רבעון למתמטיקה

ללמוד ולמחקר

בעריכת דב ירדן

חוברת 3

ירושלים, ניסן תש"ח, אפריל 1948

כרך 2

תכן

כתבת המערכת: דב ירדן, מלאכי 20, ירושלים

המחיר 200 מיל

רבועים לטיניים אסוציאטיביים

יוסף פוטר

1. כשם <u>רבוע לטיני</u> מסדר n נקרא, כרגיל, למטריצה רבועית מסדר n, שאבריה הם המספרים $1,2,\dots,n$ וכל אחד מהם מופיע בכל שורה ובכל עמודה. את מספר הרבועים הלטיניים השונים מסדר n הביע Mc Mahon (בכרך הראשון של ספרו Combinatory Analysis) בתור המקדם של האבר

$$x_1^{2^{n+1}-2}\ x_2^{2^{n+1}-2}\ \dots\ x_n^{2^{n+1}-2} \tag{1}$$

בפולינום:

$$\Big[\sum_{\{b(k)\}} x_1^{2^{b(1)}}\ x_2^{2^{b(2)}}\ \dots\ x_n^{2^{b(n)}}\Big]^n \tag{2}$$

באשר $\{b(k)\}$ $(k=1,2,\dots,n)$ מסמן תמורה כללית של ה kים, והסכום שבתוך הסוגרים עובר על כל התמורות. דבר זה נובע מיד מן העובדה כי המספר $2^{n+1}-2$ ניתן להצגה כסכום של n חזקות טבעיות של 2 רק באפן אחד, שהוא:

$$2^{n+1}-2=2^1+2^2+\dots+2^n$$

כלומר כל מכפלה (1) המופיעה בפתוח של (2) נותנת לנו רבוע לטיני ולהפך.

2. כל לוח-כפל של חבורה סופית הוא רבוע לטיני מסדר החבורה, אולם לא להפך. נשאלת איפוא השאלה מה מאפיין את הרבועים הלטיניים שהם לוחות-כפל של חבורות. ברור כי אפיון כזה ניתן ע"י דרישת קיום אבר-היחידה והתנאי האסוציאטיבי. נסתכל אם-כן קדם-כל באותם הרבועים הלטיניים שבהם עומדים בשורה הראשונה ובעמודה הראשונה המספרים $1,2,\dots,n$ לפי סדרם הטבעי (משמאל לימין ומלמעלה למטה). (המספר 1 יתאים לאבר-היחידה). לרבוע כזה נקרא בשם <u>רבוע לטיני מתוקן</u>. לרבוע לטיני מתוקן המקיים את התנאי האסוציאטיבי נקרא בשם <u>רבוע לטיני אסוציאטיבי</u>. בסעיף הבא נתן בטוי הבנוי לפי העקרון של Mc Mahon והמונה את מספר הרבועים הלטיניים האסוציא-טיביים השונים מסדר n.

3. יהיו:

$$a_{1m}=a(1,m)=a_{m1}=a(m,1)=m\ ;$$

עבור $i>1$ תהי $\{a_{ik}\}=\{a(i,k)\}$, באשר $k=2,3,\dots,n$, תמורה כללית של ה kים על המספרים $1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n$:

הבטויים $t_{ghl}=t(g,h,l)$, $y_{ghlm}=y(g,h,l,m)$, $z_{ghlm}=z(g,h,l,m)$ יהיו פרמטרים.

<u>משפט:</u> מספר הרבועים הלטיניים האסוציאטיביים השונים מסדר n ניתן ע"י המקדם של האבר:

$$x_1^{2^{n+1}-2}\ x_2^{2^{n+1}-2}\ \dots\ x_n^{2^{n+1}-2} \tag{1}$$

(החפשי מ tים, yים ו zים) בפולינום:

$$\prod_{i=1}^{n}\Big[\sum_{\{a_{ik}\}}\ \prod_{k=1}^{n} g_{ik}(x,y,z,t;\{a_{ik}\})\Big] \tag{3}$$

באשר הסכום בתוך הסוגרים המרובעים עובר על כל התמורות $\{a_{ik}\}$ המוגדרות לעיל (כלומר עבור $i=1$ מצטמצם למחובר האחד המתאים לתמורה הזהותית), והבטויים g_{ik} ניתנים ע"י:

$$g_{ik}(x,y,z,t;\{a_{ik}\})=x_k^{2^{a(i,k)}}\ \Big(\prod_{b=1}^{n} y(i,k,b,a_{ik})^{a(i,k)}\, z(b,i,k,a_{ik})^{a(i,k)}\Big)$$

$$.\Big(\prod_{c=1}^{n}\sum_{d=1}^{n} t_{cdk}^{a(i,k)}\ y_{cdki}^{-i}\Big).\Big(\prod_{e=1}^{n}\sum_{f=1}^{n} t_{ief}^{-a(i,k)}\ z_{iefk}^{-k}\Big)\ .$$

<u>הוכחה:</u> ביחס ל xים, רואים מיד כי כל מערכת (a_{ik}) התורמת אבר מהצורה (1) היא רבוע לטיני, כמו בבטוי (2) של Mc Mahon. בגלל ההגדרה

$a_{1m}=a_{m1}=m$ יופיעו רק רבועים לטיניים מתוקנים. נשאר לנו רק לבדק את פירוש התנאי שהאבר (1) יהיה חפשי מה xים, ה yים וה zים.

האבר הכללי של (3) הוא (פרט ל xים):

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{b=1}^{n} y(i,k,b,a_{ik})^{a(i,k)}\ z(b,i,k,a_{ik})^{a(i,k)}\right.$$

$$\cdot\prod_{c=1}^{n} t(c,d_{ikc},k)^{a(i,k)}\ y(c,d_{ikc},k,i)^{-i}$$

$$\left.\cdot\prod_{e=1}^{n} t(i,e,f_{ike})^{-a(i,k)}\ z(i,e,f_{ike},k)^{-k}\right\}$$

באשר (a_{ik}) הוא רבוע לטיני מתוקן (רק באברים כאלה אנו מסתכלים), ואילו d_{ikc}, f_{ike} הם מספרים כלשהם בין 1 ל n.

נקח כעת שלשה מספרים g,h,l ויהי עבורם:

$$a_{gh}=p\ ,\ a_{hl}=q\ .$$

הפרמטר y_{ghlp} מופיע במכפלה הראשונה בחזקה החיובית p. לכן, כדי לבטלו, דרוש במכפלה השניה:

(4) $$d_{plg}=h$$

באותו אפן, כדי שלא יופיעו ה zים, דרוש במכפלה השלישית:

(5) $$f_{gqh}=l$$

כיון ש (a_{ik}) הוא רבוע לטיני, קל לראות כי (4) ו (5) קובעים את ה dים וה fים באפן חד-ערכי. אבל בגלל קביעה זו יופיע הפרמטר t_{ghl} בחזקה:

$$a_{pl}-a_{gq}$$

והתאפסותה של חזקה זו פירושה קיום התנאי האסוציאטיבי לגבי השלישיה g,h,l.

4. המשפט הנ"ל נותן לנו את מספר הרבועים האסוציאטיביים, שכל אחד מהם הוא לוח-כפל של חבורה. אולם אין הוא נותן לנו את מספר החבורות הבלתי-איזומורפיות מסדר n, כי שני רבועים שונים יכולים להיות "איזומורפיים", כלומר להתקבל זה מזה ע"י תמורה של האלמנטים השונים מהיחידה. בתור דוגמה נקח את הרבועים הלטיניים האסוציאטיביים מסדר 4, שמספרם הוא 4. שלשה מהם:

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&4&2&1\\4&3&1&2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\\3&1&4&2\\4&3&2&1\end{matrix}$$

מתארים את החבורה הציקלית, והרביעי:

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&4&1&2\\4&3&2&1\end{matrix}$$

את חבורת הארבעה.

