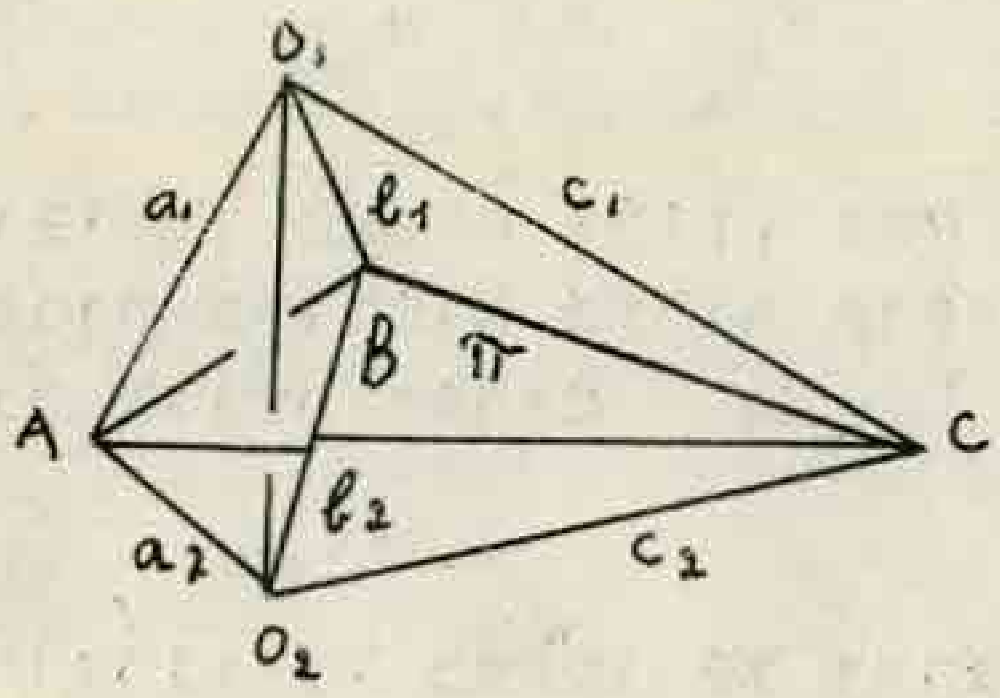
כבר הזכרנו את המקרה המרחבי (שהוא אף פשוט יותר מאשר במישור) בו מצבם של שני המשולשים במרחב הוא כזה שהקוים המחברים את הנקודות המתאימות של שני המשולשים נחתכים בנקודה אחת, למצב כזה במרחב או במישור קוראים אנו גם מצב פרספקטיבי.

להכללת המשפט במרחב נוכל להעזר בתכונת הדואליות של צורות דסקריפטיביות במרחב, המקנה לאלמנטים האידיאליים זכויות שוות עם האלמנטים הממשיים. נוכל לומר שכל שני מישורים קובעים ישר אחד (ממשי או אידאלי); לעומת זאת לא נוכל לומר ששני ישרים במרחב קובעים תמיד נקודה כפי שאמרנו זאת ביחס למישור, משום ששני ישרים במרחב יכולים להצטלב. האלמנטים הדואליים במרחב הם הנקודות והמישורים, ונוכל תמיד להחליף בכל משפט דסקרפטיבי את הנקודה במישור ואת המישור בנקודה. כך, לדוגמה שלוש הנקודות אשר אינן נמצאות על ישר אחד קובעות מישור, והמשפט הדואלי הוא שלושה מישורים אשר אינם עוברים דרך ישר אחד קובעים נקודה. ישר

ומישור שאינם מתלכדים קובעים נקודה – ישר ונקודה אשר אינם מת-
לכדים קובעים מישור.

מהו איפוא המשפט הדואלי למשפטו של דזרג במרחב אותו
הגדרנו מקודם?

במקום זוג משולשים במרחב נקבל זוג פינות משולשות, כי
במקום שלוש נקודות במישור אחד מתקבלים שלושה מישורים במרחב
העוברים דרך נקודה אחת. במקום ההגדרה שזוג המשולשים הוא במצב
פרספקטיבי, כלומר שהקוים המחברים את הקדקדים המתאימים נפגשים
בנקודה אחת O, נאמר שזוג הפינות המשולשות יוצר שלושה ישרים
הנמצאים במישור אחד . כלומר שלפינות המשולשות בסיס משותף.
לפנינו אפוא דו-פירמידה משולשת. קו דזרג כאן הוא הקו המחבר את
קדקדיהן של הפינות המשולשות. דרך קו זה עוברים שלושה מישורים
הנקבעים ע"י שלושה זוגות המקצועות של הפינות המשולשות.
הסמון הוא כדלקמן:



נתונה פינה משולשת $a_1\ b_1\ c_1$ בעלת קדקד O_1 ופינה משולשת
שניה $a_2\ b_2\ c_2$ בעלת קדקד O_2. זוג הפינות יוצר משולש
משותף – המקצוע a_1 נחתך עם המקצוע a_2 בנקודה A
" b_1 " " " b_2 " B
" c_1 " " " c_2 " C

$O_1\ O_2$ הוא קו דזרג שדרכו עוברים שלושה מישורים המתקבלים
משלושה זוגות של מקצועות מתאימים של שתי הפינות:

המישור $a_1\ a_2$	הינו המישור	$O_1 A O_2$	שלושת המישורים עוברים
" $b_1\ b_2$	" "	$O_1 B O_2$	דרך קו דזרג O_1O_2 – d
" $c_1\ c_2$	" "	$O_1 C O_2$	

הרחבה נוספת תתקבל אם נשאל מהו משפטו של דזרג במרחב,
הדואלי למצבם של זוג משולשים במרחב היוצרים קו משותף d וקובעים
נקודה משותפת O. התשובה היא, שזוג פינות מרחביות, שהמישורים
המתקבלים מזוגות מקצועותיהן המתאימים עוברים דרך ישר אחד d
(הוא $O_1\ O_2$) וזוג זה של הפנות קובע שלושה ישרים הנמצאים
במישור אחד – מתקבל המשולש A B C .

עוד הרחבה במרחב מתקבלת ישר ממשפטו של דזרג במישור.
במקום זוג משולשים במישור אחד, במצב פרספקטיבי, נוכל להגדיר

זוג פינות משולשות בעלות קדקד משותף O שקוי החתוך הנקבעים ע"י מישוריהן המתאימים של שתי הפינות נמצאים במישור אחד. הסמון הוא כדלקמן:

מצבן של פינה $Oa_1 b_1 c_1$ ופינה $Oa_2\ b_2 c_2$ בעלות קדקד משותף O הוא כזה:

שהמישור $oa_1 b_1$ חותך את המישור $oa_2 b_2$ בקו l_1 העובר דרך O
" $ob_1 c_1$ " " " $ob_2 c_2$ " l_2 " " O
" $oc_1 a_1$ " " " $oc_2 a_2$ " l_3 " " O

שלושת הישרים $l_1\ l_2\ l_3$ נמצאים במישור אחד העובר דרך O, והמקצועות המתאימים של שתי הפינות קובעים שלושה מישורים העוברים דרך ישר אחד d כגון:

המקצועות	$a_1 a_2$	קובעים את המישור	α
"	$b_1 b_2$	" " "	β
"	$c_1 c_2$	" " "	γ

המישורים , ו- קובעים הישר , הוא קו דזרג

גם הפוכו של המשפט נכון, כשם שנכון הפוכו במישור, דהיינו שזוג פנות משולשות בעלות קדקד משותף O הקובע את קו דזרג d קובע גם שלושה ישרים $l_1\ l_2$ ו- l_3 הנמצאים במישור אחד.

עד כה דברנו על משפטו של דזרג המוסב על זוג משולשים במישור או במרחב או על זוג פינות משולשות, אולם אפשר להרחיבו עוד יותר (את המשפט) ולהסבו על זוג ארבעונים (פירמידות משולשות) כדלקמן: אם זוג ארבעונים נמצא במצב פרספקטיבי, כלומר שהישרים המחברים את ארבעת זוגות הקדקדים המתאימים של שני הארבעונים נפגשים בנקודה אחת O כי אז ארבעת זוגות הדפנות המתאימות של הארבעונים נחתכים לפי ארבעה ישרים, הנמצאים במישור אחד, ובמישור זה נמצאות גם שש נקודות-החתוך של המקצועות המתאימים של הארבעונים. מישור משותף זה הוא מישור דזרג.

הסמון הוא כדלקמן: הארבעונים הנתונים הם $A_1B_1C_1D_1$ ו- $A_2B_2C_2D_2$ היות ומצבם פרספקטיבי הוא שהישרים A_1A_2; $B_1\ B_2$; $C_1\ C_2$ ו- $D_1\ D_2$ נחתכים בנקודה אחת O, הרי לפנינו ארבעה משולשים הנמצאים במצב פרספקטיבי אף הם, ומתקבלים ארבעה קוי דזרג כשעל כל אחד מהם נמצאות נקודות החתוך של הצלעות המתאימות של המשולשים המתאימים. כגון המשולשים: $A_1\ B_1\ C_1$ ו- $A_2\ B_2\ C_2$ קובעים ישר d_1 ועליו נקודות החתוך של המקצועות:

$\underbrace{A_2 B_2 \quad A_1 B_1}_{P_1}$; $\underbrace{B_2 C_2 \quad B_1 C_1}_{P_2}$; $\underbrace{C_2 A_2 \quad C_1 A_1}_{P_3}$

המשולשים $B_1\ C_1\ D_1$ ו- $B_2\ C_2\ D_2$ יוצרים ישר d_2 ועליו נמצאות הנקודות המתקבלות מחתוך המקצועות:

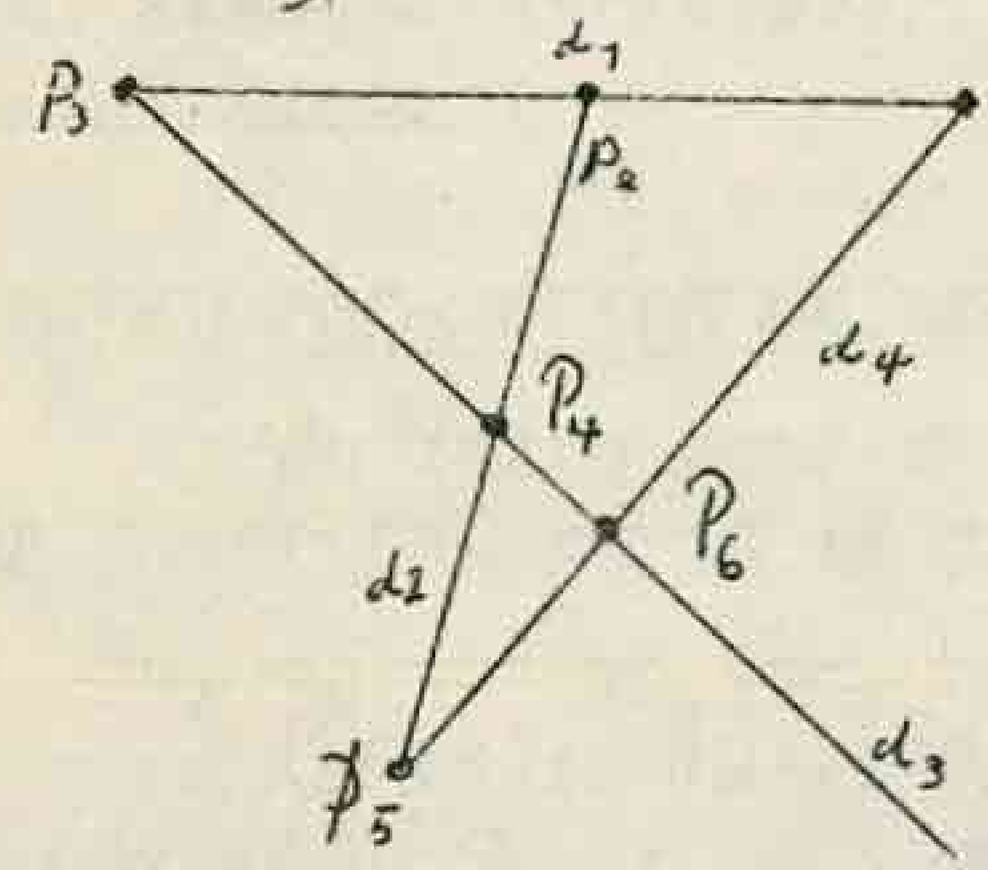
$\underbrace{B_2 C_2 \quad B_1 C_1}_{P_2}$; $\underbrace{C_2 D_2 \quad C_1 D_1}_{P_4}$; $\underbrace{B_2 D_2 \quad D_1 B_1}_{P_5}$

