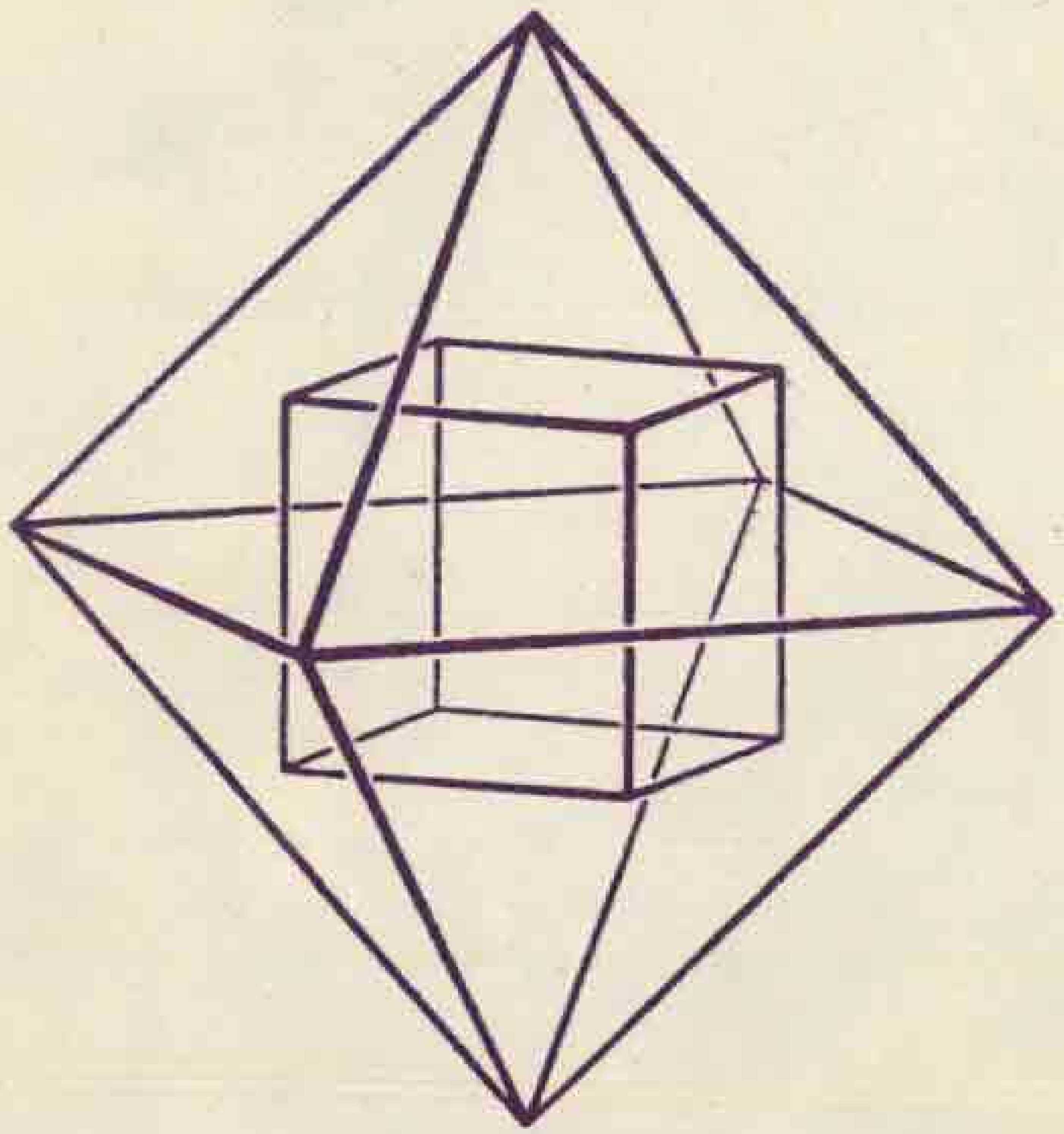


כרך 2 ת"א, אלול תשכ"ג - אוגוסט 1963 מס' 4

יוצא לאור בחסות

ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

והמרכזיה הפדגוגית העל יסודית ת"א

העורך: י. דוד

המערכת: א. גינזבורג, מ. כהן, צ. שור

דבר המערכת אל הקוראים

בהתחדש שנת הלמודים, אנו מברכים את קוראינו הותיקים והחדשים, ומאחלים לכלם הצלחה בלמודים.

הקוראים החדשים מוזמנים להשתתף בתחרות המתמדת לפתרון בעיות, שבה ניתן להתחיל בכל עת, ולצבור את מספר הנקודות הדרוש להשגת פרסים.

בקשתנו מהמורים למתמטיקה ומהתלמידים לעזור בהפצת "הגליונות" ולהשתתף באפן פעיל בכתיבת מאמרים או בהצעת בעיות מענינות.

לבקשת רבים הדפסנו מחדש את הגליונות שאזלו, כך שאפשר עתה לרכש את גליונות כרך א' וכרך ב' בשלמותם. מחיר כרך א' -.4 ל"י; חוברת בודדת - 0.50 ל"י.

נא להשתמש בחשבון המערכת בבנק הדאר.

אנו תקוה שקריאת ה"גליונות" תרחיב את אפקם המתמטי של הקוראים ותספק חמר לעיון ולמחשבה, שאינו נכלל בתכנית הלמודים.

"בעיה סינית"

17 שודדי ים חלקו ביניהם את שללם - מטבעות זהב - שוה בשוה, נותרו 3 מטבעות והחליטו לתתן לטבחם הסיני ויק-טו. לפני שהספיקו לחלקן נטרפה ספינתם וששה שודדים טבעו. חלקו את המטבעות מחדש, ועתה נשארו 4 מטבעות בשביל הטבח. במריבה שפרצה בין השודדים נהרגו חמישה, ובחלוקה נוספת נשארו לטבח 5 מטבעות. אבל הלה מכעס על קמצנותם הרעיל את כולם באמצעות מאכל פטריות, כך שירש את כל הזהב.

מהו המספר הקטן ביותר של מטבעות המקיים את התנאים הנ"ל?

ראה תשובה בעמ' 27

בעיה ופתרונה (מאת עמוס אלטשילר)

מצא את הגילים.

בחדר נמצאים: ראובן, שמעון, שרה, רבקה ורחל.
אומר ראובן לשמעון: מצא נא את גילי הבנות, אם ידוע לך כי סכום גיליהן כפליים מגילך, ומכפלת גיליהן - 2450.
שמעון מהרהר מעט, ואומר לראובן: מצטער, אך אי אפשר לפתור את שאלתך.
עונה ראובן לשמעון: הצדק אתך. חסר לך נתון נוסף. ובכן אתן נתון נוסף, שיספיק לך: אני הוא המבוגר מבין חמשתנו.
ועתה, מאחר וקבלת נתון נוסף, אמר לי גם בן כמה אני.
שמעון הרהר מעט, ומצא את גילי ראובן, שרה, רבקה ורחל.
מה גילו של ראובן?
(כל הגילים נתנים במספרים שלמים, ואף אחת מהבנות אינה בת שנה אחת.)

ראה תשובה בעמ' 28

הצגת המספרים האי-שליליים. (המשך)

מאת י. שונהיים

5. השיטה הבריטית (שיטת קנטור).

בהתחלת מאמרנו הקודם בנושא זה, שהופיע בחוברת הקודמת של ה"גליונות" עיינו בשיטות שונות להצגת מספרים טבעיים, בכולם מופיעים הבסיס והספרות של השיטה. הבסיס היה קבוצת החזקות של מספר $b \neq 1$ והספרות היו המספרים הקטנים מ- b.

שיטה כללית יותר קבע קנטור. בשיטתו הבסיס מורכב ממכפלות לפי הכלל הבא:

נסמן את אברי הבסיס ב-

$$\ldots, B_n, \ldots, B_1, B_0$$

תהי

$$\ldots, b_n, \ldots, b_1, b_0 = 1 \qquad (i=1,2,\ldots,\ b_i > 1)$$

סדרת מספרים נתונה, אז

$$B_i = b_i \cdot b_{i-1} \cdot \ldots \cdot b_1 \cdot b_0$$

בשיטה זו שייכת לכל איבר B_i של הבסיס קבוצה משלו של ספרות והיא קבוצת המספרים הקטנים מ- b_{i+1}.

לדוגמא נקח בתור סדרה נתונה את הסדרה:
1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
(סדרה שמתחילה ב-1 ובעקבותיו באים המספרים הראשוניים.) בשיטה של קנטור המורכבת לפי הסדרה הנ"ל איברי הבסיס הם:

$$B_0=1,\ B_1=2\cdot1,\ B_2=3\cdot2\cdot1,\ B_3=5\cdot3\cdot2\cdot1,\ B_4=7\cdot5\cdot3\cdot2\cdot1 \ldots$$

ואילו הספרות השייכות לאותם האיברים הן:

0,1 ל-B_0, 0,1,2 ל-B_1, 0,1,2,3,4 ל-B_2, ...

נסכם את הדוגמא הנ"ל בטבלה הבאה:

הסדרה הנתונה	1	2	3	5	7	11	13	17	...
איברי הבסיס	1	2	6	30	210	2310	30030	510510	...
הספרות	0,1	0,1,2	0,1,2 3,4.	0,1,2 3,4,5 6.	0,1,2 3,4,5 6,7,8 9,10.	0,1,2 3,4,5 6,7,8 9,10,11 12.	0,1,2 ... 13,14,15	. . .	