סדרות-נסיגה לא-ליניאריות בעלות מחזור שארכו 8

דב ירדן

ידוע כי הסדרות המקיימות את הנוסחה $u_nu_{n-2}=u_{n-1}+1$ הן בעלות מחזור שארכו 5 [1]. להלן נתן הכללה של התוצאה הנזכרת לסדרות המקיימות את הנוסחה $u_nu_{n-3}=u_{n-1}+u_{n-2}+1$ ונעסוק בתכונות-סימטריה היכולות להיות לסדרות אלו.

<u>משפט 1.</u> כל סדרה המקיימת את הנוסחה

$$u_nu_{n-3}=u_{n-1}+u_{n-2}+1 \qquad (1)$$

היא בעלת מחזור שארכו 8.

<u>תוספת.</u> אם a, b, c הם 3 אברים עוקבים, יהיה המחזור:

$$(2)\qquad a,\ b,\ c,\ \frac{b+c+1}{a},\ \frac{a+b+c+ac+1}{ab},\ \frac{(a+b+1).(b+c+1)}{abc},\ \frac{a+b+c+ac+1}{bc},\ \frac{a+b+1}{c}.$$

<u>הוכחה.</u> האברים ה 9, ה 10 וה 11 הם a, b, c. מכאן נובע לפי (1) כי (2) חוזר במחזור.

<u>הגדרות.</u> לסדרה המקיימת את הנוסחה (1) נקרא בקצור שמיניה. בהתאם למחזוריות טוב ביותר לתאר שמיניה על מעגל (שאפשר ללכת בו בשני הכוונים). N=n או N=n+1/2, באשר n מספר שלם, יקרא מרכז-סימטריה של השמיניה, אם $u_{N-k}=u_{N+k}$, k=1, 2, 3 או k=1/2, 1+1/2, 2+1/2, 3+1/2, בהתאמה. אם N הוא מרכז-סימטריה נאמר כי (N,N+4) קובעים ציר-סימטריה השיך ל N או ל N+4. בתאור על מעגל יתוארו צירי-סימטריה השיכים למספרים שלמים או שבורים ע"י קטרים שלמים או מרוסקים בהתאמה, המחברים את מרכזי-הסימטריה המתאימים. שני צירי-סימטריה השיכים ל N ול N+2 נקראים מאונכים ואחרים - בלתי מאונכים. השם ציר-סימטריה מוצדק לפי התוצאה הבאה:

<u>משפט 2.</u> בכל שמיניה יחד עם N גם N+4 הוא מרכז-סימטריה (ולהפך).

<u>תוספת.</u> לשמיניה אין שום ציר-סימטריה אם ורק אם ארבעה אברים עוקבים בה אינם מרכזי-סימטריה.

<u>הוכחה.</u> לפי הגדרת מרכז-סימטריה ומשפט 1 יהיה:

$$u_{(N+4)-k}=u_{N+(4-k)}=u_{N-(4-k)}=u_{N-(4-k)+8}=u_{(N+4)+k}.$$

<u>משפט 3.</u> בכל שמיניה קים

$$u_nu_{n+4}=u_{n-2}u_{n+2}. \qquad (3)$$

<u>תוספת.</u> אם n הוא מרכז-סימטריה, יהיה:

$$u_nu_{n+4}=u_{n+2}^2.$$

<u>הוכחה.</u> (2).

<u>משפט 4.</u> בשמיניה מספר שלם n הוא מרכז-סימטריה אם $u_{n-1}=u_{n+1}\neq0$, או אם $u_{n-3}=u_{n+3}\neq0$, או אם $u_{n-2}=u_{n+2}$, $u_{n+1}\neq0$, $u_{n-1}\neq0$.

<u>הוכחה.</u> אם $u_{n-1}=u_{n+1}\neq0$, די להוכיח כי $u_{n-k}=u_{n+k}$, k=2, 3.
לפי (1), $u_{n-2}=(u_{n-1}+u_n+1)/u_{n+1}=(u_{n+1}+u_n+1)/u_{n-1}=u_{n+2}$, ז"א $u_{n-2}=u_{n+2}$.
לפי (3) ומשפט 1, $u_{n-3}u_{n+1}=u_{n-5}u_{n-1}=u_{n+3}u_{n+1}$, מכאן $u_{n-3}=u_{n+3}$.

אם $u_{n-3}=u_{n+3}\neq0$, יהיה n+4 מרכז-סימטריה לפי החלק המוכח. לכן, לפי משפט 2, n הוא מרכז-סימטריה.

אם $u_{n-2}=u_{n+2}$, יהיה לפי (1)

$$(u_{n-1}+u_n+1)/u_{n+1}=u_{n-2}=u_{n+2}=(u_{n+1}+u_n+1)/u_{n-1},$$

ז"א

$$u_{n-1}(u_{n-1}+u_n+1)=u_{n+1}(u_{n+1}+u_n+1).$$

אם $u_{n-1}\neq0$, $u_{n+1}\neq0$ נקבל מכאן $u_{n-1}=u_{n+1}\neq0$, לכן, לפי החלק המוכח, n הוא מרכז-סימטריה.

---

1) Th. Motzkin, The pentagon in the projective plane, with a comm[illegible] on Napier's rule, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945) 98[illegible]

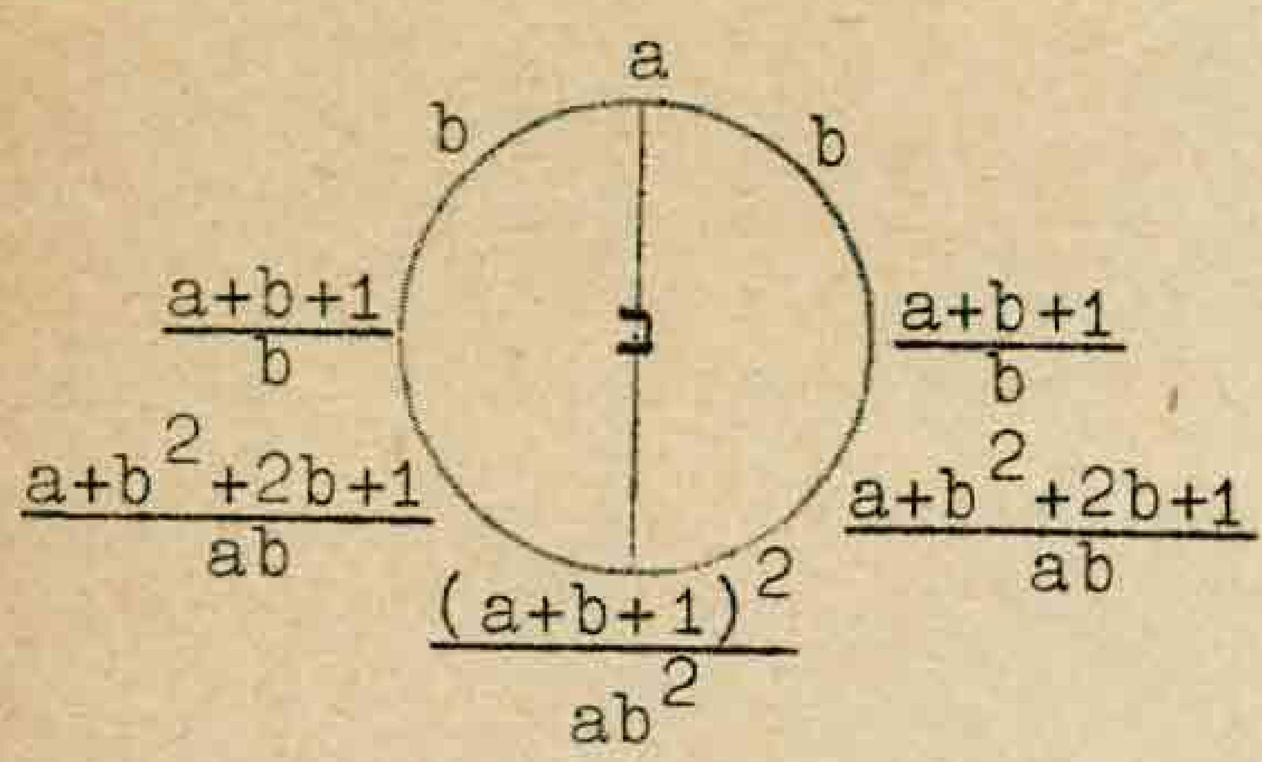
משפט 5.