המשולשים $C_1 D_1 A_1$ ו- $C_2 D_2 A_2$ יוצרים ישר d_3 ועליו הנקודות המתקבלות מחתוך המקצועות:

$$\underbrace{A_2 C_2 \quad A_1 C_1}_{P_3} \; ; \; \underbrace{D_2 A_2 \quad D_1 A_1}_{P_6} ; \; \underbrace{C_2 D_2 \quad C_1 D_1}_{P_4}$$

המשולשים $D_1 A_1 B_1$ ו- $D_2 A_2 B_2$ יוצרים ישר d_4 ועליו הנקודות המתקבלות מחתוך המקצועות:

$$\underbrace{B_2 D_2 \quad B_1 D_1}_{P_5} ; \; \underbrace{A_2 B_2 \quad A_1 B_1}_{P_1} ; \; \underbrace{D_2 A_2 \quad D_1 A_1}_{P_6}$$



מתקבלות איפוא שש נקודות:

$P_6\ P_5\ P_4\ P_3\ P_2\ P_1$

וארבעה ישרים $d_4\ d_3\ d_2\ d_1$ העוברים דרכן ונחתכים הדדית. כל ישר חותך שלושה ישרים אחרים, ומכאן שארבעתם נמצאים במישור אחד, הוא המישור של דזרג.

גם למשפט זה אפשר להתאים משפט דואלי, כלומר כשם שזוג ארבעונים קובע נקודה O וגם מישור דזרג, כך יתכן שזוג ארבעונים יקבע מישור דזרג וגם נקודה משותפת O.

נשתמש כאן במשפטו של דזרג במרחב לפתירתה של שאלה שניה שהוצגה בתחרות הטכניון שהוזכרה לעיל והיא: נתונים ארבעה כדורים בעלי רדיוסים שונים שמרכזיהם אינם במישור אחד ושום כדור אינו נמצא בתוך כדור שני, אם בונים ששה קונוסים שכל אחד משיק לשני כדורים, הרי קדקדי ששת הקונוסים צריכים תמיד להמצא במישור אחד.

גם שאלה זו אפשר לפתור בעזרת משפטו של דזרג במרחב. יהיו מרכזי ארבעת הכדורים $O_1\ O_2\ O_3$ ו-O_4, ואם נעביר בכל אחד מהם רדיוס-וקטור באפן שכל הרדיוסים יהיו מקבילים זה לזה ויפגעו בפני הכדורים בנקודות $A_1\ A_2\ A_3$ ו- A_4,
יתקבלו הקדקדים של חרוטי ההשקה לזוגות הכדורים בנקודות החתוך

של הציר $O_1\ O_2$ עם הישר $A_1\ A_2$ בקדקד
" " $O_2\ O_3$ " $A_2\ A_3$ "
" " $O_3\ O_4$ " $A_3\ A_4$ "
" " $O_4\ C_5$ " $A_4\ A_5$ "
" " $O_5\ O_6$ " $A_5\ A_6$ "
" " $O_6\ O_1$ " $A_6\ A_1$ "

עלינו להוכיח אפוא שכל הקדקדים נמצאים במישור אחד.

לפנינו שני ארבעונים הנמצאים במצב פרספקטיבי (בין ישרים מקבילים) והם קובעים אפוא את המישור של דזרג, שבו נמצאות נקודות החתוך של ששת זוגות המקצועות המתאימים של שני הארבעונים והם קדקדי-החרוטים המבוקשים.

על הצגת המספרים השלמים האי-שליליים

מאת י. שונהיים

1. מבוא.

במאמר זה נדון בבעיות של הצגת המספרים בשיטות שונות, מעבר משיטה אחת לשניה ובצוע פעולות חשבון בשיטות הצגה שונות.

נשתמש במלה "להציג", המקובלת בשפה המדעית, במקום המלים: לכתוב, לבטא או להביע מספר. לשם קצור תבוא המלה מספר במקום מספר שלם אי-שלילי.

2. אפשרות וחד-ערכיות של הצגת המספרים בשיטה העשרונית.

השיטה להצגת מספרים המקובלת בחיים היום-יומיים היא השיטה העשרונית. בשיטה זו תפקיד מיוחד לשתי קבוצות מספרים והן:

א. החזקות של עשר. הצגתם:
$1(=10^0)$, 10^1, 10^2, 10^3,...

ב. המספרים הקטנים מעשר. הצגתם:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

קבוצה (א) נקראת: בסיס השיטה ואילו המספרים של קבוצה (ב) נקראים: ספרות.

כדי להציג בשיטה העשרונית מספר (לאו דוקא חזקה של עשר או ספרה) משתמשים בפעולות החיבור והכפל. מכפילים איברים אחדים של הבסיס בספרות ומחברים את המכפלות. לדוגמא, נכפיל את המספרים 1, 10, 10^2, 10^3, שהם איברים מהבסיס, בספרות 9, 1, 6, 7 בהתאמה נקבל את המספר N, שהצגתו:

$$7.10^3 + 6.10^2 + 1.10 + 9.1. \qquad (1)$$

בדרך כלל נאמר שהמספר N ניתן להצגה בשיטה העשרונית, אם אפשר לכתוב אותו בצורה

$$N = a_n 10^n + \ldots + a_1.10 + a_0 \qquad (2)$$

כאשר $a_n, \ldots, a_1, a_0$ הם ספרות.

הסימון המקוצר והמקובל של ההצגה (2) הוא $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ בסימון זה ההצגה של 10^i היא 100...00 (אפסים i).

ברור שאפשר להציג הרבה מספרים בשיטה העשרונית. נשאלת השאלה האם אפשר להציג כל מספר באותה שיטה? את התשובה יתן

משפט I. כל מספר ניתן להצגה בשיטה העשרונית.

לפני שנכנס לפרטי ההוכחה נדגיש שחלק מחוקי החשבון אינו תלוי בהצגת המספרים. כגון: חוק החילוף, חוק הקיבוץ, חוק הפילוג, או שהשארית בחילוק קטנה מהמחלק והשארית והמנה נקבעות באופן חד-ערכי;כן לא תלוי בהצגת המספרים העקרון של האינדוקציה השלמה. לכן, מותר לנו להסתמך בהוכחות הבאות על החוקים האלה.

משפט עזר: <u>אם הצגת המספר M היא $9\cdot10^{R-1} + 9\cdot10^{R-2} + \dots + 9$ אז הצגת המספר M+1 היא 10^R.</u>

הוכחת משפט העזר: (בדרך האינדוקציה השלמה לפי R). אם R=1 , 9+1=10, היות ו-9 המספר הגדול ביותר הקטן מעשר. נניח שהטענה נכונה עבור $R = l$, כלומר ש- $(9\cdot10^{l-1}+\dots+9)+1=10^l$. אז עבור $R = l+1$, נובע:

$$(9\cdot10^l+9\cdot10^{l-1}+ \dots +9)+1 = 9\cdot10^l+(9\cdot10^{l-1}+ \dots+9+1)$$
$$= 9\cdot10^l+10^l = (9+1)10^l = 10^{l+1}.$$

מש"ל.

הוכחת משפט I. (בדרך האינדוקציה השלמה לפי N) עבור N=0 המשפט נכון, כיון שהצגת המספר אפס הספרה 0. נניח שהוא נכון עבור N=M והצגת M היא $a_m10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \dots a_1 10 + a_0$

נסמן ב- a_R את הספרה הראשונה מימין ששונה מ-9. אם כל הספרות שוות ל-9, נוסיף עוד ספרה $a_{m+1}=0$. נובע על סמך משפט העזר הנ"ל ועל סמך חוקי הקיבוץ והפילוג ש-

$$\begin{aligned} M + 1 &= (a_m10^m + \dots + a_R10^R + 9\cdot10^{R-1} + \dots + 9) + 1 = \\ &= (a_m10^m + \dots + a_m10^R) + (9\cdot10^{R-1} + \dots + 9 + 1 = \\ &= (a_m10^m + \dots + a_R10^R) + 10 = \\ &= (a_m10^m + \dots + a_{R+1}10^{R+1}) + (a_R10^R + 10^R) = \\ &= a_m10^m + \dots + a_{R+1}10^{R+1} + (a_R+1)\,10^R \end{aligned}$$

זאת הצגת M+1 בשיטה העשרונית היות ו- $a_R + 1 < 10$.

אפשרות ההצגה של כל מספר היא לא עובדה טריביאלית. מדובר כאן על הצגה במספר סופי של ספרות. אפשרות כזאת לא קיימת עבור הצגת <u>שברים</u> בשיטה העשרונית. להצגת שברים כגון $1/3$ דרוש מספר אין סופי של ספרות. אכן, $1/3 = 0,333\dots$.

משפט II. <u>אם</u>

$$(3) \qquad a_m10^m + \dots + a_1 10 + a_0$$
$$(4) \qquad b_n10^n + \dots + b_1 10 + b_0$$

<u>הצגות של אותו מספר N ואם $a_m \neq 0 \neq b_n$ אז $m = n$ ו- $a_i = b_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).</u>

המשפט הזה מביע את העובדה שהצגת מספר (שהיא תמיד אפשרית

לפי משפט I) היא חד-ערכית, פרט לאפסים שאפשר להוסיף לפני הספרה הראשונה. לדוגמה ההצגות של המספר 342 הן 342, 0342, 0...342 בלבד.

הוכחת משפט II. כדי להוכיח ש-$n = m$ נעיר שאם $n < m$ אז לפי (4) הערך של N קטן מ- 10^{n+1} ולפי (3) גדול או שווה 10^m, $10^{n+1} \geq 10^m$ וזאת סתירה. כדי להוכיח את החלק השני של המשפט, כלומר ש-$a_i = b_i$, נכתוב את הבטויים (3) ו-(4) בצורה:

$$(5)\ [\dots\{[(a_n 10 + a_{n-1})10 + a_{n-2}]10 + a_{n-3}\}10 + \dots + a_1]10 + a_0$$

$$(6)\ [\dots\{[(b_n 10 + b_{n-1})10 + b_{n-2}]10 + b_{n-3}\}10 + \dots + b_1]10 + b_0$$

מההצגות (5) ו- (6) של המספר N מתברר ש- b_0 ו- a_0 הם שאריות של N בחילוק ל-10. כי בהצגה (5) N מופיע כסכום של כפולה של עשר ושל a_0 וכמו כן בהצגה (6) N הוא סכום של כפולה של עשר ושל b_0. אבל b_0 ו- a_0 הם ספרות, כלומר קטנים מעשר. לכן $b_0 = a_0$. באותו אופן b_1 ו- a_1 הם שאריות של $\frac{1}{10}(N-a_0)$ (הבטוי הזה הוא מספר!) בחילוק לעשר. לכן $a_1=b_1$. בדרך כלל b_i ו- a_i שאריות של $\frac{1}{10^i}(N-a_0 - \dots - a_{i-1}10^{i-1})$ (בטוי שהוא מספר) בחילוק ל- 10. לכן, $a_i=b_i$.