השיטה של קנטור היא הכללה של השיטות לפי בסיס b. אכן השיטה של קנטור, שעבורה הסדרה הנתונה היא הסדרה

$$\ldots, b, b, b, 1$$

היא שיטה לפי בסיס b, כי במקרה זה, $B_i = b^i$, והספרות הן המספרים B_i הקטנים מ- b.

נפנה עתה לשאלה, האם וכיצד אפשר להציג מספרים בשיטה של קנטור.

נאמר שמספר N מוצג בשיטה של קנטור לפי בסיס הסדרה B, $B = \{\ldots, b_2, b_1, 1\}$, אם הוא כתוב בצורה

$$N = a_n B_n + a_{n-1} B_{n-1} + \ldots + a_1 B_1 + a_0 B_0 \qquad (9)$$

כאשר

$$B_i = b_i \cdot b_{i-1} \cdot \ldots \cdot b_1 \cdot b_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$ ו $a_i < b_{i+1}$.

גם בשיטה זו אפשר לסמן את ההצגה (9) של המספר N בעזרת ספרותיו בלבד, בצורה

$$N = a_n a_{n-1} \ldots a_0 \quad (B)$$

לדוגמא הצגת המספר 199 בשיטה של קנטור לפי בסיס הסדרה

$$P = \{\ldots 7, 5, 3, 2, 1\}$$

היא

$$N = 6 \cdot 30 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

או בקצור

$$N = 6301 \ (P).$$

המשפטים על אפשרות וחד-ערכיות הצגת המספרים יהיו נכונים גם לגבי השיטות של קנטור. לא נביא כאן את ההוכחות, כי הן דומות להוכחות בשיטה העשרונית. נבין מיד את העובדות, שעליהן הן מבוססות, לאור פתרון הבעיות הבאות.

<u>בעיה 11.</u> כתוב את המספרים, שבין 4 ל-10 בשיטה של קנטור לפי הבסיס הנ"ל.

<u>פתרון:</u> (ע"י ספירה בשיטה של קנטור כלומר ע"י תוספת 1 למספר שכבר נכתב):

שיטה עשרונית	4	5	6	7	8	9	10
שיטה על קנטור	1.1 +2.2	1.1 +2.2	0.2+0.1 + 1.6	+0.2+1.1 + 1.6	1.2+0.1 + 1.6	1.2+1.1 + 1.6	2.2+0.1 + 1.6
כתיב קצר	20	21	100	101	110	111	120

בעיה 12. כתוב את המספר 251 בשיטת קנטור לפי בסיס הסדרה הנ"ל.

פתרון: (ע"י מעבר ישיר, בלי ספירה, מהשיטה העשרונית לשיטה של קנטור). נסמן את המספרים הראשוניים לפי סדר גודלם ב-

$$p_1 = 2, \ p_2 = 3, \ \ldots, \ p_n, \ \ldots$$

כדי לכתוב את המספר 251 בצורה

$$251 = a_n p_n \cdot p_{n-1} \cdot \ldots \cdot p_1 \cdot 1 + a_{n-1} p_{n-1} \cdot p_{n-2} \cdot \ldots \cdot p_1 \cdot 1 \quad (10)$$
$$+ \ldots + a_3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + a_2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 \cdot 1 + a_o \cdot 1,$$

כאשר $a_i < p_{i+1}$, נשים לב שהאגף הימיני של ההצגה (10) מתפלג ל-

$$\{[(\ldots((a_n p_n + a_{n-1})\, p_{n-1} + a_{n-2})\, p_{n-2} + \ldots + a_3)\, 5 + a_2]\, 3 + a_1\}\, 2 + a_o \cdot 1$$

היות ו- $a_i < p_{i+1}$ נוכל לחשב את המספרים a_i כשאריות בשרשרת חלוקים כשהמחלקים הם איברי הסדרה P.

נסדר את הפעולות כמו בפתרון בעיות 1א.

	2	3	5	7	11	מחלק
251	125	41	8	1	0	מחולק מנה
1	2	1	1	1		שארית
11121						תשובה

בדיקה. (מעבר הפוך):

$$11121(P) = 1\cdot(7\cdot5\cdot3\cdot2\cdot1)+1(5\cdot3\cdot2\cdot1)+1\cdot(3\cdot2\cdot1)+2\cdot(2\cdot1)+1\cdot(1)=251.$$

אפשר להבין את הפתרון הנ"ל גם לאור הדוגמא הסתכלותית של הקופאי. במקרה זה, הקופאי יקבץ את המטבעות לראשונה לקבוצות של 2 מטבעות, אחר כך את הקבוצות המלאות לאגודות של 3 קבוצות וכו'. מספר המטבעות שלא תצטרפנה לקבוצה מלאה של 2 יהיה הספרה האחרונה a_o, מספר הקבוצות שלא תצטרפנה לאגודה מלאה יהיה הספרה לפני האחרונה a_1 בהצגת מספר המטבעות בשיטה של קנטור, לפי בסיס הסדרה P.

השיטה של קנטור נקראת גם שיטה בריטית, כי היא מתאימה להצגת המספרים המכונים ביחידות מדידה בריטיות כמו שהשיטה העשרונית נועדה להצגת המספרים המכונים ביחידות עשרוניות.

לדוגמא, כדי לכתוב מספר מכונה ביחידות ברטיות אורך, שהם

1 mile = 8 furlong	1 furlong= 110 fathom	1 fathom= 2 yard	1 yard = 3 feet	1 foot = 12 inch	1 inch

נוח להשתמש בשיטה של קנטור לפי בסיס הסדרה $S = \{8,110,2,3,12,1\}$. בשיטה הזאת האורך L

L = 2 furlong 75 fathom 1 yard 8 inch

לדוגמה, וכתב 2 (75) 108 (S)

והוא שוה ל-

$2(110\cdot2\cdot3\cdot12\cdot1)+75\cdot(2\cdot3\cdot12\cdot1)+1\cdot(3\cdot12\cdot1)+0\cdot(12\cdot1)+8\cdot(1)$ inch.

בשיטה של קנטור לבצוע של הפעולות אין חשיבות מיוחדת, אמנם אפשר לבצע את פעולות החשבון אף בשיטה זו.

חשיבות השיטה היא עיונית. היא תתברר כשנביא כאן משפט כללי שלא הוכח ונתפרסם רק בזמן האחרון (1956) על ידי דה-ברוין (DE BRUIJN)

משפט של דה-ברוין

אם לכל מספר B_i מהסדרה $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$

שיכת קבוצת מספרים A_i ואם כל מספר N ניתן להצגה באופן חד-ערכי בצורה

$$N = a_nB_n + a_{n-1}B_{n-1} + \ldots + a_1B_1 + a_oB_o \qquad (11)$$

כאשר a_i איבר הקבוצה A_i - אז המספרים $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ הם איברים של הבסיס והמספרים מתוך הקבוצות A_i הם (פרט מקרי התנונות) הספרות של שיטת קנטור.

המשפט הנ"ל אומר, שהשיטה של קנטור היא השיטה הכללית ביותר להצגת מספרים בצורה (11). הוה אומר במיוחד שמספרים כלשהם $B_o, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ לא יכולים לשמש כבסיס להצגת מספרים בצורה (11) אך אם $B_i = b_i \cdot b_{i-1} \ldots b_1 \cdot b_o$ כאשר $b_o, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ מספרים נתונים $b_o = 1$, $b_i > 1$ עבור $i > o$.
הבעיה, הקשה מהקודמת, למצא את השיטה הכללית ביותר להצגת מספרים שלמים (כולל שליליים), טרם מצאה את פתרונה.

בסעיף הבא נכיר שיטות הצגה מבוססות על עקרון אחר לגמרי ונראה כיצד אפשר להשתמש בשיטה של קנטור כמפתח מעבר מהשיטות ההן לשיטה העשרונית. המשך בעמוד הבא.

בעיה ופתרונה

לפי חוק ירושה עתיק מתחלקת הירושה שוה בשוה בין הבנות והבנים אינם מקבלים שום דבר. תקנו את החוק כך, שאם ישנן n בנות, הבת הראשונה תקבל את החלק ה- n-י מהירושה, והשניה את החלק ה- n-י ממה שנשאר וכו' ומה שנשאר בסוף יתחלק בין הבנים. במשפחה אחת היו 10 בנות ובן אחד ובמשפחה שניה 20 בנות ובן אחד. באיזו משפחה קבל הבן חלק גדול יותר מן הירושה?

תשובה בעמוד 6

6. השיטה הצ׳כית.

בכל השיטות הקודמות הצגנו מספר נתון ע"י כך, שפלגנו אותו למחוברים, שהם כפולות של מספרים מסויימים. לכן השיטות הללו נקראות חבוריות-כפוליות. בהן כותבים את המספרים בספרות הצגתם.

בשיטה הצ׳כית נאפיין מספר ע"י השאריות שלו בחילוק למחלקים מסויימים.