אא. לשמיניה בלי אפסים אין שום ציר-סימטריה השיך למספר שלם אם ורק אם נמצאים בה שלשה אברים u_n, u_{n+2}, u_{n+4} המקימים את התנאים

$$u_n \neq u_{n+2} \neq u_{n+4}, \quad u_{n+2}^2 \neq u_n u_{n+4}.$$

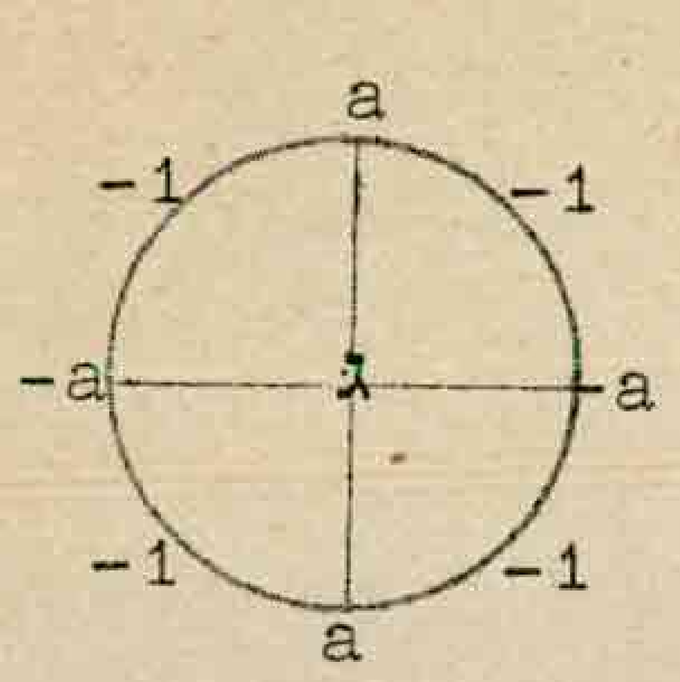
אב. לשמיניה עם $u_{n+1}=0$ אין שום ציר-סימטריה השיך למספר שלם אם ורק אם

$$u_{n-2} \neq u_{n+2}, \quad u_{n-2} \neq -1, \quad u_{n+2} \neq -1.$$

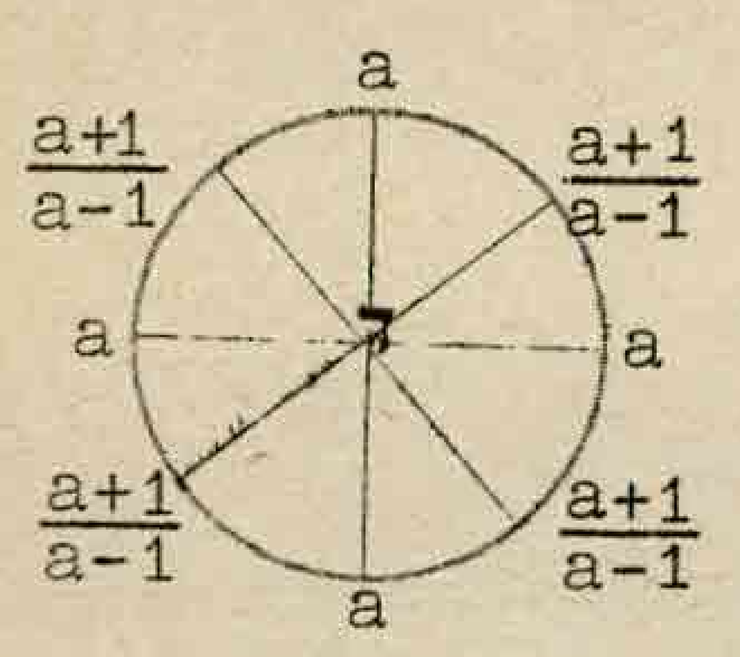


ב. כל שמיניה בעלת ציר-סימטריה אזוג השיך למספר שלם היא מצורת ב.

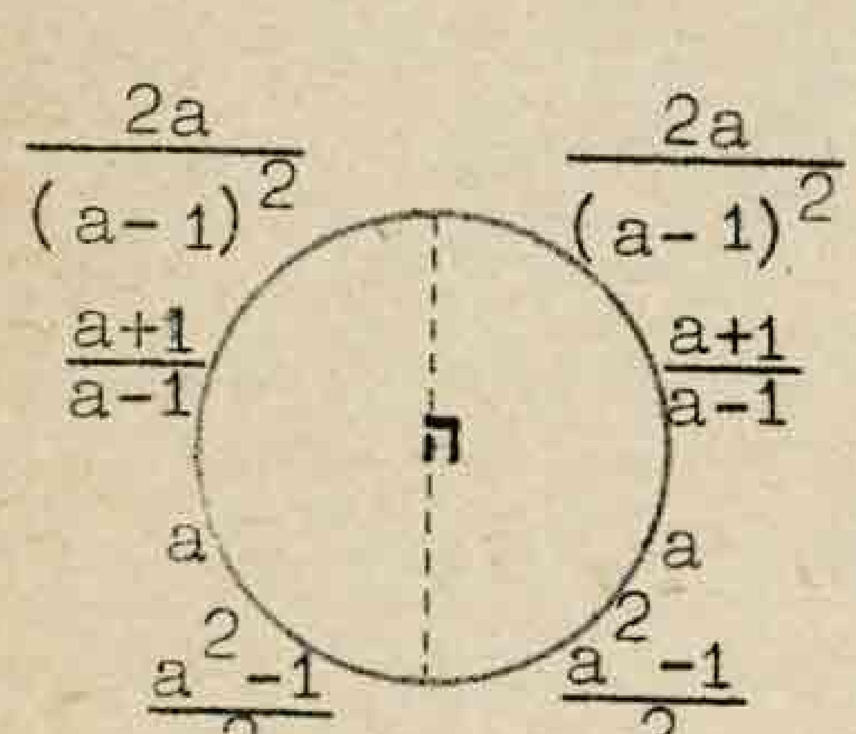
ג. כל שמיניה בעלת 2 צירי-סימטריה - ושנים בלבד - השיכים למספרים שלמים היא מצורת ג.