חד ערכיות הצגת המספרים שהוכחנו כעת, אינה מובנת מאליה. אכן, בהצגת השברים היא לא קימת. לדוגמא השבר $\frac{14}{100} = 0.1400\dots$ ניתן להצגה שניה $\frac{14}{100} = 0.13999\dots$.

במשפטים I ו- II ראינו שאפשר להציג כל מספר בשיטה העשרונית באופן אחד. נשאלת השאלה כיצד להגיע להצגת המספר N .

אפשרות אחת היא, לעקוב אחרי הצעדים שבהוכחת משפט I , כלומר להתחיל בהצגת המספרים 0, 1, 2, להוסיף בכל צעד 1 ולהמשיך עד שנגיע להצגת המספר N . זוהי, למעשה, ספירה בשיטה העשרונית.

אפשרות אחרת נובעת מהצורה (5) של הצגת המספר N . כפי שראינו בהוכחת משפט II הספרות $a_0, a_1, \dots, a_n$ הן שאריות שמתקבלות בשרשרת חילוקים ל-10. לפי התהליך הזה נחלק את a_0 ל-10. השארית הראשונה היא a_0 . נחלק את המנה ל-10 ונקבל בחילוק זה שארית שניה היא a_1 . וכך נקבל את כל הספרות.

לאור דוגמא הסתכלותית נבין איך מספר N יכול להיות נתון בלי להכיר את הצגתו העשרונית וכיצד נוכל להגיע לזאת.

לפני קופאי שקית מלאה אגורות בודדות ועליו לקבל את מספר המטבעות N , מוצג בשיטה העשרונית. במקרה שלפנינו המספר N מוצג על ידי אוסף מטבעות. לפי הדרך הראשונה הקופאי יכול לספור את המטבעות. לפי הדרך השניה יקבץ את המטבעות לקבוצות של 10. (חילוק

ל-10!) מספר המטבעות שישארו בלי להצטרף לקבוצה מלאה (השארית בחילוק) יהיה מספר קטן מעשר ולכן אפשר לסמן אותו באחת הספרות. נניח a_o. כדי לקבל את הספרה הבאה מימין לשמאל שוב יקבץ הקופאי את הקבוצות המלאות (המנה בחילוק) לאגודות של עשר. מספר הקבוצות המלאות שישארו בלי להצטרף לאגודה מלאה (שארית שניה) הוא קטן מעשר ואפשר לסמן אותו ב- a_1 , a_1 ספרה. כך יקבל את כל הספרות. (שרשרת חילוקים).

3. שיטות הצגה לפי בסיס b .

באותה מידה שהחזקות של 10 שמשו כבסיס והמספרים הקטנים מעשר כספרות בשיטה העשרונית, יכולות לשמש החזקות של מספר b, $b > 1$ כל שהוא כבסיס והמספרים הקטנים מ- b כספרות.

נאמר שהמספר N מוצג בשיטה לפי בסיס b , אם הוא כתוב בצורה

$$N=a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_o \tag{7}$$

$$(i = o, \dots, n) \quad , \quad o \le a_i \le b-1$$

נסמן, כפי שנהוג בשיטה העשרונית, את הצגת (7) של N רק בעזרת ספרותיו ב- $N = a_na_{n-1} \dots a_o \, (b)$

לפי הסימון הזה הצגתו של b תהיה $10_{(b)}$. הסימון $a_na_{n-1} \dots a_o$ (בלי מציין b) יסמן גם בהמשך הצגה בשיטה עשרונית.

נסמן את הספרות שאינן גדולות מ-9 בסמלים מהשיטה העשרונית. את הספרות הגדולות מ-9 נסמן בסמלים נוספים כגון: A,B,C .

שקולים דומים לאלה שהשתמשנו בהם כדי להוכיח אפשרות וחד-ערכיות הצגת המספרים בשיטה העשרונית יהיו נכונים לגבי השיטה לפי בסיס b .

נציג כעת כמה בעיות מעשיות.

בעיה א.1. (מעבר מהשיטה העשרונית לשיטה לפי בסיס b והמעבר ההפוך).

כתב את המספר 7619 בשיטה לפי בסיס , כאשר $b = 8$.

פתרון. כדי להציג את המספר 7619 בצורה

$$7619 = a_n8^n + a_{n-1}8^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 8 + a_o \tag{8}$$

$$a_i \le 7 \qquad i = 0,1, \dots , n$$

נשים לב לעובדה שהאגף הימני של (8) שוה ל-

$$\left\{\left[\left[\ldots\left[8+a_{n-1}\right)8+a_{n-2}\right]8+\ldots+a_2\right]8+a_1\right\}8+a_0$$

לכן, כדי לקבל את הספרות a_i צריך לבצע שרשרת חילוקים ל-8.
(הדרך השניה לקבלת הצגת מספר או, התהליך השני של הקופאי!) נסדר את הפעולות כדלקמן:

מחלק	8	8	8	8	8	
מנה ומחולק	0	1	14	119	952	7619
שארית	1	6	7	0	3	

תשובה: $7619 = 16703(8)$.
בדיקה: $16703(8) = 1.8^4+6.8^3+7.8^2+0.8+3=7619$

בעיה ב.1. כתב את כל המספרים מ-0 עד 20 בשיטה לפי בסיס 8.

תשובה: 0(8) ,1(8) ,2(8) ,3(8) ,4(8) ,5(8) ,6(8) ,7(8) ,10(8) ,11(8) ,12(8) ,13(8) ,14(8) ,15(8) ,16(8) ,17(8) ,20(8) ,21(8) ,22(8) ,23(8) ,24(8).

בעיה ג.1. כתב את המספר 16703(8) בשיטה העשרונית.

פתרון: ראה בדיקת בעיה 1. פתרון שני ינתן מאוחר יותר.

בהתרת הבעיות הבאות ננצל את העובדה שכללי בצוע פעולות החשבון נובעים מהצורה (7) של הצגת המספרים ולא תלוים בערכו של b. כלומר, נבצע את הפעולות בשיטה על בסיס b כדוגמת הפעולות בשיטה העשרונית. לשם כך צריכים להכיר את לוח החיבור והכפל, כמו בשיטה העשרונית. לדוגמה: לפי בסיס 8, לוחות החיבור והכפל הם:

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

לשם פשטות לא כתבנו פה את המציין 8.

בעיה 2. חשב: $137(8) + 253(8)$.

פתרון: נכתב את שני המספרים אחד תחת השני כמו בשיטה העשרונית.

$$\begin{array}{r} 137(8) \\ +\,253(8) \\ \hline 412(8) \end{array}$$

נחבר $3(8)+7(8)=12(8)$, לפי לוח החיבור, כותבים 2 נשאר 1; $1(8)+5(8)+3(8) = (1(8)+5(8))+3(8) = 6(8)+3(8)=11(8)$, לפי אותו לוח, כותבים 1 נשאר 1; $1(8)+2(8)+1(8)=(1(8)+2(8))+1(8)=3(8)+1(8)=4(8)$, כותבים $4(8)$.

תשובה: $412(8)$

בדיקה:

$$137(8) = 1.64+3.8+7 = 95$$
$$253(8) = 2.64+5.8+3 = 171$$
$$412(8) = 4.64+1.8+2 = 266 = 95+171$$

בעיה 3. חשב: $27(8) \times 35(8)$.

פתרון: נסדר את שני הגורמים אחד תחת השני כמו בשיטה העשרונית.

$$\begin{array}{r} 27(8) \\ \times\,35(8) \\ \hline 163(8) \\ 105(8) \\ \hline 1233(8) \end{array}$$

נכפיל $5(8)\times7(8)=43(8)$, לפי לוח הכפל. כותבים 3, נשאר 4; $5(8)\times2(8)=12(8)$, לפי אותו לוח. $12(8)+4(8)=16(8)$, כותבים 16. נעבור לספרה השניה של הכופל. $3(8)\times7(8)=25(8)$ שוב לפי הלוח, כותבים 5, נשאר 2; $3(8)\times2(8)=6(8)$; $6(8)+2(8)=10(8)$ כותבים 10. נחבר: 3, כותבים 3. $5(8)+6(8)=13(8)$, לפי לוח החיבור. כותבים 3, נשאר 1. $1+1=2$, כותבים 2. 1, כותבים 1.

תשובה: $1233(8)$

בדיקה:

$$27(8) = 2.8 + 7 = 23$$
$$35(8) = 3.8 + 5 = 29$$
$$1233(8) = 1.512+2.64+3.8+3 = 667 = 23\times29.$$

בעיה 4. (לעבודה עצמית). a.) כתב את המספרים מ-0 עד 10 בשיטה לפי בסיס 3. b) בנה לוח חיבור וכפל לפי בסיס 3. c) חשב סכום ומכפלת המספרים $21(3)$ ו-$12(3)$. בדק על-ידי העתקה לשיטה העשרונית. d) כתב את המספר 100 לפי בסיס 3.

בעיה 5. חשב $23A(11) + 3A5(11)$, כאשר $A(11) = 10$.

פתרון: לוח החיבור על בסיס 11 הוא (בלי לכתב את המציין 11):

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	10
2	3	4	5	6	7	8	9	A	10	11
3	4	5	6	7	8	9	A	10	11	12
4	5	6	7	8	9	A	10	11	12	13
5	6	7	8	9	A	10	11	12	13	14
6	7	8	9	A	10	11	12	13	14	15
7	8	9	A	10	11	12	13	14	15	16
8	9	A	10	11	12	13	14	15	16	17
9	A	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

נסדר את הפעולה כרגיל:

$$\begin{array}{r} 3A5(11) \\ +\ \underline{23A(11)} \\ 634(11) \end{array}$$

נחבר $A(11)+5(11)=14(11)$, לפי לוח החיבור, כותבים 4 נשאר 1; $1(11)+3(11)+A(11)=(1+3)11+A(11)=4(11)+A(11)=13(11)$,
כותבים 3 נשאר 1; $1(11)+2(11)+3(11)=6(11)$.

תשובה: $634(11)$.

בעיה 5. חשב: $2465(8):37(8)$.

פתרון: כמו בשיטה העשרונית.

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{\ \ 53(8)} \\ \hline 2465(8) & 37(8) \\ \underline{233} & \\ \ \ 135 & \\ \ \ \underline{135} & \\ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

כדי לקבל את הספרה הראשונה של המנה מעגלים 37 ל-40 ולוח הכפל מראה ש- $24(8):4(8)=5(8)$, מבצעים $37(8)\times5(8)$ ומחסרים $246(8)-233(8)$, מורידים את הספרה הבאה 5 וכו'.

נחזור לבעיה ג1: למצא את ההצגה העשרונית של המספר $16703(8)$. ראינו כבר דרך אחת למצא את הפתרון בשיטה העשרונית. נראה דרך שניה בשיטה לפי בסיס 8. חשיבות הדבר תתברר בדוגמא הבאה:

נניח שמכונת חישוב פועלה לפי בסיס 8 וקבלנו תוצאה לאחר חישובים מסויימים את המספר (8)16703. במהלך החישובים לא משנה לנו השיטה בה עובדת המכונה, אבל התוצאה דרושה לנו בשיטה העשרונית. מפתיע הדבר שאפשר לבצע את המעבר במכונה עצמה הפועלת בשיטה לפי בסיס 8. נקבלו בעזרת שרשרת חילוקים ב-10. (תהליך הקופאי!) אבל 10=(8)12. שרשרת החילוקים היא:

	12(8)	12(8)	12(8)	12(8)
16703(8)	1371(8)	114(8)	7(8)	0
12(8)	12	106	7(8)=7	
47(8)	17	6(8)=6		
36(8)	12			
110(8)	51			
106(8)	50			
23(8)	1(8)=1			
12(8)				
11(8)=9				

תשובה: 7619.