אם נתונים מראש n מחלקים $m_1,\dots,m_n$ ומספר N, אז אפשר לחשב את השאריות שלו לפי המחלקים הנתונים. פעולות קביעת השאריות היא חד-ערכית. לדוגמא, יהיו 4,5,6 המחלקים ו-7 המספר N אז השאריות של 7 לפי המחלקים 4,5,6 הן 3,2,1. אולם 7 לא המספר היחידי, ששאריותיו הן 3,2,1 לפי 4,5,6. אכן למספר 67 אותן השאריות לפי אותם המחלקים. לעומת זאת, אין מספר N, ששאריותיו לפי 4,5,6 הן 3,2,2, מכיון שהשאריות של מספר כלשהוא N לפי 6 ו-4 שניהן זוגיות או שניהן אי-זוגיות.

שתי התופעות האחרונות לא תופענה אם נבחר קבוצת מחלקים מתאימה יותר ואם נסתפק מראש לאפיין את המספרים הקטנים ממכפלות המחלקים.

זאת היא מסקנה מהמשפט הבא, הידוע בחשבון כ-"משפט הסיני של השאריות" (נא לעיין גם בבעיה הסינית בגליון זה).

אם $m_1,\dots,m_n$ מספרים כך שכל שנים זרים זה לזה ואם $a_1,\dots,a_n$ מסדרים כך ש- $0\leq a_i<m_i$, $i=1,2,\dots,n$, אז קיים מספר אחד ורק אחד N , $0\leq N<m_1\cdot\ldots\cdot m_n$, כך ששאריותיו לפי המחלקים $m_1,\dots,m_n$ הן $a_1,\dots,a_n$

קבוצת מחלקים $m_1,\dots,m_n$, שמקיימת את התנאי של המשפט הקודם, יכולה לשמש יסוד לשיטת הצגה.

אכן, לא רק שנוכל לסמן מספר N , $0\leq N<m_1\cdot\ldots\cdot m_n$ בעזרת שאריותיו לפי המחלקים הנתונים, אלא, לפי המשפט הנ"ל גם כל קבוצת שאריות $a_1,\dots,a_n$ תסמן מספר מסוים M, $0\leq M<m_1\cdot\ldots\cdot m_n$.

שיטה להצגת מספרים כזאת, בעזרת השאריות של המספרים לפי המחלקים $m_1,\dots,m_n$ נקראת שיטה צ׳כית לפי המחלקים הנתונים.

לדוגמא, נרשום בלוח הבא את השאריות של המספרים N , $0\leq N<30$ לפי המחלקים 2,3,5. הן מהוות את הצגת המספרים האלה, בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים הנתונים.

המשך בעמוד הבא.

תשובה לבעיה מעמוד 5

במשפחה השניה יקבל הבן חלק גדול יותר.

אם נסמן את סכום הירושה ב- a.

יקבל הבן במשפחה הראשונה: $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}a = 0{,}3483a$

הבן במשפחה השניה: $\left(\frac{19}{20}\right)^{20}a = 0{,}3581\,a$

א שיטה עשרונית	שארית לפי 2	3	5	ההצגה הצ׳כית	א שיטה עשרונית	שארית לפי 2	3	5	ההצגה הצ׳כית
0	0	0	0	000	15	1	0	0	100
1	1	1	1	111	16	0	1	1	011
2	0	2	2	022	17	1	2	2	122
3	1	0	3	103	18	0	0	3	003
4	0	1	4	014	19	1	1	4	114
5	1	2	0	120	20	0	2	0	020
6	0	0	1	001	21	1	0	1	101
7	1	1	2	112	22	0	1	2	012
8	0	2	3	023	23	1	2	3	123
9	1	0	4	104	24	0	0	4	004
10	0	1	0	010	25	1	1	0	110
11	1	2	1	121	26	0	2	1	021
12	0	0	2	002	27	1	0	2	102
13	1	1	3	113	28	0	1	3	013
14	0	2	4	024	29	1	2	4	124

השיטה הצ׳כית הנ"ל מתאימה להצגת המספרים עד 30 בלבד. כדי להציג מספרים יותר גדולים, אפשר להוסיף לקבוצת המחלקים עוד מחלק. אם, לדוגמא, נוסיף למחלקים הקודמים את המחלק 7, נוכל להציג את המספרים עד 210. אם נוסיף עוד את המחלק 11, נוכל להציג את המספרים עד 2310 וכו׳. אפשרות אחרת להצגת מספרים גדולים היא לבחור מחלקים גדולים. למשל בשיטה הצ׳כית לפי שני המחלקים 100 ו־111 אפשר להציג את המספרים עד 11100.

בעיה 13. כתוב את המספר 1963 בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 2,3,5,7,11.

פתרון: 11335 מכיון שהשאריות של 1963 לפי המחלקים הנתונים הן 1,1,3,3,5 ו־1963 קטן מ־2310, מכפלת המחלקים.

בעיה 14. מצא את ההצגה העשרונית של המספר 123, שכתוב בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 3,4,5.

פתרון: כדי לפתור את הבעיה הזאת נמצא את פתרון הבעיה הסינית המתאימה: מצא מספר קטן מ־60 ששאריותיו לפי המחלקים 3,4,5 הן 1,2,3. הפתרון הוא 58. (עבור מציאת הפתרון ראה־נא את המאמר הנזכר של מר י. דוד). אתן בסוף המאמר הזה דרך אחרת למציאת הפתרון, שימצא בתוך השיטה, כלומר בעזרת פעולות, שיבוצעו בשיטה הצ׳כית עצמה.

כפי שראינו, המעבר משיטה צ׳כית לשיטה העשרונית די קשה. קושי אחר בשיטה הצ׳כית מופיע בהשוואת שני מספרים. לדוגמה, 001 מהלוח הנ"ל גדול מ־120.! כדי להשוות שני מספרים כתובים בשיטה צ׳כית צריכים להעבירם להצגה עשרונית או להצגה כפלית־חבורית אחרת, בה ההשוואה של שני מספרים היא מידית.

לעומת זאת, בצוע הפעולות בשיטה הצ׳כית נעשה בפשטות מפתיעה. הקלות הזאת נוצלה ע"י סבובודה המתמטיקאי השימושי הצ׳כי (מכאן שם השיטה) לבנית מכונות חשוב.

כלל החבור מבוסס על משפט החשבון הבא:

שארית הסכום שווה לשארית סכום השאריות של המחוברים.

נפעיל את המשפט הזה לכל מחלק בשיטה הצ׳כית לחוד ונקבל את הכלל:

כדי לחבר בשיטה צ׳כית שני מספרים שסכומם קטן ממכפלת המחלקים של השיטה, נחבר את השאריות לפי כל מחלק לחוד ונחשב את השארית של הסכום לפי המחלק המתאים.

למעשה פעולת החבור נעשית על סמך לוחות החבור של השאריות לפי המחלקים הנתונים. לדוגמה, לפי המחלקים 2,3,5 הלוחות הם:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	0

בעיה 15. חבר את המספרים 024 ו-013, הכתובים בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 2,3,5,-בהנחה שסכומם לא עולה על 29.

פתרון:

$$\begin{array}{r} 113 \\ +\underline{024} \\ 102, \end{array}$$

היות והשארית של 1 $(1=1+0)$ לפי 2 היא 1; שארית של 3 $(1+2=3)$ לפי 3 היא 0 והשארית של 7 $(3+4=7)$ לפי 5 היא 2 תוצאות שנובעות גם מלוחות החבור הנ"ל.

בדומה, כלל הכפל מבוסס על משפט החשבון הבא:

השארית של מכפלה שווה לשארית מכפלת הגורמים.

נפעיל את המשפט הנ"ל לכל מחלק בשיטה צ׳כית לחוד ונקבל את הכלל:

כדי להכפיל בשיטה צ׳כית שני מספרים שמכפלתם קטנה ממכפלת המחלקים של השיטה, נכפיל את השאריות לפי כל מחלק לחוד ונחשב את השארית של המכפלה לפי המחלק המתאים.

למעשה פעולת הכפל העשית על סמך לוחות הכפל של השאריות לפי המחלקים הנתונים. לדוגמא, לפי המחלקים 2,3,5 הלוחות הם:

×	0	1
0	0	0
1	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

בעיה 16. הכפל את המספרים 1241 ו-0240 הכתובים השיטה הצ׳כית לפי המחלקים 2,3,5,7, בהנחה שהמכפלה לא עולה על 209.

פתרון:

$$\begin{array}{r} 0240 \\ \times\underline{1214} \\ 0140 \end{array}$$

מכיון שהשארית של 0, $(0\times1=0)$ לפי 2 היא 0, השארית של 4 $(2\times2=4)$ לפי 3 היא 1 וכו׳. תוצאות שנובעות גם מלוחות הכפל המתאימות. (השארנו את הרכבת הלוחות לפי 7 לקורא).

בדיקה: ההצגה העשרונית של המספרים 0140, 1214, 0240 היא 154, 11, 14, ו-$154 = 14\times11$.

הערה: גם בפעולה זו מחשבים את התוצאות בכל עמוד לחוד ואין מעבר יחידות.