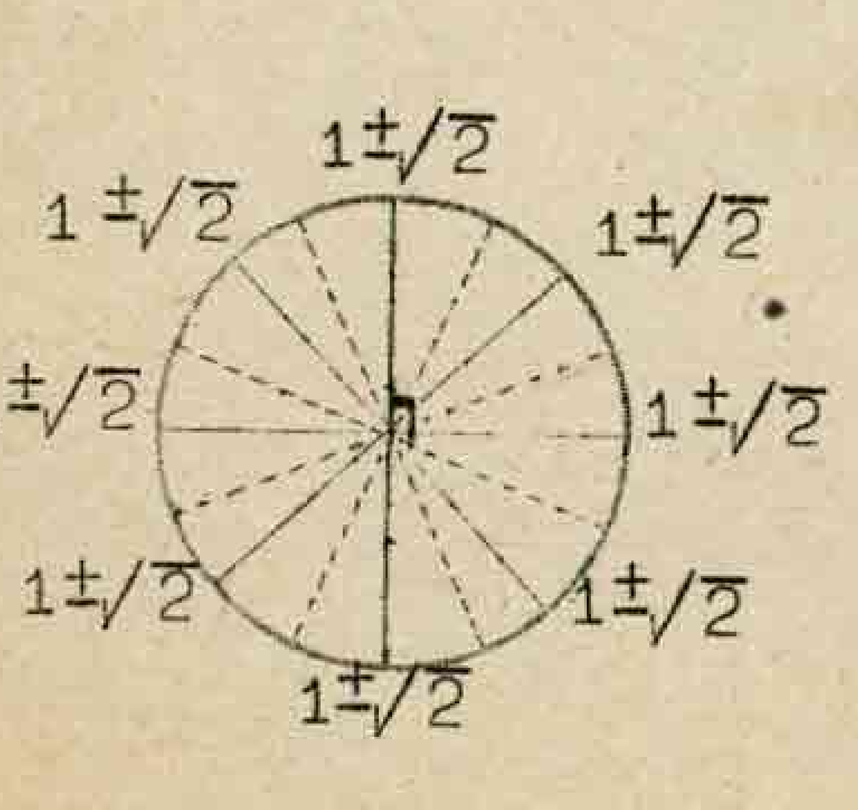
ד. כל שמיניה בעלת 3 צירי-סימטריה השיכים למספרים שלמים, או אפילו בעלת 2 צירי-סימטריה בלתי מאונכים השיכים למספרים שלמים, היא מאליה בעלת 4 צירי-סימטריה השיכים למספרים שלמים, והיא מצורת ד.



ה. כל שמיניה בעלת ציר-סימטריה אחד השיך למספר שבור היא מצורת ה.



ו. שתי השמיניות היחידות בעלות ציר-סימטריה אחד השיך למספר שבור וציר-סימטריה נוסף השיך למספר שבור או שלם הן מצורת ו. יש להן המספר המכסימלי של צירי-סימטריה: 4 השיכים למספרים שלמים ו 4 השיכים למספרים שבורים.



הוכחה.

אא. מ $u_{n+2}^2 \neq u_n u_{n+4}$ יוצא לפי (3) $u_{n+2} \neq u_{n+6}$, מכאן u_n אינו מרכז-סימטריה. מ $u_n \neq u_{n+2}$ יוצא כי u_{n+1} אינו מרכז-סימטריה. מ $u_n \neq u_{n+4}$ יוצא כי u_{n+2} אינו מרכז-סימטריה. מ $u_{n+2} \neq u_{n+4}$ יוצא כי u_{n+3} אינו מרכז-סימטריה. מכאן יוצא, לפי התוספת למשפט 2, כי לשמיניה אין שום ציר-סימטריה. אם תנאי המשפט אינם מתקימים כלם, יהיה לפי משפט 3 ו 4, אבר אחד מרכז-סימטריה.

אב. לפי מוצקין (2), כל שמיניה עם אפסים היא מצורת

$$-1,\ 0,\ a,\ -a-1,\ -ab,\ -b-1,\ b,\ 0.$$

מכאן יוצא כי אם $u_{n+1}=0$ יהיה $u_{n+2}=-1$, $u_{n+3}=0$ או $u_n=-1$, $u_{n-1}=0$. הואיל ו $u_{n+2} \neq -1$ נקבל אפוא $u_n=-1$, $u_{n-1}=0$. u_n אינו מרכז-סימטריה כי $u_{n-2} \neq u_{n+2}$. u_{n+1} אינו מרכז-סימטריה כי $u_n=-1 \neq u_{n+2}$. u_{n+2} אינו

מרכז-סימטריה כי $u_{n+1}=0\neq u_{n+3}$. u_{n+3} אינו מרכז-סימטריה כי $u_{n+2}\neq u_{n+4}$.
אם $u_{n-2}=u_{n+2}$ יהיה u_n מרכז-סימטריה. אם $u_{n+2}=-1$ יהיה u_{n+1} מרכז-סימטריה.
אם $u_{n-2}=-1$ יהיה u_{n-1} מרכז-סימטריה.

ב. (2).

ג-ד. אם הצירים אינם מאונכים, נקבל:

$$a, b, a, b, a, b, a, b,\dots$$

מכאן, לפי (1), $b=(a+1)/(a-1)$. אם הצירים מאונכים, נקבל:

$$a, b, c, b, a, b, c, b,\dots$$

לכן, לפי ב, $b=(a+b^2+2b+1)/ab$. מכאן $b=-1$.

ה. השמיניה מכילה ארבעה אברים עוקבים מצורת a,b,b,a. מכאן, לפי (1), $a^2=2b+1$, ז"א $b=(a^2-1)/2$. שאר האברים מתקבלים לפי (1).

ו. אם הציר הנוסף שיך אף הוא למספר שבור ומאונך לראשון, יהיה לפי (1), $b^2=2a+1$ ולפי (3) $a^2=b^2$. מכאן $a^2=2a+1$ ומכאן $a=b=1\pm\sqrt{2}$.
בכל המקרים האחרים (הציר הנוסף שיך למספר שבור ונטוי לראשון בזוית של 45°, או שיך למספר שלם ונטוי לראשון בזוית של $22,5^\circ$ או בזוית של $67,5^\circ$) יהיו כל האברים שוים ולפי (1) נקבל שוב $a^2=2a+1$.

שמיניות טבעיות

זבולון טוכמן

אראה כאן כי אין סדרות של מספרים טבעיים

$$u_1=a,\ u_2=b,\ u_3=c,\ u_4=d,\ u_5=e,\ u_6=f,\ u_7=g,\ u_8=h,\dots$$

המקיימים את הנוסחה

$$u_n u_{n-3}=u_{n-1}+u_{n-2}+1, \qquad (1)$$

מלבד 5 הסדרות

$A=1,2,2,5,4,5,2,2,\dots$ $B=4,1,6,2,9,2,6,1,\dots$ $C=9,5,3,1,1,1,3,5,\dots$
$D=2,1,4,3,8,3,4,1,\dots$ $E=2,3,2,3,2,3,2,3,\dots$

כמוכח במאמר הקודם של דב ירדן, כל סדרה המקיימת את הנוסחה (1) היא בעלת מחזור שארכו 8. בין אברי המחזור נמצא בודאי אבר a שאינו קטן משבעת האחרים. יהיו b ו c שני האברים העוקבים ל a. בהתאם להנחתנו יהיה $a\geq b$, $a\geq c$. נוכל לראות את האברים a,b,c כתחלת הסדרה ונבחין בין המקרים הבאים:

1) $a=b\ \therefore\ da=a+c+1,\ a|c+1,\ c\leq a\leq c+1,\ a=c,\ c+1.$
11) $a=c\ \therefore\ a|a+1,\ a|1,\ a=1\ \therefore\ C.$
12) $a=c+1\ \therefore\ a\geq 2,\ c=a-1,\ d=2,\ ea=a+2,\ a|2,\ a=2\ \therefore\ A.$
2) $a>b.$
21) $a=c\ \therefore\ da=a+b+1,\ a|b+1,\ b<a\leq b+1,\ a=b+1,\ d=2,\ eb=b+4,\ b|4,\ b=1,2,4.$
211) $b=1,4\ \therefore\ A.$
212) $b=2\ \therefore\ E.$
22) $a>c.$
221) $b=c\ \therefore\ 2b+1=da>db\geq db+1,\ d<2,\ d=1,\ eb=b+2,\ b|2,\ b=1,2.$
2211) $b=1\ \therefore\ C.$
2212) $b=2\ \therefore\ A.$
222) $b>c\ \therefore\ da=b+c+1<a+(a-1)+1=2a,\ d<2,\ d=1,\ eb=c+2,\ b|c+2,\ c+1\leq b\leq c+2,$
$b=c+2,\ e=1,\ fc=3,\ c|3,\ c=1,3,\ f=3,1\ \therefore\ C.$
223) $b<c\ \therefore\ da=b+c+1<a+(a-1)+1=2a,\ d<2,\ d=1,\ a=b+c+1,\ hc=c+2b+2,$
$c|2(b+1),\ b+1\leq c\leq 2(b+1),\ c=b+1,\ 2(b+1).$
2231) $c=b+1\ \therefore\ eb=b+3,\ b|3,\ b=1,3,\ c=2,4\ \therefore\ D.$
2232) $c=2(b+1),\ eb=2(b+2),\ b|2,\ b=1,2,\ c=4,6\ \therefore\ B.$

חמישירת ושמיניות שלמות

תאודור מוצקין [1]

ידוע כי הסדרות המקימות את הנוסחה $u_n u_{n-2}=u_{n-1}+1$ או $u_n u_{n-3}=u_{n-1}+u_{n-2}+1$ הן בעלות מחזור שארכו 5 או 8 בהתאמה [2]. נקרא להן חמישיות ושמיניות. נקבע כאן את כל החמישיות של אברים שלמים ואת כל השמיניות של אברים שלמים שלא כלם טבעיים. השמיניות של אברים טבעיים נקבעו במאמר הקודם של ז. טוכמן.

<u>משפט 1.</u> החמישיה היחידה E של מספרים טבעיים היא

$$1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\dots \tag{1}$$

<u>הוכחה.</u> יהיו a,b,c,d 4 אברים עוקבים של E. קים $ac=b+1$, $bd=c+1$. לכן $c\leq b+1$, $b\leq c+1$, ז"א $b-1\leq c\leq b+1$. מכאן $c=b-1,b,b+1$. אם $c=b-1$, נקבל $c=2/(a-1)$, $d=1$. מכאן $a-1=1,2$, ז"א $c=2,1$, כלומר (1). אם $c=b$, נקבל $a=(b+1)/b$. מכאן $c=b=1$, כלומר שוב (1). $c=b+1$ נותן חמישיות הפוכות לנתנות ע"י $c=b-1$, כלומר שוב רק (1).

<u>משפט 2.</u> החמישיות היחידות $\bar{E}$ של מספרים שלמים שלא כלם טבעיים הן

$$0,\ -1,\ a,\ -a-1,\ -1,\dots, \tag{2}$$

באשר a מספר שלם כלשהו.

<u>הוכחה.</u> יהיו a,b,c,d 4 אברים עוקבים של $\bar{E}$. אם $\bar{E}$ מכילה אבר $b=-1$, יהיה $ac=b+1=0$ ולכן אחד מן האברים a,c שוה לאפס ולהפך, אם אחד מן האברים a,c שוה לאפס, יהיה $b=-1$, כלומר (2). נוכל אפוא להניח כי b,c שונים מאפס ולא שניהם חיוביים. לכן, אם $b>0$, יהיה $c<0$. מ $ac=b+1$, $bd=c+1$ יוצא $-c\leq b+1$, $b\leq|c+1|<-c+1$, ז"א $b-1<-c\leq b+1$. אם $-c=b$, נקבל מתוך $db=-b+1$ כי $b=1$ ולכן $c=-1$. אם $-c=b+1$, נקבל $d=-1$. אם $c<0$, $b<0$, נקבל $b-1<-c<b+1$ ז"א $-c=b$ ומתוך $db=-b+1$ נקבל $b=-1$.

<u>משפט 3.</u> השמיניות היחידות H של מספרים שלמים שיש ביניהם מספרים שליליים אבל לא אפסים הן:

$$a,-1,a,1,-a-2,-1,-a-2,1,\dots, \tag{3}$$

$$-a,-1,a,-1,-a,-1,a,-1,\dots, \tag{4}$$

באשר a מספר שלם כלשהו שונה מאפס.

<u>הוכחה.</u> אם H מכילה אבר $u_0=-1$, יהיה $u_{-2}=u_{-1}/u_1$, $u_2=u_1/u_{-1}$ ולכן $u_1=\pm u_{-1}$. השויון בסימן + נותן (3) ובסימן - (4). ואולם כל H מכילה -1. באמת כל H מכילה אבר חיובי. כי אם u_n, u_{n+1}, u_{n+2} הם 3 אברים שליליים עוקבים של H, יהיה $u_{n+1}+u_{n+2}+1<0$ ולכן $u_{n+3}=(u_{n+1}+u_{n+2}+1)/u_n>0$. לכן מכילה H זוג אברים $u_2=-b<0$, $u_1=a>0$. נבחין בין המקרים הבאים:

1) $u_4=d>0 \therefore 0<ad+b-1=u_3\leq|u_3u_0|=|a-b+1| \therefore ad+b-1\leq a-b+1 \therefore ad+2b\leq a+2 \therefore b=1.$

2) $u_4=-d<0.$

21) $a\geq b \therefore 0<a-b+1\leq ad-b+1=|u_3|\leq|u_3u_0|=a-b+1 \therefore d=1.$

22) $a<b \therefore 0\geq a-b+1=u_3u_0 \therefore 0>a-b+1.$

221) $ad-b+1>0 \therefore u_3<0,\ 0<u_0=(b-a-1)/(ad-b+1)<b/1=b$
$\therefore 0<u_0+a+1<b+b=2b,\ 0>u_{-1}=(u_0+a+1)/(-b)>2b/(-b)=-2$
$\therefore u_{-1}=-1.$

222) $ad-b+1<0 \therefore u_3>0,\ d<(b-1)/a\leq b-1<b \therefore u_2<u_4.$

נשים את הזוג $u_3>0$, $u_4<0$ במקום u_1, u_2. נגיע ממנו או לאחד המקרים הקודמים, המספקים -1, או שוב לזוג חדש $u_6<0$, $u_5>0$, באשר $u_4<u_6$, וכן הלאה. נגיע איפוא ל -1 או באחד המקרים הקודמים, או מתוך הסדרה

$$u_2<u_4<u_6<\dots<u_{2k}=-1.$$

---

1) מאמר זה נוסח על ידי לפי רשימות שרשמתי בזמנן מפי ד"ר מוצקין. המקרה 22 בהוכחת משפט 3 (והמסתעפים ממנו 221 ו 222) שהיה חסר ברשימות אלו הושלם - בהעדרו של ד"ר מוצקין מן הארץ - לפי רעיון של ז. טוכמן.
דב ירדן.