4. השיטה הבינרית.

שיטה בעלת חשיבות רבה היא השיטה הבינרית. כלומר השיטה לפי בסיס 2. חשיבותה המיוחדת נובעת מהעובדה שבשיטה זו שתי ספרות בלבד: 0 ו-1. אפשר לנצל את הפשטות הזאת להוכיח משפטים שונים במתמטיקה גבוהה. אותה עובדה מנוצלת במחשבים אלקטרוניים. הם בנויים על עקרון הצגת המספרים בשיטה הבינרית. במחשבים אלקטרוניים מציגים את המספרים במנורות. מנורה כבויה מסמלת את הספרה 0, מנורה דולקת את הספרה 1. בשיטה בינרית אין צורך ביותר מצבים של המנורה.

בעיה 6. כתב את המספרים מ-1 עד 13 בשיטה הבינרית ושרטט את הצגתם במנורות עם הסימון   למנורה דולקת ו-   למנורה כבויה.

פתרון:

	הצגה בינרית	הצגה טכנית
1	1	O
2	10	O●
3	11	OO
4	100	O●●
5	101	O●O
6	110	OO●
7	111	OOO
8	1000	O●●●
9	1001	O●●O
10	1010	O●O●
11	1011	O●OO
12	1100	OO●●
13	1101	OO●O

בעיה 7. כתב בשיטה הבינרית את המספר 37.

פתרון: כדוגמת הפתרון לבעיה 1:

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 37 & 18 & 9 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

תשובה: $37 = 100101(2)$

בדיקה: $100101(2) = 2^5+2^2+1 = 37$

בעיה 8. לחשב: $100101(2) \times 11010(2)$

פתרון:

$$\begin{array}{r} 100101(2) \times \\ \underline{11010(2)} \\ 1001010 \\ 100101 \\ \underline{100101} \\ 1111000010(2) \end{array}$$

אין הבדל עקרוני בין הפעולה הזאת ובין פעולה דומה בשיטה אחרת. נציין רק שתי עובדות. אין צורך בלוח הכפל בגלל ש $0 \cdot a = 0$ $1 \cdot a = a$ בכל שיטה. כדי לבצע את הכפל מספיק להעתיק מספר פעמים את המוכפל למקום מתאים.

בעיה 9. לחשב: $110010(2) : 1010(2)$

פתרון:

$$\begin{array}{rl} \underline{101} & \\ 110010 & 1010(2) \\ \underline{1010} & \\ 101 & \\ \underline{000} & \\ 1010 & \\ \underline{1010} & \\ 0 & \end{array}$$

אין הבדל עקרוני בין החילוק הנ"ל ובין הפתרון לבעיה 5. נעיר רק שכל פעם שצריכים לקבוע ספרה במנה יש רק להשוות את המחלק במחולק. אם המחלק גדול או שווה למחולק הספרה במנה היא 1, אם המחלק קטן מהמחולק הספרה במנה היא 0. ז"א אין לעגל ולהעריך את הספרה כמו ביתר השיטות.

נסיים את החלק הראשון של מאמר זה בדוגמה כיצד אפשר לבצע הוצאת שורש בשיטה הבינרית.

בעיה 10. חשב: $\sqrt{1011011001(2)}$

פתרון:

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{1011011001} & 11011 \\
\underline{1} & \\
111 & 101 \\
\underline{101} & \\
1001 & 110 \\
\underline{0000} & \\
100110 & 11001 \\
\underline{11001} & \\
110101 & 11010 \\
\underline{110101} &
\end{array}
$$

הפתרון כמו בשיטה העשרונית. יש לשים לב לשני דברים.
א) הכפלת התוצאה החלקית נעשתה פה על ידי הוספת 0.
ב) כדי לקבל ספרה מסויימת בתוצאה צריך רק להשוות שני מספרים. לדוגמה כדי לקבל את הספרה השניה בתוצאה הנ"ל משווים 10 ו-11. בגלל ש- $10 < 11$ הספרה הדרושה 1.

המשך בחוברת הבאה.

תכונותיו של סכום שני רבועים שלמים

פרידלנד שמואל
(כתה י"ב בית הספר הריאלי חיפה)

1. ידוע היטב שמכפלת שני מספרים שלמים, שכל אחד מהם ניתן לתאור כסכום שני רבועים, גם היא ניתנת לתיאור כזה.
ובאמת, אם: $A = a^2 + b^2$ ו- $B = c^2 + d^2$ (a,b,c,d שלמים. באופן כללי נקבע שלאורך כל המאמר האותיות מסמנות מספרים שלמים בלבד) הרי:

$$AB = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2 \qquad (1)$$

מתעוררת השאלה, האם נכון גם המשפט ההפוך, כלומר האם מספר שניתן לתאור כסכום של שני רבועים שלמים, אפשר תמיד לרשום כמכפלת שני מספרים שלמים שכל אחד מהם הוא סכום של שני רבועים שלמים?

כפי שאפשר לראות בנקל, התשובה חיובית, כי אם $A = a^2 + b^2$ הרי $A = (a^2 + b^2)(1^2 + 0)$. במקרה של A ראשוני זהו כמובן הפרוק היחיד. במקרים אחרים יכולים גם להיות פרוקים נוספים. להלן דוגמאות מספר:

$65=64+1=49+16$	$65=(4+1)(9+4)$
$170=49+121=169+1$	$170=(9+1)(16+1)=(1+1)(81+4)$
$260=256+4=196+64$	$260=(9+1)(25+1)=(1+1)(121+9)=(16+4)(9+4)$
$3649=3600+49=3249+400$	$3649=(16+25)(64+25)$

תכונות רבות של מספרים הקשורות עם הנ"ל נוכל לברר בהתבסס על המשפט הבא, אשר ישמש כמשפט יסודי במאמר זה.

<u>משפט יסודי:</u> אם ארבעה מספרים טבעיים A,B,p,Q מקיימים את התנאים הבאים: p - מספר ראשוני, $(A;B)=1$ (ז.א. A ו- B מספרים זרים זה לזה) ו-

$$\frac{A^2+B^2}{p} = Q \qquad (2)$$

הרי Q ניתן לתאור כסכום שני רבועים.

לדוגמה: $\frac{3^2+4^2}{5}=5=1^2+2^2$; $\frac{1^2+3^2}{5}=2=1^2+1^2$

$\frac{7^2+60^2}{41}=89=5^2+8^2$; $\frac{7^2+11^2}{17}=10=1^2+3^2$

<u>הוכחת המשפט היסודי:</u>

לצורך ההוכחה נתבונן בסידרת מספרים שתסומן ב- S ושכל אבריה הם מספרים ראשוניים הרשומים בסדר עולה

$$p_1,\ p_2,\ p_3\ \ldots$$

ומקיימים את הדרישה הבאה: עבור כל p_i מהסידרה S קיימים לפחות שני מספרים שלמים, זרים זה לזה, כך שסכום רבועיהם מתחלק ב- p_i בלי שארית. כלומר עבור כל p_i קיימים A_i ו- B_i המקיימים

$(A_i,B_i)=1$ ו- $\frac{A_i^2+B_i^2}{p_i}=Q_i$ כאשר מספר שלם.

2 שייך לסדרה זו: למשל $\frac{3^2+5^2}{2}=17$.

נוכיח ש־3 אינו שייך ל-S. נניח ש- A ו- B שני מספרים זרים זה לזה. נסמן ב- K_A את השארית מחלוק A ב-3 וב- K_B את השארית מחלוק B ב-3. יתכנו רק המקרים $K_A=0,1,2$, $K_B=0,1,2$ פרט למקרה $K_A=0$ ו- $K_B=0$ בבת אחת כי אז A ו- B לא יהיו. זרים זה לזה.

כעת הקורא יוכיח בלי קושי ש- A^2+B^2 מתחלק ב-3, אם ורק אם $K_A^2+K_B^2$ מתחלק ב-3. אבל:

$$0^2+1^2=1;\quad 0^2+2^2=4;\quad 1^2+1^2=2;\quad 1^2+2^2=5;\quad 2^2+2^2=8$$

ואף אחד מהמספרים האלה אינו מתחלק ב-3. מכאן שאין שני מספרים שלמים שסכום רבועיהם מתחלק ב-3, כלומר 3 אינו שייך לסדרה S.

5 כן שייך ל- S ו-7 ו-11 אינם שייכים. (לא נעמוד כאן על הוכחת עובדה זו שתתברר בהמשך כמסקנה מהמשפט היסודי). נעיר עוד ש-5 האברים הראשונים של הסדרה הם 2, 5, 13, 17, 29.

המשפט היסודי מתיחס רק ל-p-ים שעבורם קיים (2), כלומר

ל- p-ים השייכים ל- S. נוכיח אותו עבור p-ים אלה בעזרת אינדוקציה על המספר הסדורי i של p_i בסדרה S.

לגבי $p_1=2$ זה נכון כי אם
$\frac{A_1^2 + B_1^2}{2} = Q_1$ ו- $(A_1 ; B_1) = 1$, הרי A_1 ו- B_1 בהכרח אי זוגיים שניהם, כך ש $\frac{A_1 + B_1}{2}$ ו- $\frac{A_1 - B_1}{2}$ שלמים.
אבל
$$\left(\frac{A_1 + B_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_1 - B_1}{2}\right)^2 = \frac{A_1^2 + B_1^2}{2} = Q_1$$
משצל.

עתה נניח שהמשפט נכון עבור n האברים הראשונים של הסדרה S, כלומר אם $\frac{A_i^2 + B_i^2}{P_i} = Q_i$ הרי $Q_i = a_i^2 + b_i^2$ $(1 \le i \le n)$
ננסה על סמך הנחה זו להוכיח את נכונות המשפט עבור האבר ה- 1 + n של S ז.א. עבור P_{n+1}.

לשם נוחיות הכתיב נסמן $P_{n+1} = P$, $A_{n+1} = A$, $B_{n+1} = B$, $Q_{n+1} = Q$
נתון לנו $(A; B) = 1$, $\frac{A^2 + B^2}{P} = Q$ ועלינו להראות ש- $Q = a^2 + b^2$
מזרות A ו- B נובע שהם אינם מתחלקים בלי שארית ב- p (הסבר!). נסמן $B = m_2p + k_2$ $A = m_1p + k_1$
ונדרוש ש $|K_1| < \frac{P}{2}$, $|K_2| < \frac{P}{2}$
(אם השארית החיובית של חלוק A, לדוגמה, ב-p היא $t > \frac{p}{2}$ נבחר $K_1 = p-t$ ואז K_1 הוא אמנם שלילי אבל מקיים בבירור $|K_1| < \frac{p}{2}$).
נרשום:
$$Q = \frac{A^2+B^2}{p} = \frac{(m_1p+k_1)^2+(m_2p+k_2)^2}{p} = (m_1^2+m_2^2)p+2(m_1k_1+m_2k_2)+\frac{k_1^2+k_2^2}{p}$$
המספר $Q^1 = \frac{k_1^2 + k_2^2}{p}$ הוא שלם וכיון ש $|k_1| < \frac{P}{2}$ ו- $|k_2| < \frac{p}{2}$
הרי גם $Q^1 < \frac{P}{2}$.

נפרק את Q^1 לגורמים ראשוניים: $Q^1 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_i^{\alpha_i} \dots q_t^{\alpha_t}$

כיון ש $Q^1 < \frac{p}{2}$ ברור שכל $q_i < \frac{p}{2}$.