נשים לב, שבשתי הפעולות הנ"ל צריכים לדעת מראש, שתוצאת הפעולה היא קטנה ממכפלת מחלקי השיטה. אם בכל זאת נחבר או נכפיל, לפי הכללים הנ"ל, שני מספרים שסכומם או מכפלתם גדול או שווה למכפלת מחלקי השיטה, נקבל גם כך מספר מסויים, מוצג בשיטה הצ׳כית, אבל הוא לא יהיה הצגת הסכום או המכפלה של שני המספרים. לא נוכל להפעיל את המשפט הסיני. לדוגמה, ההצגות בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 2,3,5, של המספרים 19 ו-20 הן 114 ו-020. אם נחבר אותם לפי כלל החבור, בלי לשים לב שסכומם גדול מ-30, נקבל את המספר 104, שהוא ההצגה הצ׳כית של 9 ולא של 39.

נעבור עכשיו ללוחות הפעולות ההפוכות. מבט על לוחות החבור מראה שלוחות אלה קובעים גם את לוחות החסור. עבור המחלקים 2,3,5 לדוגמה, לוחות החסור הם:

-	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

-	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

-	0	1
0	0	1
1	1	0

כאשר המחסר נכתב בשורה הראשונה.

הפיכתו של לוח חבור ללוח חסור היא תמיד אפשרית, כי בכל שורה של לוח חבור. כל שארית מופיעה בדיוק פעם אחת.

הפיכת לוח הכפל היא לא כל כך פשוטה. נוכל להפוך גם את לוח הפעולה הזאת, אם נמחק ממנו את שורת ה-0 ואם נסתפק במחלקים ראשוניים. אז אף בלוח הכפל כל שארית תופיע בכל שורה בדיוק פעם אחת.

לדוגמה, לוחות החילוק עבור המחלקים 2,3,5 הם:

:	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	1	3	2	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	2	3	1

:	1	2
0	0	0
1	1	2
2	2	1

:	1
0	0
1	1

כאשר המחלק נכתב בשורה הראשונה.

לוחות ארבע הפעולות יכולים להוות יסוד עבור בנית מתקנים חשמליים פשוטים, שמכילים חוטים ומפסקים בלבד. מתקנים אלה דומים למרכזיות טלפוניות קטנות. לדוגמה, מתקן, שמכיל שלש מנורות, אחת לכל ספרה 0,1,2, ושלושה קוים מסומנים ב- 0,1,2, יכול לשמש לוח חבור לפי המחלק 3. צריכים לדאוג רק לכך, שאם נקשר שני "קוים" מהקוים 0,1,2 תדלק המנורה המתאימה לסכום מספרי הקוים. מתקן דומה יכול לשמש גם דגם ללוח עבור כל פעולה אחרת.

אם נרצה להשתמש בלוחות הפעולות ההפוכות לבצוע חסור או חילוק צריכים לדעת את כללי החסור והחילוק כפי שהם נובעים מהגדרת הפעולות הנ"ל כפעולות הפוכות.

בחסור נוכל לבצע ישירות את הפעולה על סמך לוחות החסור, באם ידוע שהמחוסר גדול מהמחסר.

בעיה 17. לחשב 1246-1012 בשיטה צ"כית לפי המחלקים 2,3,5,7.

פתרון: ישירות, לפי לוחות החסור

$$\begin{array}{r} 1246 \\ -\ 1012 \\ \hline 0234 \end{array}$$

מכיון ש-1246 המספר הגדול ביותר (מאתים ותשע) שאפשר לכהוב בשיטה לפי המחלקים הנתונים.

החילוק ניתן לבצוע ישיר לפי לוחות החילוק, באם המחולק כפולה של המחלק. במקרה זה, החילוק הוא הפעולה ההפוכה של הכפל ולוחות החילוק בנויות על העקרון הזה. יש להבחין בין שני מקרים, לפי שהמחלק לא מכיל או כן מכיל אפסים.

בעיה 18. חלק 0012:1136 בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 2,3,5,7, בהנחה ש-0012 כפולה של 1136.

פתרון: המחלק לא מכיל אפסים.נחשב לפי לוח החילוק:

$$\begin{array}{r} 0012 \\ :\ 1136 \\ \hline 0025 \end{array}$$

בדיקה: ההצגה העשרונית של המספרים 0012,1136,0025 היא 156,13,12 ו- 12 = 156:13.

בעיה 19. חשב 0015:0112 בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 2,3,5,7.

פתרון: נחשב את התוצאה עבור שלש הספרות האחרונות כבבעיה הקודמת. הספרה הראשונה של המחלק היא 0 ולא נוכל לחשב את התוצאה על סמך לוח החלוק. אולם אפשר לותר כליל על הספרה הזאת, כי המחלק הוא כפולה של 2 ולכן המנה היא קטנה, לכל הפחות פי 2 מהמחולק. מכאן, היות והמחולק קטן מ-210, המנה תהיה קטנה מ-105. 105 = 3.5.7 ולכן המנה ניתנת להצגה בשיטה לפי המחלקים 3,5,7. נסמן ביטול ספרה ב-x ונקבל

$$\begin{array}{r} 0015 \\ :\ 0112 \\ \hline \times 016 \end{array}$$

באופן כללי, אם המחלק מכיל אפסים, נבצע את החילוק לפי לוחות החילוק עבור הספרות השונות מ-0 <u>ונותר</u> בתוצאה על יתר הספרות.

נבצע בהתרת הבעיה הבאה במקביל ארבע פעולות שונות. בכל הפעולות הבצוע דומה, אלא בכל אחת יש להשתמש בלוח אחר.

בעיה 20. חשב בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 2,3,5,7 את הסכום, ההפרש, המכפלה והמנה של המספרים 0002 ו-0016, בהנחה ש-0002 כפולה של 0016 ובהנחה שהסכום והמכפלה קטנים מ-210.

פתרון:

$$\begin{array}{r} 0002 \\ +\underline{0016} \\ 0011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0002 \\ -\underline{0016} \\ 0043 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0002 \\ \times\underline{0016} \\ 0005 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0002 \\ :\underline{0016} \\ \times\times 05 \end{array}$$

במקרה מיוחד נוכל לחלק, אפילו אם המחולק לא כפולה של המחלק. נוכל לעשות את זאת, כאשר המחלק של החלוק הוא אחד ממחלקי השיטה. במקרה זה, הצגת המחולק מראה את שארית החלוק. נוכל להחסיר מהמחולק את אותה השארית וההפרש יהיה כפולה של המחלק. נוכל למצוא את המנה כבהתרת בעיה 19.

בעיה 21. חלק את המספר 0134, שכתוב בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 2,3,5,7, ב-3.

פתרון: שארית החלוק היא 1 כפי שקוראים אותה בהצגת המחולק. ההצגה של 1 בשיטה הנתונה היא 1111 וההצגה של 3 היא 1033 לכן, לפי הכלל הנ"ל:

$$\begin{array}{r} 0134 \\ -\underline{1111} \\ 1023 \\ :\underline{1033} \\ 1\times 41 \end{array}$$

התשובה היא 141 בשיטה צ׳כית לפי המחלקים 2,5,7.

נסיים את המאמר הזה בתאור תהליך להפיכת מספר מוצג בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים $m_1,\dots,m_n$ להצגתו בשיטה של קנטור לפי בסיס הסדרה $m_1,\dots,m_n$.כל הפעולות יבצעו בשיטה הצ׳כית. למעשה ההצגה בשיטה של קנטור תשמש רק כמעבר לשיטה עשרונית, היות ואנחנו מעונינים, בסופו של דבר, בהצגה העשרונית של המספר הנתון.

בעיה 22. מצא את ההצגה לפי בסיס הסדרה 2,3,5 של המספר 102 הכתוב בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 2,3,5. מצא אחר כך את ההצגה העשרונית של אותו המספר.

פתרון: כדי למצא את ההצגה הדרושה, צריכים לקבוע את השאריות של המספר הנתון בשרשרת חלוקים כאשר המחלקים הם 2,3,5, בדיוק כמו במעבר מהשיטה העשרונית לשיטה הבריטית. (נא-לעיין בבעיה 12). אולם, כאן נבצע את הפעולות בתוך השיטה הצ׳כית. השארית הראשונה, כלומר הזאת לפי המחלק 2, נקראת על הצגת המספר 102, היא1.נוכל לקבל את המנה הראשונה בשרשרת החלוקים כבפתרון בעיה 21. נקבל 13, מספר כתוב בשיטה הצ׳כית לפי המחלקים 3,5 בלבד. נוכל עתה לקרא את השארית השניה בשרשרת החלוקים, זאת השארית לפי 3, כלומר 1. כדי לקבל את המנה השניה נבצע עוד פעם חלוק שהוא מאותו סוג כמו הקודם. נקבל 4 מספר כתוב בשיטה לפי המחלק (היחיד) 5. ז.א. השארית האחרונה היא 4. קבלנו את השאריות 1,1,4. מזה נובע ההצגה

$$2.3.4+2.1+1$$

בשיטה של קנטור של המספר הנתון. אם נבצע את הפעולות ב-(12), נקבל את הצגתו בשיטה העשרונית: 27.

נסכם את הפעולות שעשינו בלוח הבא, כאשר השארית הקובעת את ההצגה הבריטית היא בעגול:

	מחלק		
	2	3	5
מספר נתון	1	0	2
השארית לפי 2	1	1	1
תוצאות חסור השארית	0	2	1
המחלק 2	0	?	2
תוצאות החלוק ב-2	x	1	3
השארית לפי 3		1	1
תוצאות חסור השארית		0	2
המחלק 3		0	3
תוצאת החלוק ב-3		x	4

הלוח הבא שמסכם את אותן הפעולות יבליט את שרשרת החלוקים שנעשתה.