2) ראה דב ירדן, סדרות-נסיגה לא-לינאריות בעלות מחזור שארכו 8, רבעון למתמטיקה 2 (תשי"ח), עמ' 48.

<u>משפט 4.</u> השמיניות היחידות המכילות אפסים הן:

(5) $$0, -1, 0, a, -a-1, -ab, -b-1, b, \dots$$

<u>הוכחה.</u>

$$u_n=0 \therefore u_{n\pm 3}\cdot 0=u_{n\pm 2}+u_{n\pm 1}+1 \therefore u_{n\pm 2}=-u_{n\pm 1}-1 \therefore u_{n\mp 1}=(u_{n\pm 1}+1)/(-u_{n\pm 1}-1).$$

אם $u_{n+1}\neq -1$, נקבל $u_{n-1}=-1$ ו $u_{n-2}=0$; אם $u_{n-1}\neq -1$, נקבל $u_{n+1}=-1$ ו $u_{n+2}=0$, כלומר (5). אם $u_{n-1}=u_{n+1}=-1$, נקבל $u_{n-2}=u_{n+2}=0$, כלומר שוב (5).

היחידות במינה של החמישית והשמינית

תאודור מוצקין

1. אראה כאן שהסדרה המוגדרת על-ידי

(1) $$u_k u_{k+n+1}=u_{k+1}+u_{k+2}+\dots+u_{k+n}+1$$

בערכי-התחלה $u_0,\dots,u_n$ כלליים, אינה מחזורית בשביל $n\geq 3$. בשביל $n=0$, $n=1$ ו $n=2$ יש לה בהתאמה המחזור 2, 5 ו 8.[1]

כמובן יכולים להיות ערכי-התחלה מיוחדים, שבשבילם תהא הסדרה מחזורית, ואפילו בעלת איברים שוים בלבד. במקרה האחרון צריך הערך המשותף של האיברים לקים את התנאי

(2) $$a^2=na+1;$$

נסמן

$$a'=(n+\sqrt{n^2+4})/2, \quad a''=(n-\sqrt{n^2+4})/2.$$

אם $u_k=a+d_k$, נקבל מ (1)

$$d_k d_{k+n+1}+a(d_k+d_{k+n+1})=d_{k+1}+\dots+d_{k+n}.$$

בשביל עוכים קטנים של $d_0,\dots,d_n$ מתקרב למעבר הבירציונלי ב $n+1$ ממדים, המקשר את $d_0,\dots,d_n$ עם $d_1,\dots,d_{n+1}$, מעבר אפיני, הצריך להיות מחזורי, כאשר המעבר הבירציונלי הוא מחזורי (אף-על-פי שאין זה עוד תנאי מספיק לכך). כלומר הקשר הלינארי

$$a(d_k+d_{k+n+1})=d_{k+1}+\dots+d_{k+n}$$

היה צריך להגדיר סדרה מחזורית. זה קורה כידוע, אם ורק אם שרשי המשואה האפינית

(3) $$a(1+d^{n+1})=d+d^2+\dots+d^n$$

שונים ביניהם וכולם שרשי-יחידה. שאין הדבר כך כאשר $n\geq 3$ אפשר להראות בשני אפנים.

2. חלוץ של a מ (2) ו (3) נותן

(4) $$(d+d^2+\dots+d^n)=n(d+d^2+\dots+d^n)(1+d^{n+1})+(1+d^{n+1})^2.$$

בשביל $a=a''$ שוה סכום השרשים $d''_0+\dots+d''_n$ של (3) ל

$$1/a''=-a'=-n+a'', \quad -1\leq a''<0.$$

מכיון שכל שורש מדומה מופיע יחד עם הצמוד, יוצא, אם כל $|d''_k|=1$, ואם R מסמן את החלק הממשי, ש $t=\sum R(d''_k+1)<1$ וכל $R(d''_k)<-1/2$. לכן לפחות מחציתם של שרשי (4) היו צריכים להיות על השליש הפתוח השמאלי T של מעגל-היחידה. אך אם כל שרשי (4) הם שרשי-יחידה, אז הם מערכת אחת, או מערכות אחדות של שרשים קדומים של היחידה. ואולם בכל מערכת כזאת נמצאים, כפי שנראה ב 3, פחות מחצי השרשים T, פרט במקרה של מערכת השיכת לאחד המעריכים

---

1) ראה דב ירדן, סדרות-נסיגה לא-לינאריות בעלות מחזור שארכו 8, רבעון למתמטיקה 2 (תש"ח), עמ' 48. אגב, בו-בזמן שהחמישיות מופיעות כיחסים כפולים של חמש נקודות, ועקב זה בקשר עם כלל Napier (ראה מאמרי הנזכר אצל ירדן, ואת הספרות הנוספת הנזכרת ברפרט על מאמרי ב Math. Reviews כרך 7 עמ' 258), טרם נמצאה תצורה מתמטית אשר בה מופיעות השמיניות.

$s=5,8,12,20,30$ שאז בדיוק מחציתם נמצאים ב T, ובמקרה של מעריך 2, הנותן שורש של (3) בשביל כל n זוגי ובשביל שני הערכים של a. לכן היו השרשים של (3) צריכים להיות מחציות שמאליות של מערכות, השיכות למעריכים הנ"ל, ואולי עוד המספר 1-. השכלות הבאות, שבראשונה מהן מחושב t בתור $2\sum(1-\cos\alpha)$, באשר α היא הזוית מכל שורש ב T עד 1-,

s	12	5	5,12	8	30	8,12	20	5,8
t	0.268	0.382	0.450	0.586	0.8348	0.854	0.9222	0.967752

n	1	2	6	7	12	13	30	31
$a''+1=\frac{n}{2}+1-\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4}$	0.382	0.586	0.838	0.860	0.917	0.924	0.9667	0.967776

מראות, שבאים בחשבון רק הערכים $n=1$ ו $n=2$, כאשר אמרנו.

3. עלינו להראות כאן, שאם $\varphi(n)$ ו $\psi(n)$ מסמנים את מספר המספרים הזרים ל n ברוח מ 1 עד n ומ 1 עד $n/3$, נכון לכל $n>2$ אי-השויון $\psi\geqslant\varphi/4$, ופרט ל $n=2,5,8,12,20,30$ גם $\psi>\varphi/4$.

יהא
$$n=\prod p_k^{\alpha_k},\ k=1,\dots,\nu,\quad \mu=\sum\alpha_k.$$
כידוע
$$\varphi(n)=n-\sum n/p_k+\sum n/p_jp_k-+\dots$$
ובאפן דומה
$$\psi(n)=[n/3]-\sum[n/3p_k]+-\dots\ .$$
מכאן
$$\varphi/3-\psi=\sum\pm\varepsilon/3,\quad \varepsilon(n/d)=n/d-3[n/3d]=0,1,2.$$
אם $p_k=31+1$ אז $\varepsilon(n/p_kd)=\varepsilon(n/d)$, ויוצא $\psi=\varphi/3$. אם n מתחלק ב 9, אז כל $\varepsilon=0$, ושוב $\psi=\varphi/3$. אם כל $p_k\equiv-1 \pmod 3$, אז
$$\sum\pm\varepsilon/3=\varepsilon(n)/3-\sum(1-\varepsilon(n)/3)+-\dots;$$
מכאן בשביל μ זוגי
$$\varphi/3-\psi=1/3-\sum 2/3+-\dots=\sum\pm1/2-\sum1/6=-2^\nu/6$$
ובאפן דומה בשביל μ אי-זוגי
$$\varphi/3-\psi=2/3-\sum1/3+-\dots=\sum\pm1/2+\sum1/6=2^\nu/6.$$
אם $p_1=3$ וכל p_k אחר הוא 1- מודולו 3, אז
$$\varphi(n)/3-\psi(n)=-(\varphi(n/3)/3-\psi(n/3))$$
ולכן כאן
$$\varphi/3-\psi=-(-1)^\mu 2^{\nu-1}/6.$$
סוף-סוף אם $n=3$ אז $\varphi/3-\psi=-1/3$.