אבל $Q^1 = \frac{K_1^2 + K_2^2}{p}$ ז.א.
$$\frac{K_1^2+K_2^2}{q_i} = \frac{pQ^1}{q_i} = p\, q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_i^{\alpha_{i-1}} \dots q_t^{\alpha_t}$$
וזהו מספר שלם.

מכאן שכל q_i שייך לסדרה S. יחד עם זה q_i קטן מ- $\frac{p}{2}$ כך שהוא נמצא בהכרח בין n האברים הראשונים של הסדרה S, והנחת האינדוקציה מתקיימת עבורו. באופן כזה:

$$\frac{k_1^2 + k_2^2}{q_1} = p\, q_1^{\alpha_1 - 1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_t^{\alpha_t} = c_1^2 + d_1^2$$

$$\frac{c_1^2 + d_1^2}{q_1} = p\, q_1^{\alpha_1 - 2} q_2^{\alpha_2} \cdots q_t^{\alpha_t} = c_2^2 + d_2^2$$

וכו'. אחרי שנגמור את כל הגורמים q_1 נעבור לגורמים q_2 , q_3 ולבסוף נגיע לגורם האחרון q_t:

$$\frac{c_r^2 + d_r^2}{q_t} = p = a^2 + b^2$$

מצוידים בתוצאה זו ביחס ל- p נוכיח ש-

$$\frac{A^2+B^2}{p} = \frac{A^2+B^2}{a^2+b^2} = Q$$

ניתן לתאור כסכום שני רבועים.

נגדיר שני זוגות מספרים x_1 , y_1 ו- x_2 , y_2 ע"י שתי המערכות

$$ax \pm by = A$$

$$ay \mp bx = B$$

(יש לבחור את הסימנים העליונים או התחתונים בהתאמה).

מקבלים: $X_{1,2} = \frac{Aa \quad Bb}{a^2+b^2} = \frac{Aa \quad Bb}{p}, \qquad Y_{1,2} = \frac{Ba \quad Ab}{a^2+b^2} = \frac{Ba \quad Ab}{a^2+b^2}$

נרשום:

$$Aa - Bb = p\, u_1 + l_1 \quad , \quad Ba + Ab = p\, u_2 + l_2$$

$$Aa + Bb = p\, v_1 + k_1 \quad , \quad Ba - Ab = p\, v_2 + k_2$$

כאן $|l_1| , |l_2| , |k_1| , |k_2| < p$

כעת: $(Aa + Bb)\,(Ba + Ab) = (p\, v_1 + k_1)(p\, u_2 + l_2)$

כלומר $k_1 l_2 = ab(A^2+B^2) + AB(a^2+b^2) - p(v_1 u_2 + v_1 l_2 + u_2 k_1)$

אבל $A^2 + B^2 = pQ$ ו- $a^2 + b^2 = p$ כך ש- $k_1 l_2$ מתחלק ב- p. מכפלת שני מספרים שלמים מתחלקת במספר ראשוני אם ורק אם לפחות אחד מהם מתחלק במספר. הראשוני. במקרה שלנו יתכן רק $K_1 = 0$ או $l_2 = 0$.

נניח לדוגמה $k_1 = 0$. כלומר $Aa + Bb = p\, v_1$

או $Bb = pv_1 - Aa$

מהשויונות הקודמים אנו מקבלים $Ba = Ab + p\, v_2 + k_2$

מכאן $Ba \cdot Bb = (Ab + pv_2 + k_2)(pv_1 - Aa)$

$$k_2 Aa = -(B^2 + A^2)ab + p\,(Abv_1 + pv_1 v_2 + k_2 v_1 - Aav_2)$$

A^2+B^2 מתחלק ב-p ז.א. כל האגף הימני מתחלק ב-p. אבל לפי הקודם A ו-a זרים ל-p (a כיון ש- $p=a^2+b^2$ וברור ש-a אינו מתחלק ב-p). כך ש k_2 מתחלק ב-p ז.א. $k_2=0$.

בסך הכל אם $k_1=0$ הרי $k_2=0$ ז.א.

$$X_2=\frac{Aa+Bb}{p}=V, \qquad Y_2=\frac{Ba-Ab}{p}=V_2$$

הם מספרים שלמים.

באופן דומה נוכל להראות שההנחה $C_2=0$ מביאה למסקנה $C_1=0$ ז.א. X_1 ו- Y_1 הם שלמים.

בסך הכל משני הזוגות $X_1;Y_1$ ו- $X_2;Y_2$ אחד מורכב בהכרח ממספרים שלמים. בכל מקרה מקבלים:

$$Q=\frac{A^2+B^2}{p}=\frac{(ax\pm by)^2+(ay\mp by)^2}{a^2+b^2}=x^2+y^2$$

כלומר Q הוא סכום של שני רבועים משדל.

על סמך האינדוקציה כל p מתוך S מקיים את המשפט היסודי וכיון ששם מדובר רק על p-ים כאלה, הרי המשפט היסודי הוכח בשלמות.

2. נביא עכשיו מסקנות אחדות הנובעות מהמשפט היסודי.

א) אם $A^2+B^2=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\dots q_t^{\alpha_t}$ ו- $(A;B)=1$ (q_i - ראשוני)

הרי כל q_i אפשר לתאר כסכום של שני רבועים.
(אפשר להוכיח זאת באותה צורה בה הוכח ש- p הוא סכום שני רבועים).

ב) מא' נובע שאם $A^2+B^2=mn$ ו- $(A;B)=1$
הרי גם m וגם n נתנים לתאור כסכום שני רבועים. נשאיר הוכחת עובדה זו לקורא.

ג) נוכיח: אם p מספר ראשוני שאינו ניתן לתאור כסכום שני רבועים אי אפשר למצוא שני מספרים שלמים A ו- B כך שלפחות אחד מהם יהיה זר ל- p ושסכום רבועיהם יתחלק ב- p.
במלים אחרות p שאינו סכום שני רבועים לא יכול להיות שייך לסדרה S. (בדוק את 7, 11, 19, 23).
הוכחה: נניח ש- $(A;B)=K$ ברור ש-K זר ל-p כך שאם $A^2+B^2=K^2(A_1^2+B_1^2)$ מתחלק ב-p גם $A_1^2+B_1^2$ מתחלק ו- $(A_1;B_1)=1$. אבל אז מהמשפט היסודי נובע ש- p הוא סכום שני רבועים בנגוד להנחה. הגענו לסתירה והמסקנה היא שאין שני מספרים שלמים כנ"ל שסכום רבועיהם מתחלק ב- p.

ד) יהא p ראשוני הניתן לתאור כסכום שני רבועים: $p = a^2 + b^2$
נוכיח שתאור זה עבור p הוא יחיד. נניח ש $p = a_1^2 + b_1^2$

אזי $\frac{a_1^2 + b_1^2}{p} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{a^2 + b^2} = x^2 + y^2 = 1^2 + 0^2$

ז.א. או $x = 0,\ y = 1$ או $x=1,\ y=0$

אבל לפי הוכחת המשפט היסודי מקבלים $a_1 = ax \pm by$
$b_1 = ay \mp bx$,
ומכאן נובעת הטענה שלנו. ($a_1 = a$ או $a_1 = b$ וכו').

בהזדמנות אחרת נראה איך אפשר להשתמש בעובדות שבררנו במאמר זה לפתרון משוואות מהסוג $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ במספרים שלמים.

<u>תרגילים לקורא:</u>

1) נתון $p = a^2 + b^2$ - ראשוני. בכמה צורות אפשר לבטא את המספר p^{2n} כסכום שני רבועים.

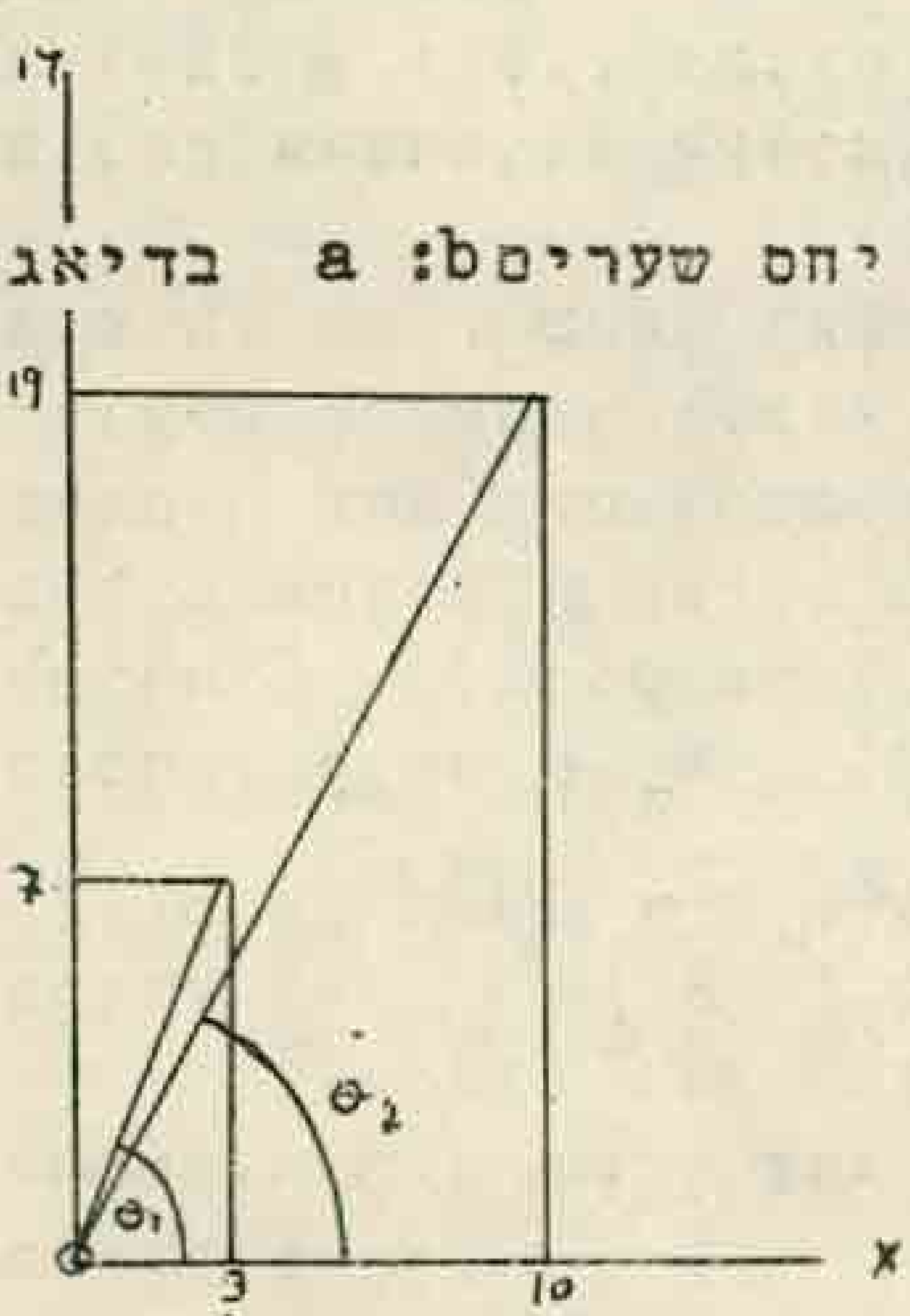
2) מצא שטה קלה לקביעת הגורמים הראשוניים של המספרים 2501, 3649, 4901 בהסתמך על העובדות:

$2501 = 50^2 + 1^2 = 49^2 + 10^2$
$3649 = 60^2 + 7^2 = 57^2 + 20^2$
$4901 = 70^2 + 1^2 = 50^2 + 49^2$

3) הכלל את השטה של התרגיל הקודם לכל מספר A שעבורו קיים

$$A = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

<u>תשובה לשאלה מעמוד 1</u>



מערכת וקטורים במישור. נתאר יחס שערים a:b בדיאגרמת ארגנד במישור ע"י $b + ia$. אז:

א) סכום שני יחסים a:b , c:d יהיה

$(b+ai)+(d+ci) = (b+d) + (a+c)i$

ב) קיים וקטור ia, למקרה ש b=0

ג) עדיפות יחס אחד על משנהו תיקבע ע"י השוואת גודל הזויות שבין הוקטורים לבין ציר ה-x החיובי (או זויות המספרים המרוכבים). למשל, בשרטוט $\Theta_1 > \Theta_2$, מכאן שהיחס 7:3 עדיף על היחס 19:10.