מחלק	03	022	
מחולק,מנה	4	13	102
מחולק-שארית	0	02	021
שארית	4	11	111

ההצגה הבריטית של המספר הנתון היא: 2.3.4+2.1+1

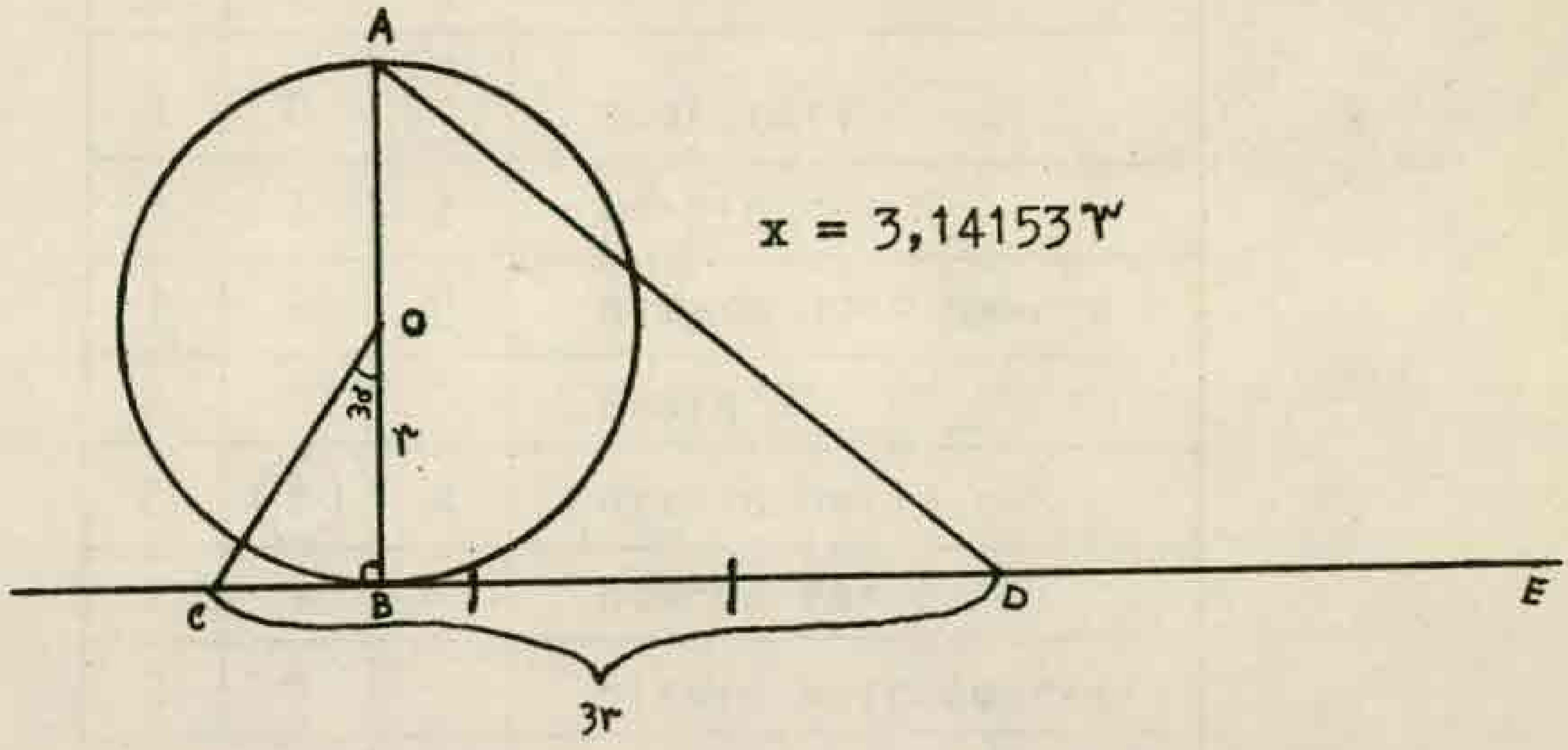
ההצגה העשרונית היא: 27

התהליך הקודם מהוה גם דרך להתרת הבעיה הסינית המתאימה: למצא מספר קטן מ-30 ששאריותיו לפי המחלקים 2,3,5 הן 1,0,2. התשובה היא 27. לפתירת בעיה זו כותבים את המספר הדרוש בשיטה צ׳כית, מעבירים אותו לשיטה בריטית ולבסוף לשיטה עשרונית.

בנית קטע שארכו π יחידות

מאת דניאל שמיר

כידוע בודאי לקוראים אי אפשר לבנות קטע שארכו גדול פי π מקטע נתון (היחידה) בעזרת סרגל ומחוגה בלבד, אך אפשר לבנות קטע אשר בקירוב רב גדול פי π מקטע נתון. אחת השיטות הנפוצות ביותר אשר נהוגות בשרטוט טכני היא הבאה:



בונים מעגל שמחוגו r הוא בעל אורך השווה לאורך הקטע הנתון (היחידה). בונים אורך BE לקוטר AOB של המעגל ומשרטטים זווית מרכזית BOC בת 30^0. מקצים $CD = 3r$ ומקשרים את A עם D. אורך הקטע AD הוא בקירוב רב πr, חשבון קל בעזרת משפט פתגורס מראה כי

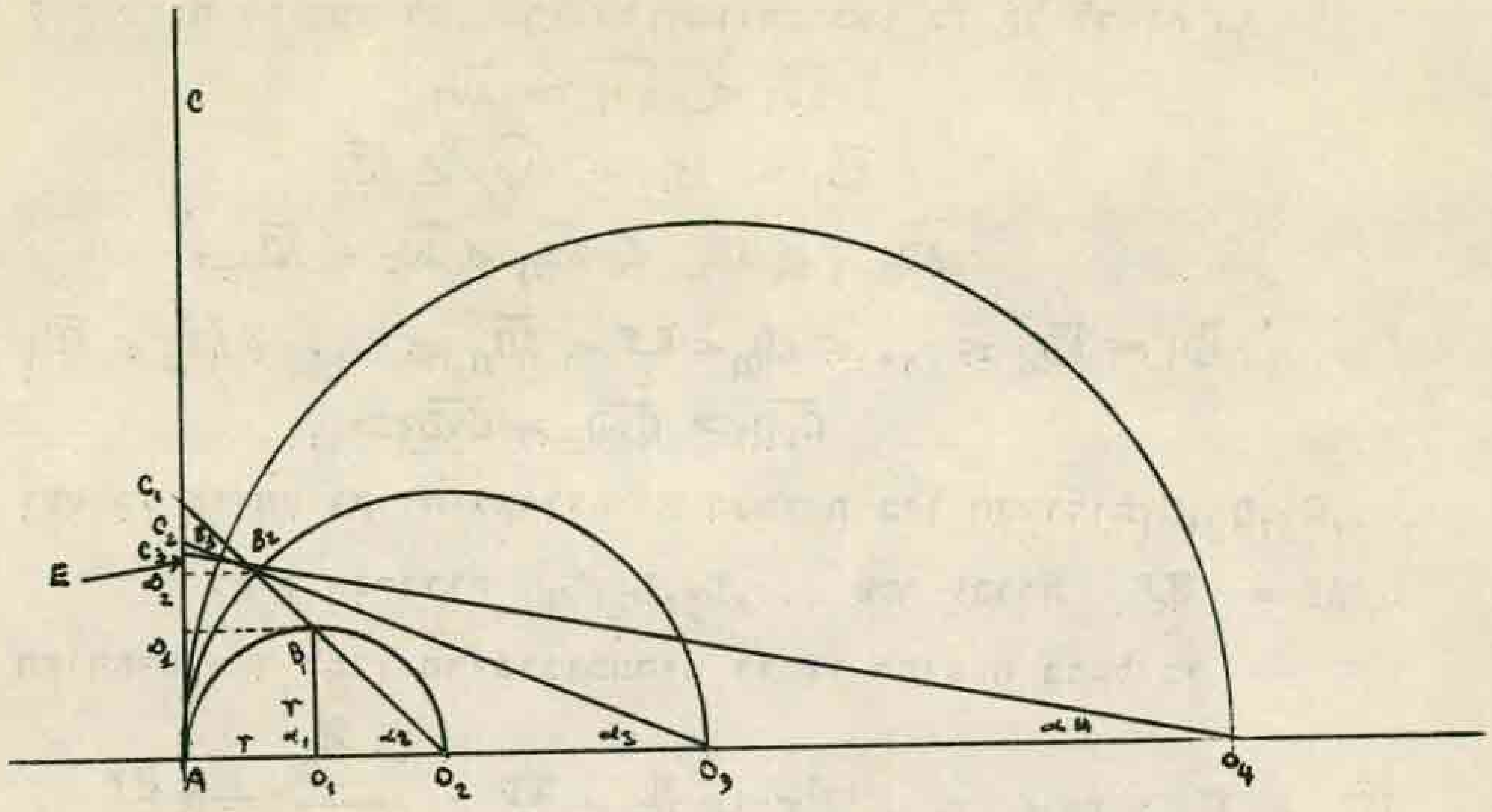
$$AD = r\sqrt{4 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sim 3.14153\, r$$

תוצאה אשר שונה מן המספר πr ב- 0.002% בלבד.