אם $\psi\leq\varphi/4$ אז $\psi<\varphi/3$, $\mu\equi 1 \pmod 2$,
$$\varphi/3-2^\nu/6\leq\varphi/4,\ \varphi\leq2^{\nu+1}.$$
יהא $\varphi(p_k^{\alpha_k})=\varphi_k$, $\varphi_1\leq\varphi_2\leq\dots\leq\varphi_\nu$. נקבל או
$$\nu=1,\ n=2^3,\ 5$$
או
$$\nu>1,\ \varphi_1=1,\ 2.\dots.2.4.4\geqslant\varphi_2.\dots.\varphi_\nu,\ n=2.3.5$$
או
$$\nu>1,\ \varphi_1>1,\ 2\ \dots\ 2.4\geqslant\varphi_1.\dots.\varphi_\nu,\ n=2^2.3,\ 2^2.5.$$
לכל אחד מ 5 ערכי n אלו מתאשר $\psi=\varphi/4$.

4. יותר פשוט להראות ישר שאם $n\geqslant3$, $a=a''=(n-\sqrt{n^2+4})/2$, קיים $d<-1$ המקיים (3). ובאמת אם $d\longrightarrow-\infty$ ו n זוגי (אי-זוגי), גדול (קטן) האגף השמאלי של (3) מן הימני. אך אם $d=2$ ו $a''>-1/3$ (וכבר $a=-0.306$ כאשר $n=3$) ואם n אי-זוגי, אז
$$(-a)(1+1/2^{n+1})<(1+1/2^n)/3;$$
ואם n זוגי
$$(-a)(1-1/2^{n+1})<(1-1/2^n)/3,$$
כי $a>30/31.(-1/3)$.

לוח סדרות נסיגה לינאריות בינריות מסדר 3

דב ירדן ואלכסנדר כץ

במדורות $U_{\pm n}$, $V_{\pm n}$, $\bar{U}_{\pm n}$, $\bar{V}_{\pm n}$ משורטטים מספרים ראשוניים. במדור n – חזקות של מספרים ראשוניים. הגורם הראשוני הקטן ביותר של $\bar{V}_{-62}/2 = 9803919989$ גדול מ 21467.

V_{-n} פרוק	V_{-n}	V_n פרוק	$V_n=V_{n-2}+V_{n-3}$	n	U_n פרוק	$U_n=U_{n-2}+U_{n-3}$	U_{-n} פרוק	U_{-n}
3	3	3	3	0		0		0
	-1		0	1		0		1
	1	2	2	2		1		-1
2	2	3	3	3		0		1
3	-3	2	2	4		1		0
2^2	4	5	5	5		1		-1
2	-2	5	5	6		1	2	2
	-1	7	7	7	2	2	2	-2
5	5	2.5	10	8	2	2		1
7	-7	$2^2.3$	12	9	3	3		1
2.3	6	17	17	10	2^2	4	3	-3
	-1	2.11	22	11	5	5	2^2	4
2.3	-6	29	29	12	7	7	3	-3
$2^2.3$	12	3.13	39	13	3^2	9		0
13	-13	3.17	51	14	$2^2.3$	12	2^2	4
7	7	$2^2.17$	68	15	2^4	16	7	-7
5	5	$2.3^2.5$	90	16	3.7	21	7	7
2.3^2	-18	7.17	119	17	$2^2.7$	28	3	-3
5^2	25	2.79	158	18	37	37	2^2	-4
$2^2.5$	-20	11.19	209	19	7^2	49	11	11
2	2	277	277	20	5.13	65	2.7	-14
23	23	367	367	21	2.43	86	2.5	10
43	-43	2.3^5	486	22	2.3.19	114		1
$3^2.5$	45	$2^2.7.23$	644	23	151	151	3.5	-15
2.11	-22	853	853	24	$2^3.5^2$	200	5^2	25
3.7	-21	2.5.113	1130	25	5.53	265	$2^3.3$	-24
2.3.11	66	3.499	1497	26	$3^3.13$	351	3^2	9
$2^3.11$	-88	3.661	1983	27	3.5.31	465	2^4	16
67	67	37.71	2627	28	$2^3.7.11$	616	$2^3.5$	-40
	-1	$2^3.3.5.29$	3480	29	$2^4.3.17$	816	7^2	49
87	-87	2.5.461	4610	30	23.47	1081	3.11	-33
2.7.11	154	31.197	6107	31	$2^3.179$	1432	7	-7
5.31	-155	2.5.809	8090	32	7.271	1897	$2^3.7$	56
$2^2.17$	68	7.1531	10717	33	7.359	2513	89	-89
2.43	86	14197	14197	34	3329	3329	2.41	82
241	-241	3.6269	18807	35	$2.3^2.5.7^2$	4410	2.13	-26
3.103	309	2.12457	24914	36	2.23.127	5842	$3^2.7$	-63
223	-223	$2^2.37.223$	33004	37	71.109	7739	5.29	145
2.3^2	-18	43721	43721	38	$2^2.11.233$	10252	$3^2.19$	-171
3.109	327	$2.3.7^2.197$	57918	39	$3^3.503$	13581	$2^2.3^3$	108
$2.5^2.11$	-550	$3^2.5^2.11.31$	76725	40	$3^2.1999$	17991	37	37
$2^2.7.19$	532	37.41.67	101639	41	23833	23833	$2^4.13$	-208
5.41	-205	3.37.1213	134643	42	$2^2.3^2.877$	31572	$2^2.79$	316
3.5.23	-345	$2^2.17.43.61$	178364	43	$2^5.1307$	41824	$3^2.31$	-279
877	877	2.31.37.103	236282	44	5.7.1583	55405	71	71
2.541	-1082	23.31.439	313007	45	$2^2.59.311$	73396	5.7^2	245
11.67	737	2.151.1373	414646	46	11.8839	97229	$2^2.131$	-524
$2^2.5.7$	140	13.29.31.47	549281	47	19.6779	128801	5.7.17	595
2.13.47	-1222	3.242551	727653	48	$3.5^4.7.13$	170625	$2.5^2.7$	-350
3.653	1959	5.7.27541	963935	49	2.5.7.3229	226030	2.3.29	-174
17.107	-1819	2.163.3917	1276942	50	2.149713	299426	769	769
3.199	597	$2^2.422897$	1691588	51	$5.7^2.1619$	396655	3.373	-1119
2.3.227	1362	3.746959	2240877	52	$2^4.3^2.41.89$	525456	$3^3.5.7$	945
3181	-3181	2.3.5.53.1867	2968530	53	3.37.6271	696081	$2^4.11$	-176
2.1889	3778	5.89.8837	3932465	54	59.15629	922111	23.41	-943
$2^2.17.71$	-2416	$3^2.7.43.641$	5209407	55	3.407179	1221537	$2^5.59$	1888
$3^2.5.17$	-765	5.1380199	6900995	56	$2^4.19.5323$	1618192	$2^4.3.43$	2064
7.11.59	4543	$2^4.743.769$	9141872	57	$2^5.13.5153$	2143648	31.97	-3007
6959	-6959	2.6055201	12110402	58	59.48131	2839729	5.11.89	4895
2.19.163	6194	37.59.7349	16042867	59	$2^4.5.59.797$	3761840	19.149	-2831
13.127	-1651	2.10626137	21252274	60	7.19.89.421	4983377	$2^4.11$	-176
$2^2.1327$	-5308	$3^2.19.61.2699$	28153269	61	3.13.19.59.151	6601569	11.461	5071
$2.3^4.71$	11502	13.2868357	37295141	62	13.107.6287	8745217	$2.3^2.439$	-7902
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	63	[illegible]	11584946	2.3863	7726