עקיבא סקידל, כפר-בלום

תחרות מתמדת להתרת בעיות *

הבעיות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות עד כתה י' בלבד, אבל אין פרוש הדבר שהן קלות.

ת.151* (2 נקודות) בנה משולש ע"פ שני גבהים וחוצה הצלע השלישית. (הוצע ע"י אליהו עמיר).

ת.152 (3 נקודות) הוכח שכל מקדמי הפתוח $(a + b)^n$ הם אך ורק כלם אי-זוגיים, כאשר $n = 2^k$ – ו- k מספר טבעי.

ת.153* (3 נקודות) הוכח ש $a^{4b+1} - a$ מתחלק ב-30 לכל a ו- b טבעיים.

ת.154* (4 נקודות) הוכח ש p^4-1 מתחלק ב-240 לכל p ראשוני גדול מ-5.

ת.155 (3 נקודות) נתון ישר ושתי נקודות A ו- B אשר אינן על הישר הנתון. מצא נקודות X על הישר כך שהיחס $AX : XB$ יהיה מקסימלי או מינימלי (בעזרת חשבון דיפרנציאלי רק 2 נקודות).

ת.156* (3 נקודות) כמה אפסים יש למספר $50! = 1.2.3......50$?

ת.157 (4 נקודות) מה צריך להיות הקשר בין הגדלים $a_1 a_2 \ldots, a_n$ בכדי שתתקיים הזהות $n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) = (a_1 + \ldots + a_n)^2$? (הוצע ע"י שמואל פרידלנד).

ת.158 (4 נקודות) נתון משושה משוכלל. ארכה של כל צלע a. חשב את ארך הצלע של רבוע חסום במשושה (כלומר קדקדיו על צלעות המשושה).

ת.159 (4 נקודות) נתון מעגל. מצא את מרכזו בעזרת מחוגה בלבד. (הוצע ע"י מאיר גולדשטיין).

ת.160 (4 נקודות) נתונה פינה משולשת. העבר מישור דרך נקודה נתונה על אחת מפאתיה כך שהגבה המורד מקדקד הפינה על מישור זה יפגוש אותו בצומת הגבהים של המשולש הנוצר במישור. (הוצע ע"י שמואל פרידלנד).

ת.161 (2 נקודות) הוכח שכל מספר מרוכב $\frac{c + i}{c - i} = a + ib$ בתנאי ש $a^2 + b^2 = 1$, $b \neq 0$ ו- a, b, c ממשיים. הבע c בעזרת a ו- b.

* יש לשלוח את הפתרונות למערכת עד 15.7.1963

ת.162* (3 נקודות) מאיזו נקודה על שוק זוית רואים קטע נתון על השוק השניה בזוית גדולה ביותר? (בעזרת חשבון דיפרנציאלי רק 2 נקודות).

ת.163* (4 נקודות) הוכח ש $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$ לעולם אינו מספר שלם.

ת.164 (5 נקודות) בנה משלש ע"פ זוית, חוצה זוית וחוצה צלע היוצאים מקדקד הזוית הנתונה.

ת.165* (5 נקודות) מ-27 קוביות שוות מרכיבים קוביה גדולה אחת. תולעת עץ נכנסת מבחוץ דרך פאת קוביה קטנה, ועוברת בדיוק פעם אחת דרך כל קוביה בלי לפגוע בפינה או במקצע. האם יתכן שתגמר את מסלולה בקוביה המרכזית? מה התשובה, אם מספר הקוביות הקטנות 5^3, 7^3, ...?

פתרון הבעיות ת. 121 - 135.

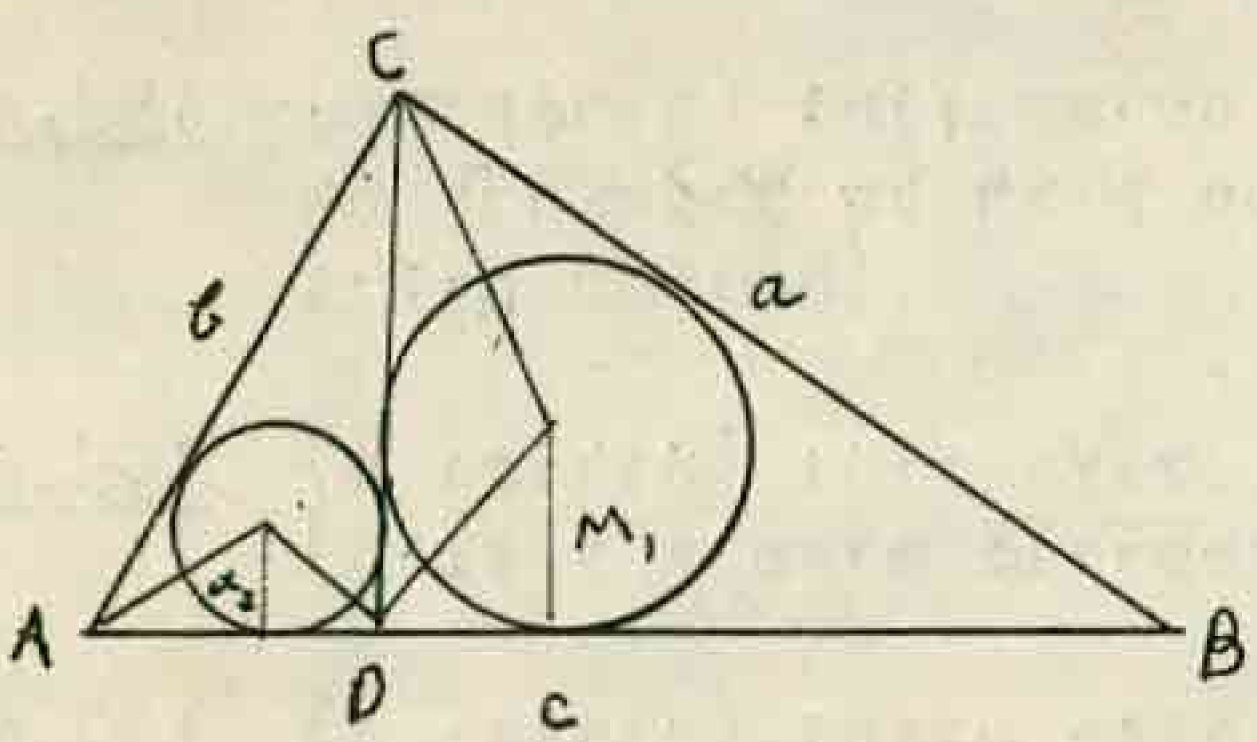
ת.121

$$\underbrace{11\ldots11}_{2n\text{ ספרות}} - \underbrace{22\ldots22}_{n\text{ ספרות}} = \underbrace{11\ldots11}_{n\text{ ספרות}} \cdot \underbrace{10\ldots01}_{n+1\text{ ספרות}} - 2\cdot\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ ספרות}} =$$

$$= \underbrace{11\ldots11}_{n\text{ ספרות}} \cdot \underbrace{99\ldots99}_{n\text{ ספרות}} = 9 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n\text{ ספרות}}{}^2$$

ת.122 שלשת המשולשים דומים זה לזה:

$\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$



מאחר שרדיוסי המעגלים החסומים במשולשים דומים מתיחסים כמו צלעותיהם המתאימות:

$$M_1 : M_2 : M = a:b:c$$

$$\frac{M_1 + M_2 + M}{a + b + c} = \frac{M}{c}$$

$$M_1 + M_2 + M = \frac{2pM}{c} = \frac{2S}{c} = \frac{c \cdot h}{c} = h$$

ת.123 נבנה מעגל מגע חצוני. ברור כי

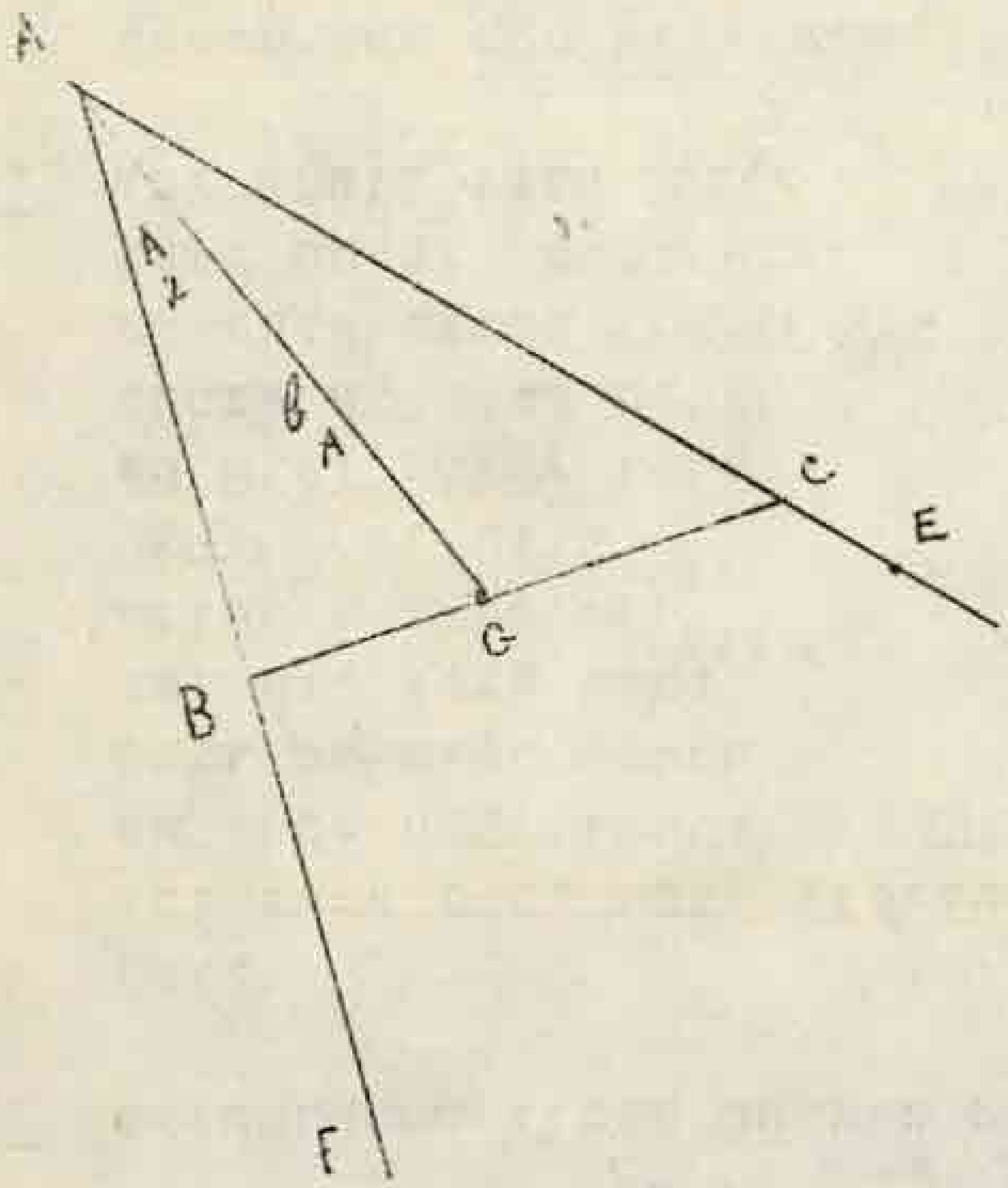
$AE=AF;\ BD=BF;\ CD=CE$

אולם $AE + AF = AC + CE$

$+ AB+BF=AC+DC+AB+BD =$

$= AC+AB+BC=a+b+c,\ \therefore AE=AF=(a+b+c)/2.$

וזו הבניה: בונים זוית A. על כל אחת משוקיה מקצים את חצי ההיקף. מתקבלות הנקודות E ו- F. נעלה אנכים לשוקים



בנקודות אלה ותתקבל
הנקודה O. נעביר את
המעגל. נבנה את חוצה
הזוית b_A ותתקבל
הנקודהG . מ-G
נעביר משיק למעגל
ויתקבל המשולש.