בדרך כלל השגיאות הנגרמות ע"י אי דיוקים בשרטוט עולות פי מאה ויותר על השגיאה הנגרמת ע"י החלפת המספר π במספר 3.14153 ועל כן אפשר לאמר שלגבי הרוב המכריע של הבעיות המעשיות בשרטוט הקשורות לבניית קטע שארכו $r\pi$ הבניה לעיל מספקת את דרישות הדיוק שאפשר להעמידן.

אך אם נתעלם מן הקשיים המעשיים בשרטוט מדויק ונניח לרגע שאפשר להגיע בשרטוט למידת דיוק כל שהיא, נאלץ להודות כי הבניה לעיל לוקה בחסר, באשר אי אפשר להגדיל את מידת הדיוק בה מעל ל- 0.002%!

אסביר כאן שיטה אחרת לבנית קטע שארכו πr אשר בה, להלכה בלבד, אפשר להגיע לכל מידת קירוב שנרצה. השיטה נמסרה לי ע"י ד"ר ראובן כהן-רז, כעת מרצה לפסיכולוגיה באוניברסיטה העברית, אשר מצא אותה בהיותו תלמיד בית ספר תיכון, ועובדה זו בודאי תגביר את ענין הקוראים בתגליתו.



נבנה חצי מעגל בעל מחוג $r = r_1$ סביב נקודה O_1 , וכך קוטר AO_2 ומשיק AC למעגל דרך הנקודה A. נסמן ב- B_1 את אמצע חצי המעגל AB_1O_2. נבנה חצי מעגל שני AB_2O_3 סביב O_2 במחוג $r_2 = 2r$ ונבנה ישר דרך O_2 B_1. נסמן נקודות החיתוך של ישר זה עם המעגל השני ב- B_2 ועם המשך AC ב- C_1. אח"כ נבנה מעגל שלישי AB_3O_4 סביב O_3 וישר דרך O_3 B_2. נסמן את נקודות החיתוך של ישר זה עם המעגל השלישי ב- B_3 ועם המשיק AC ב- C_2 .

נוכל לבנות בדרך זו סידרת חצאי מעגלים כך שמרכזו של כל מעגל בסידרה נמצא בקצה הקוטר של המעגל הקודם ומחוג כל מעגל גדול פי 2 ממחוג המעגל הקודם. בעזרת מעגלים אלה מתקבלת סידרת נקודות C_1, C_2, C_3... על המשיק AC. אם נבנה מקבילים לקוטר המשותף של המעגלים AO_1 דרך הנקודות B_1,B_2,B_3, ... ונסמן את נקודות החיתוך של מקבילים אלה עם המשיק AC ב- D_1,D_2,D_3,... נקבל שתי סדרות של נקודות אשר מתקרבות משני הצדדים אל נקודה גבולית E. קל להוכיח כי $AE = \frac{\pi r}{2}$ ועל כן $2 \cdot AE = \pi r$:

מן הבניה נובע כי

$$\alpha_1 = 90^o; \alpha_2 = \frac{\alpha 1}{2}; \alpha_3 = \frac{\alpha 2}{2}; \ldots ; \alpha_{n+1} = \frac{\alpha n}{2}; \ldots$$

$$r_1 = r; r_2 = 2r_1; r_3 = 2r_2; \ldots; r_{n+1} = 2r_n; \ldots$$

ומכאן שארכי הקשתות AB_1;AB_2;AB_3;... שוות כולן ל- $\frac{\pi r}{2}$

$$\widehat{AB}_1 = \frac{2\pi r \cdot 90^o}{360^o} = \frac{\pi r}{2}$$

$$\widehat{AB}_2 = \frac{2\pi \cdot 2r \cdot 45^o}{360^o} = \frac{\pi r}{2}$$

$$\widehat{AB}_{n+1} = \frac{2\pi \cdot r_{n+1} \cdot \alpha_{n+1}}{360^o} = \frac{2\pi \cdot 2r_n \cdot \frac{\alpha n}{2}}{360^o} = \frac{2\pi \cdot r_n \cdot \alpha n}{360^o} = \widehat{AB}_n$$

ואם כל קשת שווה לקודמת לה, הרי כלן שוות. כמו כן קל לראות כי

$$\overline{AD}_1 < \widehat{AB}_1 < \overline{AC}_1$$

$$\overline{AD}_1 < AD_2 < \widehat{AB}_2 < \overline{AC}_2$$

$$\overline{AD}_{n-1} < \overline{AD}_n < \widehat{AB}_n < \overline{AC}_n < \overline{AC}_{n-1}$$

ולכן $\overline{AD}_1 < \overline{AD}_2 < \ldots < \overline{AD}_n < \frac{\pi r}{2} < \overline{AC}_n < \ldots < \overline{AC}_2 < \overline{AC}_1$

כמו כן $\overline{C_1D_1} > \overline{C_2D_2} > \overline{C_3D_3} > \ldots$

ועל כן קיימת נקודה גבולית E הנמצאת בין הנקודות $C_1, C_2, C_3, \ldots$

לבין הנקודות $D_1, D_2, D_3, \ldots$ אשר עבורה $AE = \frac{\pi r}{2}$

הקוראים אשר למדו טריגונומטריה יוכלו להוכיח בנקל כי

$$\overline{OC}_n = r_n \cdot tg\alpha_n = 2^{n-1} r \cdot tg\frac{\pi}{2^n} = \frac{\pi r}{2} \cdot \frac{tg\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \longrightarrow \frac{\pi r}{2}$$

$$OD_n = r_n \cdot \sin\alpha_n = 2^{n-1} r \cdot \sin\frac{\pi}{2^n} = \frac{\pi r}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \longrightarrow \frac{\pi r}{2}$$

<u>תרגילים:</u>

א) מרכזי המעגלים $O_1; O_2; \ldots$ "בורחים" במהרה אל מחוץ לתחום דף הציור. המצא בניה לנקודות $B_1, B_2, B_3; \ldots$ שאפשר לבצעה בתחומי דף הציור גם כשמספר הפעולות רב יותר.

ב) הוכח שאם בוחרים במקום E את נקודות האמצע של הקטעים $C_1D_1; C_2D_2; C_3D_3; \ldots$ הרי השגיאה קטנה בכל צעד פי 4 ומגיעה כעבור 4 צעדים ל- 5% וכעבור 6 צעדים ל- 0.3% בלבד.

הערה בנוגע למשפט הגדול של פרמה (Fermat)

דוד בוננפלד

ב"גליונות" מס. 7, כרך א׳, הופיע מאמר מאת ה׳ אביטל על המשפט הגדול של פרמה. הוכח שם כי המשואה הדיופנטית $a^4 + b^4 = c^4$ אינה מתקיימת עבור a,b,c טבעיים. טענתו של פרמה היתה שהזהות $a^n + b^n = c^n$ אינה מתקיימת עבור a,b,c ו n טבעיים, פרט למקרים: n=1 ו n=2 המשפט הוכח למקרים פרטיים רבים, ברם המשפט הכללי עצמו לא הוכח. לעומת זאת, ישנם משפטי תנאי רבים, הטוענים כי אם קיים תנאי מסוים, אזי הוא גורר אחריו את קיומו של משפט פרמה, וכן אפשר למצוא אף תנאים הגוררים את אי-קיומו של משפט פרמה.

ב"גליונות" מס. 2, כרך א׳ ניתן ("בעיה ופתרונה") תנאי לקיום משפט פרמה. אנו נתאר כאן משפט-תנאי שקיומו, לוא ניתן להוכחה, היה סותר את משפט פרמה.

משפט: כאשר מקיימת שלישית מספרים טבעיים m, l, k את המשואה:

$$(1) \quad k^{2n} + l^{2n} = m^2$$

תקיים שלישיה אחרת c,b,a את המשואה:

$$(2) \quad a^n + b^n = c^n$$

הוכחה:

1. נניח ש m,l,k זרים ביניהם, כלומר: אין לשלושתם גורם משותף $r>1$, אחרת היה אפשר לצמצם את המשואה ב- r בלי לשנות את צורתה כי:

$$\left(\frac{k}{r}\right)^{2n} + \left(\frac{l}{r}\right)^{2n} = \left(\frac{m}{r^n}\right)^2$$

כאשר r הגורם המשותף.
מכאן אנו למדים שיחד עם r גם r^{2n} יהוה גורם משותף.

2. ב"גליונות" מס. 4, כרך א', (ע"מ 104) הוכח כי:

$$x = u^2 - v^2 \; ; \qquad y = 2uv \; ; \qquad z = u^2 + v^2$$

הוא פתרון המשואה: $x^2 + y^2 = z^2$

כאשר u ו- v אינם שניהם אי-זוגיים והינם זרים זה לזה.
הפתרונות הנ"ל נקראים יסודיים, משום של- z,y,x אין גורם משותף.
בשמוש בנוסחות אלו לגבי (1) נקבל:

$$k^n = u^2 - v^2 \; ; \qquad l^n = 2uv \; ; \qquad m = u^2 + v^2$$

3. מהתנאי ש k^n זר ל- l^n נובע ש $(u-v)\,(u+v)$ זר ל $2uv$.
אבל גם $u+v$ ו $u-v$ זרים זה לזה. כי לוא היה להם גורם משותף r, היינו מקבלים:

$$u + v = r \cdot s \quad ; \quad u-v = r \cdot t \quad \text{ומכאן:} \quad 2u = r\,(s+t)$$

ז.א. גם ל- $2uv$ היה אותו הגורם בנגוד להנחתנו. כך ניתן להוכיח בנקל שמתוך u, v, $u+v$ ו $u-v$ כל זוג זר זה לזה.