$\bar{V}_{-n}$ פרוק	$\bar{V}_{-n}$		$\bar{V}_n=-\bar{V}_{n-2}+\bar{V}_{n-3}$	n		$\bar{U}_n=-\bar{U}_{n-2}+\bar{U}_{n-3}$	$\bar{U}_{-n}$ פרוק	$\bar{U}_{-n}$
3	3	3	3	0		0		0
	1		0	1		0		1
	1	2	-2	2		1		1
2^2	4	3	3	3		0		1
5	5	2	2	4		-1	2	2
2.3	6	5	-5	5		1	3	3
2.5	10		1	6		1	2^2	4
3.5	15	7	7	7	2	-2	2.3	6
3.7	21	2.3	-6	8		0	3^2	9
31	31	2.3	-6	9	3	3	13	13
2.23	46	13	13	10	2	-2	19	19
67	67		0	11	3	-3	$2^2.7$	28
2.7^2	98	19	-19	12	5	5	41	41
$2^4.3^2$	144	13	13	13		1	$2^2.3.5$	60
211	211	19	19	14	2^3	-8	$2^3.11$	88
3.103	309	2^5	-32	15	2^2	4	3.43	129
3.151	453	2.3	-6	16	3^2	9	$3^3.7$	189
$2^3.83$	664	3.17	51	17	$2^2.3$	-12	277	277
7.139	973	2.13	-26	18	5	-5	2.7.29	406
2.23.31	1426	3.19	-57	19	3.7	21	5.7.17	595
2.5.11.19	2090	7.11	77	20	7	-7	$2^3.109$	872
3.1021	3063	31	31	21	2.13	-26	$2.3^2.71$	1278
67^2	4489	2.67	-134	22	$2^2.7$	28	1873	1873
$3^2.17.43$	6579	2.23	46	23	19	19	$3^2.5.61$	2745
2.3.1607	9642	3.5.11	165	24	2.3^3	-54	$3^3.149$	4023
13.1087	14131	$2^2.3^2.5$	-180	25	3^2	9	$2^3.11.67$	5896
2.5.19.109	20710	7.17	-119	26	73	73	8641	8641
$2^4.7.271$	30352	3.5.23	345	27	$3^2.7$	-63	$2^3.1583$	12664
44483	44483	61	-61	28	2^6	-64	$2^7.5.29$	18560
3.31.701	65193	$2^4.29$	-464	29	$2^3.17$	136	3.9067	27201
5.97.197	95545	2.7.29	406	30		1	5.7.17.67	39865
$2^2.3.7.1667$	140028	13.31	403	31	$2^3.5^2$	-200	$3.5^2.19.41$	58425
3.67.1021	205221	2.3.5.29	-870	32	$3^3.5$	135	$2.3^2.67.71$	85626
2.150383	300766	3	3	33	3.67	201	67.1873	125491
2.433.509	440794	19.67	1273	34	5.67	-335	$2^2.45979$	183916
5.47.2749	646015	$3^2.97$	-873	35	2.3.11	-66	2.7.13.1481	269542
11.17.61.83	946781	2.5.127	-1270	36	$2^3.67$	536	31.12743	395033
$3.5^2.7.881$	1387575	2.29.37	2146	37	269	-269	3.7.19.1451	578949
2.5.13.15643	2033590	397	397	38	2.7.43	-602	7.47.2579	848491
3.31.73.439	2980371	$2^3.7.61$	-3416	39	5.7.23	805	$2^2.3.173.599$	1243524
$2.3.11.17^2.229$	4367946	3.11.53	1749	40	$3^2.37$	333	$3^3.67499$	1822473
$2^9.12503$	6401536	3.31.41	3813	41	3.7.67	-1407	$2^2.667741$	2670964
23.41.9949	9381907	5.1033	-5165	42	$2^3.59$	472	$2^3.17.107.269$	3914488
13.1057681	13749853	$2^4.3.43$	-2064	43	$2^2.3.5.29$	1740	37.47.3299	5736961
67.167.1801	20151389	2.67^2	8978	44	1879	-1879	$5^2.336317$	8407925
$2^4.3.13.19.47.53$	29533296	7.443	-3101	45	$2^2.317$	-1268	$3^2.47.29131$	12322413
7.13.475639	43283149	2.5521	-11042	46	7.11.47	3619	2.47.192121	18059374
$2.3^2.191.18451$	63434538	47.257	12079	47	13.47	-611	$3^2.53.55487$	26467299
2.3.59.262621	92967834	3.2647	7941	48	$3^3.181$	-4887	$2^4.3^3.13.6907$	38789712
11.31.37.10719	136250983	$3^2.7.367$	-23121	49	$2.3^2.5.47$	4230	2.7.359.11311	56849086
7.28526503	199685521	2.2069	4138	50	$2^2.1069$	4276	5.3851.4327	83316385
5.29.2018299	292653355	2.3.31.167	31062	51	$3^2.1013$	-9117	257.557.853	122106097
2.214452169	428904338	27259	-27259	52	2.23	-46	11.16268653	178955183
3.1301.161053	628589859	$2^2.53.127$	-26924	53	59.227	13393	$2^4.3.13.420307$	262271568
2.460621607	921243214	58321	58321	54	47.193	-9071	5.7.41.277.967	384377665
$2^5.13.67.48441$	350147552	5.47	-335	55	89.151	-13439	$2^4.3.13.902777$	563332848
3.7.71.79.107.157	1978737411	3.5.5683	-85245	56	$2^6.3^3.13$	22464	$2^6.3^2.7.13.19.829$	825604416
$5^4.1699.2731$	2899980625	$2^5.3.13.47$	58656	57	$2^4.3.7.13$	4368	7.11.73.215261	1209982081
101.269.311.503	4250128177	2.5.7.1213	84910	58	7.23.223	-35903	67.4271.6197	1773314929
$2^2.11^2.31.415147$	6228865588	$3^2.59.271$	-143901	59	$2^4.3.13.29$	18096	5.11.47253079	2598919345
59.154726207	9128846213	2.13127	-26254	60	7.11.523	40271	2.11.367.471749	3808901426
$2.3^3.5172328759$	13378974390	$11^2.31.61$	228811	61	11.4909	-53999	3.5.43.1361.6359	5582216355
	19607839978	71.1657	-117647	62	$5^2.887$	-22175	$2^2.5^2.83.985679$	8181135700
3.1097.8731901	28736686191	5.139.367	-255065	63	2.5.11.857	94270	2.3.23.67.1296781	11990037126
3.43.6133.53233	42115660581	2.3.7.73.113	346458	64	$2^4.3^2.13.17$	-31824	$3^4.401.541001$	17572253481