ת.124 דרך שלילה: נניח ש
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4}=A$,
כאשר A שלם. יהיה B
מכפלת כל המספרים
האי-זוגיים הקטנים
אוהשווים ל n ו- 2^r
החזקה הגבוהה
ביותר של 2 המקיימת
$2^r\leq n$. נכפיל
את המשואה הנ"ל
בשני אגפיה ב-
$B\cdot 2^{r-1}$. מצד ימין
נקבל $A.B\cdot 2^{r-1}$
מספר שלם ומצד שמאל
יהפך כל שבר למספר
שלם פרט ל $\frac{1}{2^r}$, כי $B\cdot 2^{r-1}$ מתחלק בכל n , פרט ל-2^r .
לכן סתירה: מספר שלם שוה לשבר.

ת.125 לגבי $n = 2$ $\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$

נניח $S_K>\frac{13}{24}$ אזי

$$S_{K+1}=\frac{1}{K+1}+\ldots+\frac{1}{2K}+\frac{1}{3K+1}+\frac{1}{2K+2}=$$

$$S_K-\frac{1}{K+1}+\frac{1}{2K+1}+\frac{1}{2K+2}=$$

$$=S_K+\frac{2K+2+2K+1-2(2K+1)}{2(K+1)(2K+1)}=S_K+\frac{1}{2(K+1)(2K+1)}$$

$$\therefore S_{K+1}>S_K$$

ואם $S_K>\frac{13}{24}$ ברור ש $S_{K+1}>\frac{13}{24}$

ת.126 בין 10 מספרים עוקבים יש 5 זוגיים ו-5 אי-זוגיים. צריך
לכן להראות שבין 5 מספרים אי-זוגיים עוקבים יש לפחות

אחד ולכל היותר 4 מספרים שאינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 7;5;3.. אבל ביניהם מוכרח להיות לפחות אחד המתחלק ב-3.
לכן כנטען יש לכל היותר ארבעה. דוגמה שיש ארבעה: 17,19, 11,13,15. רק 15 מתחלק ב-3, 5 או 7. אולם בין 5 מספרים אי-זוגיים עוקבים יש לכל היותר שניים המתחלקים ב-3, לכל היותר אחד המתחלק ב-5 ולכל היותר אחד המתחלק ב-7. לכן לפחות אחד מהם אינו מתחלק לא ב-3, לא ב-5 ולא ב-7.

ת.127 לפי הנתון נמצא הרבוע בפנת המלבן. מרכז הכבד של החלק הנותר ABGFED חיב להמצא על הקטע המחבר את מרכז AMED ומרכז BGFM (כי הגוף הנותר הוא סכומם). מצד שני נמצא מרכז הכבד של הישר המחבר את מרכז ABCD ומרכז CEFG (כי הגוף הנותר הוא הבדלם).
לכן נמצא מרכז הכבד בנקודת החתוך של הקטע הראשון והישר השני.

ת.128 טענת המשפט נובעת מהזהות הבאה:

$$n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2$$

בין אם n זוגי ובין אם n אי-זוגי כל אחד מן המונים הוא זוגי, לפנינו אם כך הבדל של שני רבועים שלמים.

ת.129

$$\sin\frac{3}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$$

$$\sin\frac{5}{2}\alpha - \sin\frac{3}{2}\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha$$

$$\sin\frac{7}{2}\alpha - \sin\frac{5}{2}\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha$$

$$\sin\frac{2n+1}{2} - \sin\frac{2n-1}{2} = 2\sin\frac{}{2}\cos n$$

ע"י חבור כל השויונות נקבל

$$\sin\frac{2n+1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos i\alpha = \frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}$$

ת.130 נניח $9 \geq a > b > c > d \geq 0$

$M=1000a+100b+10c+d \quad m = 1000d+100c+10b+a$

$M-m = 1000(a-d) + 100(b-c) + 10d(c-b) + (d-a)$

אולם $d-a < 0$; $c-b < 0$ לכן נכתוב

$= 1000(a-d) + 100(b-c-1) + 10(10+c-b-1) + (10+d-a)$

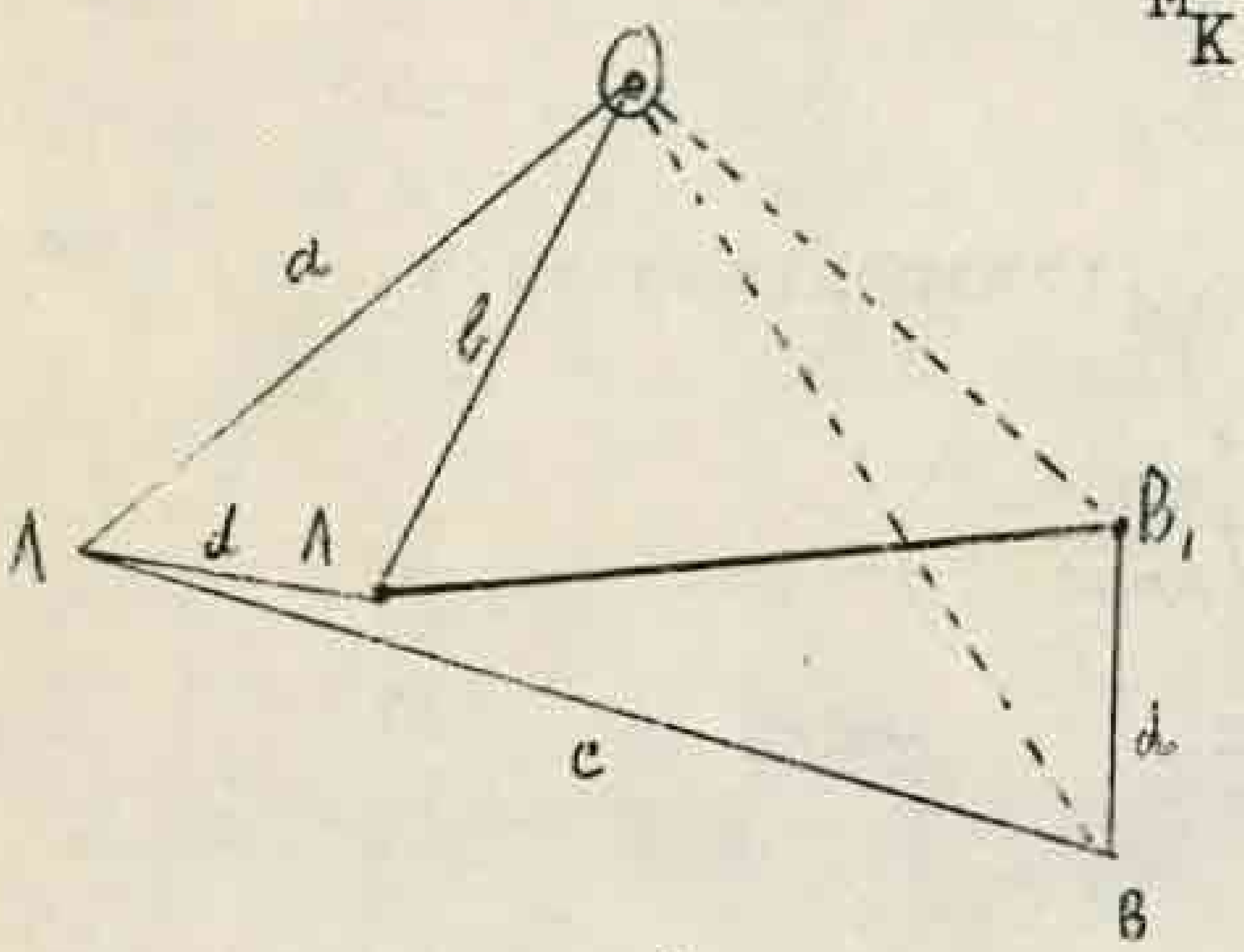
סכום הספרות הקצוניות $a-d+10+d-a = 10$

סכום הספרות האמצעיות $b-c-1+10+c-b-1 = 10-2 = 8$

לכן יש לבדוק רק שלושים מקרים:

1089	2088	3087	4086	5085
1179	2178	3177	4176	5175
1269	2268	3267	4266	5265
1359	2358	3357	4356	5355
1449	2448	3447	4446	5445

בכל אחד מהמקרים הללו, נגיע תמיד כעבור מספר סופי של צעדים להפרש $M_K - m_K = 6174$



<u>ת.131</u> תהי נקודה O מרכז שני מעגלים מרכזיים, שרדיוסיהם a ו- b על המעגל (O,a) מקצים מיתר $AB= c$. מ- A ומ- B מקצים ברדיוס כלשהו d את הקטעים $AA_1=BB_1 = d$ הקטע A_1B_1 הוא הקטע המבוקש.

<u>הוכחה:</u> לפי צ.צ.צ.

$$\triangle AOA_1 \cong \triangle BOB_1$$
$$\therefore \sphericalangle AOA_1 = \sphericalangle BOB_1$$
$$\therefore \sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1OB_1$$
$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$$

$$a : b = c : A_1B_1$$

<u>ת.132</u> לפי הנתון נמשכו שבע ההצגות פחות מ-13 שעות, ואילו חמש הצגות נמשכו יותר מ-9 שעות (השניה החלה לפני שעה 14 והששית נסתיימה לא לפני שעה 23). מכאן שרוח הזמן בין התחלת הצגה אחת להתחלת ההצגה הבאה קטן מ-1ש' 52ד' וגדול מ-1ש' 48ד'. לכן הוא שוה ל-1ש' 50 ד' (כפולה של 5 ד').

מכיון שההצגה השניה החלה לפני 14 ש', הראשונה החלה ב-12.00 או ב-12.05 (גם ההתחלה כפולה של 5 ד'). קבלנו איפוא שני פתרונות.