4. הנחנו: $k^n = (u+v)(u-v)$. כיון ש $u+v$ ו $u-v$ זרים בינהם צריך להתקיים:

$$(3) \quad \begin{cases} u + v = a^n \\ u - v = b^n \end{cases}$$

(הוכח זאת) !

5. לגבי $l^n = 2uv$ קיימות שתי אפשרויות (מאותה סיבה של- k ו l אין גורם משותף).

$$(4) \begin{cases} 2u = c^n \\ v = d^n \end{cases} \quad \text{או:} \quad \begin{cases} u = c_1^{\,n} \\ 2v = d_1^{\,n} \end{cases}$$

נבחר באפשרות (4)

6. מתוך השוויונות (3) ו (4) נקבל: $a^n + b^n = c^n$ מש"ל.

תחרות במתמטיקה על הפרס על שם פרופ' י. גרוסמן
תשכ"ג - 1963

כבכל שנה התקיימה בל"ג בעומר התחרות במתמטיקה לתלמידי כתות הסיום של בתי הספר התיכוניים בפקולטה למדעים של הטכניון.

את תוצאות התחרות ואת פתרונות הבעיות נפרסם ב"גליונות" הבאים.

על הנבחן לפתור את כל 3 השאלות. אסור להשתמש בכל חומר עזר

משך הבחינה $2\frac{1}{2}$ שעות

1. נתונה המשואה $\sqrt{x} = \sqrt{1-x} + \sqrt{a-x}$

באשר $0 < a < 1$.

התר את המשואה וחקור את קיום ומספר הפתרונות.

הערה: ב- $\sqrt{m}$ מבינים תמיד $+\sqrt{m}$.

2. תחום מישורי מוגבל ע"י עקום סגור (שגם נקודותיו נחשבות כשייכות לתחום זה) נקרא קמור, כאשר כל קטע המחבר שתי נקודות כלשהן של התחום שייך בשלמותו לתחום.

הוכח שכל תחום מישורי קמור בעל שטח נתון S אפשר לכלול בתחום מישורי קמור, בעל סימטריה מרכזית, ששטחו איננו גדול מ- $2S$.

3. שמונה כדורים מהם ארבעה בעלי רדיוס R כל אחד וארבעה בעלי רדיוס r כל אחד, מונחים במרחב כך שכל כדור משיק לשלושה כדורים בעלי רדיוס R ולשלשה כדורים בעלי רדיוס r .

מצא את היחס $\frac{R}{r}$.

תחרות מתמדת להתרת בעיות

הפתרונות צריכים להגיע למערכת עד 15.10.63

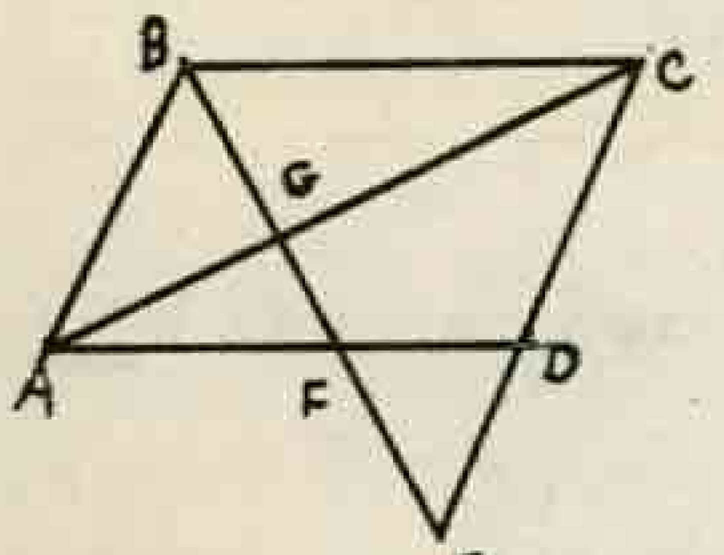
בעיות מסומנות בכוכב דורשות ידיעות עד כתה י' בלבד, אבל אין פרוש הדבר שהן הקלות ביותר.

ת.166 (3 נקודות) מהו האיבר הכללי של הסדרה ...,3,-2,3,-2

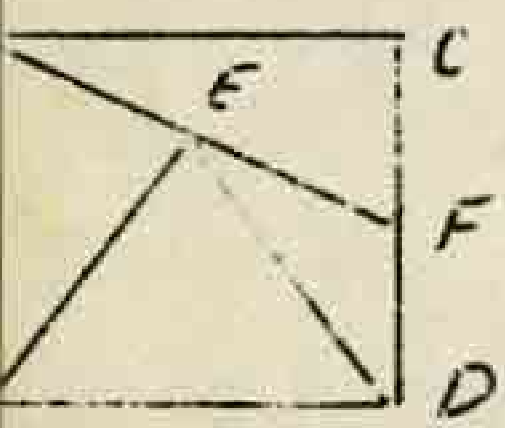
ת.167 (3 נקודות) מהו האיבר הכללי של הסדרה ...,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1

ת.168* (5 נקודות) נתונות 4 נקודות במישור, יש להעביר דרך כל אחת ישר כך שיוצר ע"י 4 הישרים רבוע. מה מספר הפתרונות?

ת.169* (4 נקודות) נתונה הסדרה $6n\pm1$: ...,5,7,11,13. האם יתכן שיש ביניהם שני איברים סמוכים שאינם מספרים ראשוניים? לא להוכיח בעזרת דוגמא!



ת.170 (2 נקודות) ABCD מקבילים ו E נקודה על המשכה של CD. F ו G נקודות חתוך של BE עם AD ושל BE עם AC. הבע BG בעזרת BE ו BF.



ת.171* (3 נקודות) נתון רבוע ABCD. מחברים את הקדקד B עם אמצע הצלע CD ונסמנו ב F מורידים אנך AE על BF. הוכח AD = DE.

ת.172* (4 נקודות) לקופה של בנק יש להתקין מספר מנעולים כך שרק כל שלושה מארבעה המנהלים יכולים ביחד לפתוח את הקופה. מהו המספר הקטן ביותר של מנעולים הדרוש וכיצד יש לחלק את המפתחות בין המנהלים?

ת.173 (5 נקודות) רושמים את הספרות 1 עד 8 ועד בכלל בסדר מקרי. מהו הסכוי (ההסתברות) שהמספר בעל שמונה ספרות שנוצר ע"י כך יתחלק ב- 11.

ת.174* (4 נקודות) בנה משלש ABC, אם נתונים 3 עקבות הגבהים, ז.א. נקודות החתוך של הגבהים עם הצלעות. (הוצע ע"י אליעזר רפפורט)

ת.175 (5 נקודות) הוכח שבמרובע קמור בעל 4 צלעות נתונים מכפלת ארכי האלכסונים מקסימלית, אם המרובע חסום במעגל. (הוצע ע"י מיכאל זלטקין כתוספת לת. 147)

ת.176 (4 נקודות) נתונה הסדרה $a_n = \frac{b^{2n}+1}{b^{2n}}$ כאשר $b = \frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}$

($n = 1,2,3,\ldots$) הוכח שכל איברי הסדרה מספרים שלמים, אם c שלם. (הוצע ע"י שמואל פרידלנד)

ת.177 (4 נקודות) חלק משלש נתון ל n חלקים שוי שטח ע"י מקבילים לאחת מצלעותיו. (הוצע ע"י אליהו עמיר)

ת.178* (2 נקודות) באיזו מערכת מספרים המשואה $13\times13=202$ נכונה? (ראה את מאמרו של מר שונהיים בחוברת זו ובקודמת)

ת.179* (3 נקודות) "542 הוא המספר הרבועי הראשון הגדול מ 441" באיזו מערכת מספרים משפט זה נכון?

ת.180* (3 נקודות) הוכח ש $p^n = q$ (p ו n מספרים טבעיים) ניתן תמיד להכתב בצורה $a+b = (a-b)^n$ כאשר a ו b שוב מספרים טבעיים.