<u>ת.133</u> $$\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{a^2-(a^2-1)} = \sqrt{1} = 1$$

לכן $$\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}} = 1/\sqrt{a+\sqrt{a^2+1}}$$

ומכאן $$\left(\sqrt{a+\sqrt{a-1}}\right)^x + \left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x =$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x} = 2a$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^{2x} - 2a\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x + 1 = 0$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x = a \pm \sqrt{a^2-1}$$

לגבי הסמן החיובי:

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x = \left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^2$$

לכן $x_1 = 2$

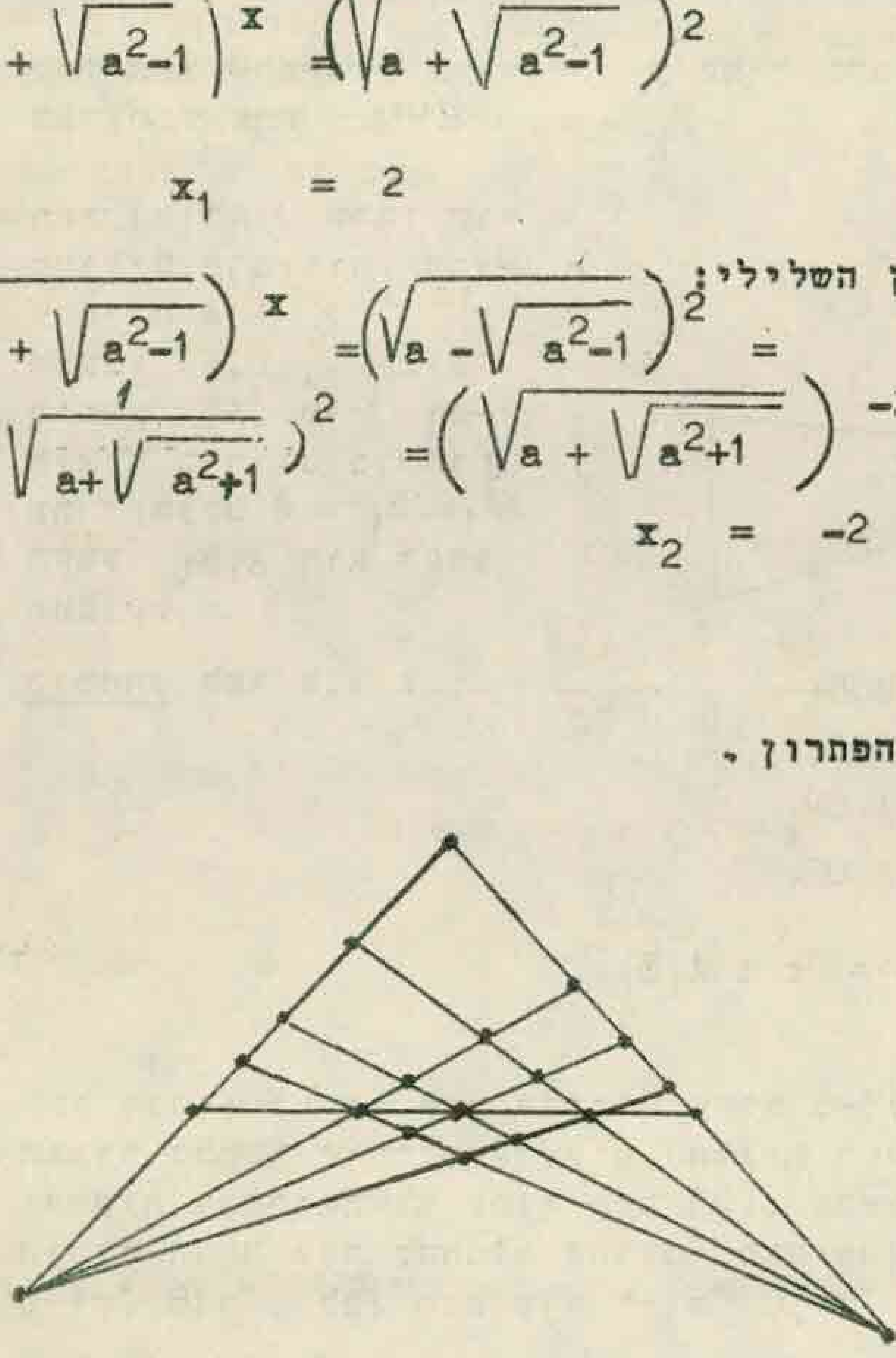
ולגבי הסמן השלילי:

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x = \left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}\right)^2 = \left(\sqrt{a+\sqrt{a^2+1}}\right)^{-2}$$

לכן $x_2 = -2$

ת.134 הציור הוא הפתרון .

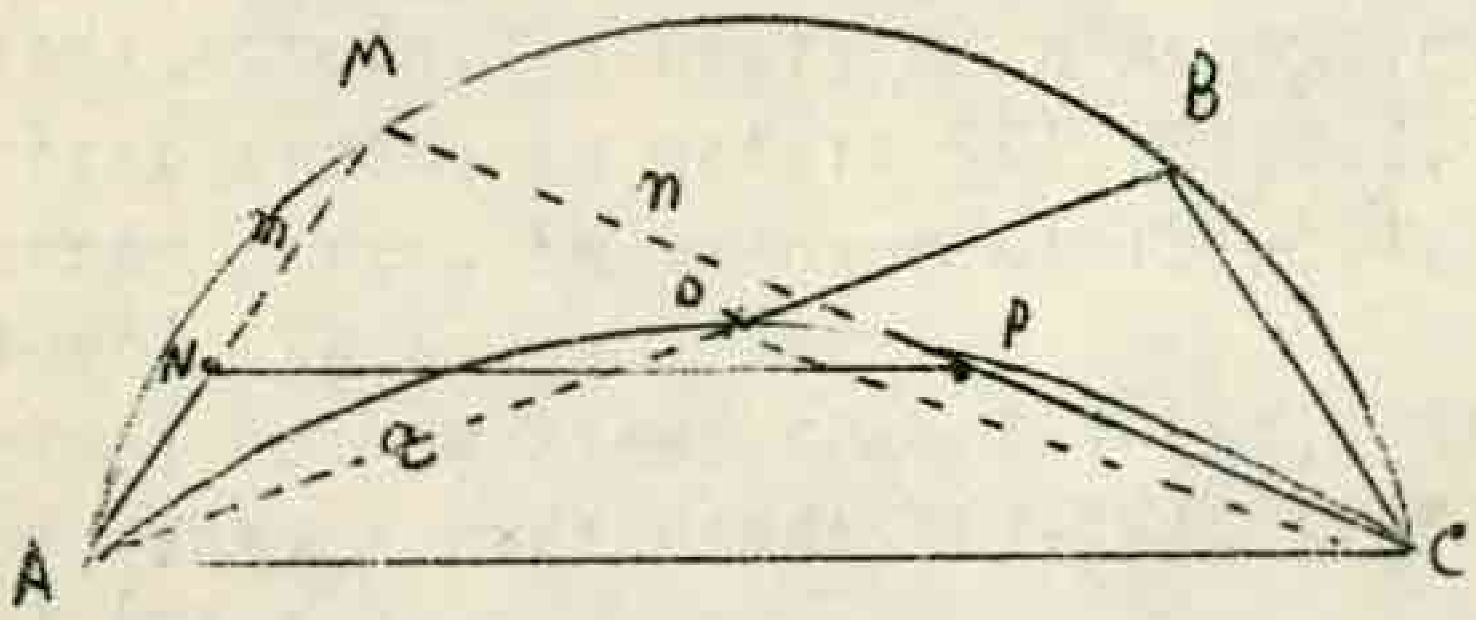


בעיה ופתרונה

שיחה טלפונית: הלו, האם זה מספר 57823? - כן, מי מדבר? - מה? אינך מכיר את קולי? אמי היא חמותה של אמך.

האם תוכל לזהות את הקרבה המשפחתית בין שני המשוחחים?

(תשובה בעמוד 31).



ת.135 על קטע AC שארכו K בתור קוטר, נבנה חצי מעגל. על חצי מעגל זה נבחר נקודה רצונית M. על MA נקצה MN השוה m ועל MC נקצה MP השוה n.

על AC נקים קשת ראיה השוה ל-ANP. מ-A נקצה קטע בגדל a ותתקבל D על קשת הראיה.

נמשיך את AD עד חתוכו עם חצי המעגל בנקודה B.

טענה: $AB = X \quad BC = y$

הוכחה: $\triangle MNP \sim \triangle BDC$

$$\therefore \frac{MN}{MP} = \frac{BD}{BC}$$

$$\therefore (x-a) : y = m : n$$

ולפי פיתגורס $x^2 + y^2 = K^2$. מ.ש.ל.

תשובה לבעיה מעמוד 30

ישנן 3 אפשרויות שונות:

א) אב מדבר עם בנו ועם בתו.
ב) דוד מדבר עם בן או עם בת אחיו.
ג) דודה מדברת עם בן או עם בת אחיה.

רשימת פותרי השאלות מס. 121 - 135

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר.

1. איזנמן מיכאל, יב בית הכרם: 121,122,125-132,*133,134,135 (45 נ.)
2. אפלויג אלימלך, יא תיכון ה' ת"א: 121,125,128,130 (13 נ.)
3. אהרונוב נורמה, יא חולון: 122,127,129,130,132 (17 נ.)
4. בוכינגר יואל, יא גזית, ר"ג: 121-123, *124,125,*126,127-129,*130, 131-135 (47 נ.)
5. בורשטין דב, יא גזית, ר"ג: 121-123, 125-133, *135 (45 נ.)
6. בוסל יצחק, י ראלי חיפה: 121-123,125,*126,127,*129,130-132,*133,134, *135 (37 נ.)
7. גינגולד אריה, יא ריאלי חיפה: 121-135 (53 נ.)
8. גרוברט אברהם, יב חולון: 121,122, 124-128,130-133,135 (44 נ.)
9. גולדשטין מאיר, צה"ל: 121-123,125-128,131,132,*133 (30 נ.)
10. ולך דוד, תיכון קרית מוצקין: 121,128,*129,133 (11 נ.)
11. וייסמן מיכאל, י ריאלי חיפה: 121-123,*124,125-132,*133,134,*135 (49 נ.)
12. זלטקין מיכאל, יב ריאלי חיפה: 121-128,*129,130,*131,132-135(49 נ.)
13. טליל אורי, יא ריאלי חיפה: 121,122,125,*126,127,130,132-135(34 נ.)
14. ירושלמי זלמן, י ריאלי חיפה: 121-123,125-129,132 (27 נ.)
15. ליך שי, י ריאלי חיפה; 121,125,128,*129,*132 (13 נ.)
16. לביא נתן, יב בית הכרם: 121,122,125,*126,127-129,*130,132,*135(30נ.)
17. לורנד ראובן, יא ריאלי חיפה: 121,122,125-130,132-135 (41 נ.)
18. לוי אליהו, יא ריאלי חיפה: 121,122,124-128,*129,130-135 (49 נ.)
19. מיזלס יוסף, יא ריאלי חיפה: 121,125,127,128,130,132,134 (23 נ.)
20. סורין אנדרי, ט ביה"ס המקצועי חיפה: 127,128 (5 נ.)
21. סחוי יונתן, יא הרצליה ת"א: 121,122,124-128,*129,130,131-135 (46 נ.)
22. עקביה גדעון, יא ריאלי חיפה: 121,122,124-128,*129,130-133,135(46 נ.)
23. עמיר אליהו, י תיכון בני-ברק: 121-123,125,129,133 (18 נ.)
24. פוקסמן עדו, יא עירוני ט ת"א: 133 (4 נ.)
25. פרויד בועז, יב ביה"ס המקצעי חיפה: 122,125-128,*129,132-135 (32 נ.)
26. פרידלנד שמואל, יב ריאלי חיפה: 121-135 (53 נ.)
27. פינציוק גרשון, יב ריאלי חיפה: 121-135 (53 נ.)
28. קושניר ראובן, יא ריאלי חיפה: 121-123,*125,*126,127-131,*132,*133, 134,135 (43 נ.)
29. רשף שמואל, שנה א' טכניון: 121-123,125,126,128-130,132,133,135(38נ.)
30. רן אהוד, יא ריאלי חיפה: 121-123,125-131,*132,133-135 (48 נ.)
31. רפפורט אליעזר, ? ; 121,123,128 (8 נ.)
32. שמש עמליה, יא תיכון בני-ברק: 121,123,125 (9 נ.)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

י. דוד, ביה"ס התיכון עירוני א', רח' בכורי העתים 2, ת"א.

חשבון בנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.