פתרון הבעיות 136 - 150

ת.136 נצא מאי השויונות:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}\,;\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5}\,;\ \ldots;\ \frac{2n-3}{2n-2}<\frac{2n-2}{2n-1}\,;\ \ \frac{2n-1}{2n}<1$$

נכפלם זה בזה:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-2}{2n-1}$$

ומכאן:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2<\frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

באופן דומה:

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}\,;\ \frac{4}{5}<\frac{5}{6}\,;\ \ldots\,;\ \frac{2n-2}{2n-1}<\frac{2n-1}{2n}$$

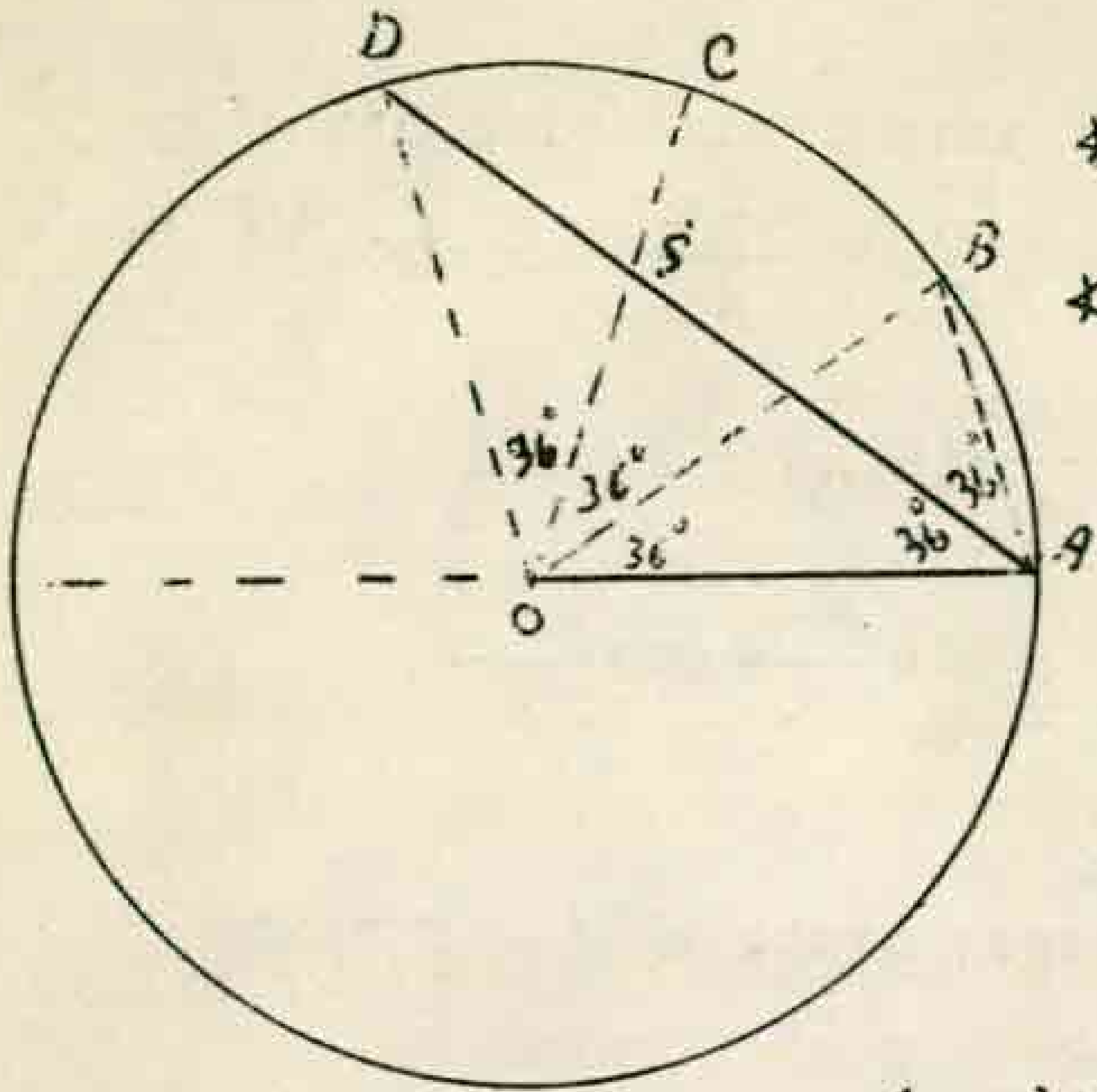
ונכפלם:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-2}{2n-1}<\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}$$

$$2<\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-3}{2n-2}\right)^2\cdot\frac{(2n-1)^2}{2n}$$

$$\frac{1}{n}<\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}$$



ת.137 $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = 36^\circ$

בזוית הקפית

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle OAD = \sphericalangle ODA = 36^\circ$

$\therefore \sphericalangle ASO = 180^\circ - 3\cdot 36^\circ = 72^\circ$

$\therefore AS = AO = R$

ΔDSO גם כן שוה-שוקיים

$DS = OS$

$\therefore AD = R + OS$

אולם $ABO \cong OSA$

$\therefore AB = OS$

ולכן $AD = R + AB$

ת.138 אם k מספר טבעי קטן מ- n וגדול מ-1.

$$n(k-1) > k(k-1)$$
$$\therefore kn - k^2 + k > n$$
$$k(n-k+1) > n$$

נכפיל אי שויון זה בעצמו לגבי כל ערכי k מ-2 ועד $n-1$, נקבל

$$2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2 > n^{n-2}$$
$$\therefore [1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n]^2 > n^n$$

ת.139 המספרים תאומים $q = p + 2$

$$p^{p+2} + q^p = p^2p^p + q^p = (p^2-1)p^p + p^p + q^p$$

מאחר ש p אי זוגי $p^p + q^p$ מתחלק ב- $(p+q)$

מצד שני $p+q = 2p+2 = 2(p+1)$

$$(p^2-1)p^p = (p+1)(p-1)p^p = (p-1)p(p+1)\,p^{p-1}$$

אך $p-1$ זוגי לכן הבטוי האחרון מתחלק ב- $2(p+1)$

כלומר ב- $(p+q)$.

ת.140

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$$
$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$$
$$\cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta) + \sin\beta(\sin\alpha - \sin\beta) = 0$$
$$\cos\alpha\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = \sin\beta\ \sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

אפשרות (א) $\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = 0$

מאחר ש $\alpha+\beta < 180^\circ$ $\therefore \beta = \alpha$ במשולש שוה-שוקיים

אם $\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \neq 0$ כלומר $\beta \neq \alpha$

נצמצם $\cos\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

נחסיר משני האגפים אותו בטוי

$$\cos\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}(\sin\beta-\sin\alpha)$$

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

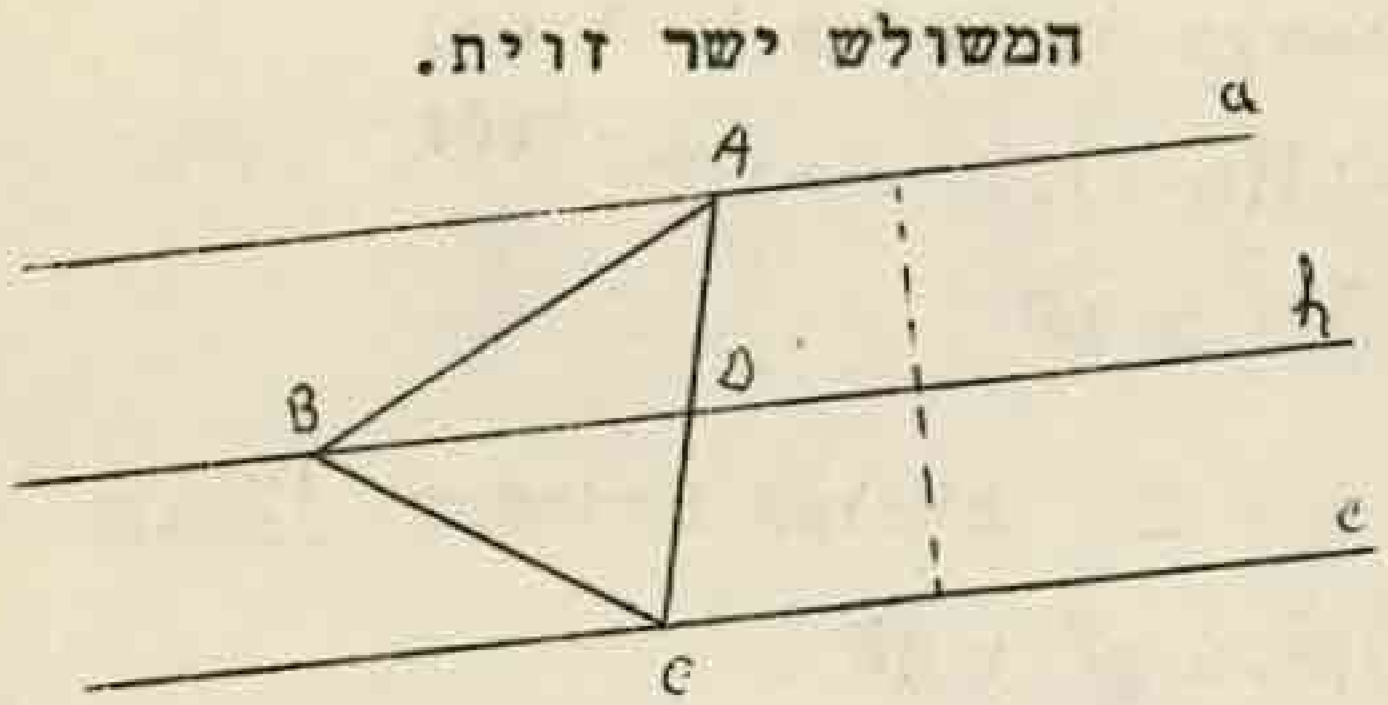
מאחר ש $\beta \neq \alpha$ נצמצם ונקבל

$$2\cos\frac{2\alpha+\beta}{2} = 0$$

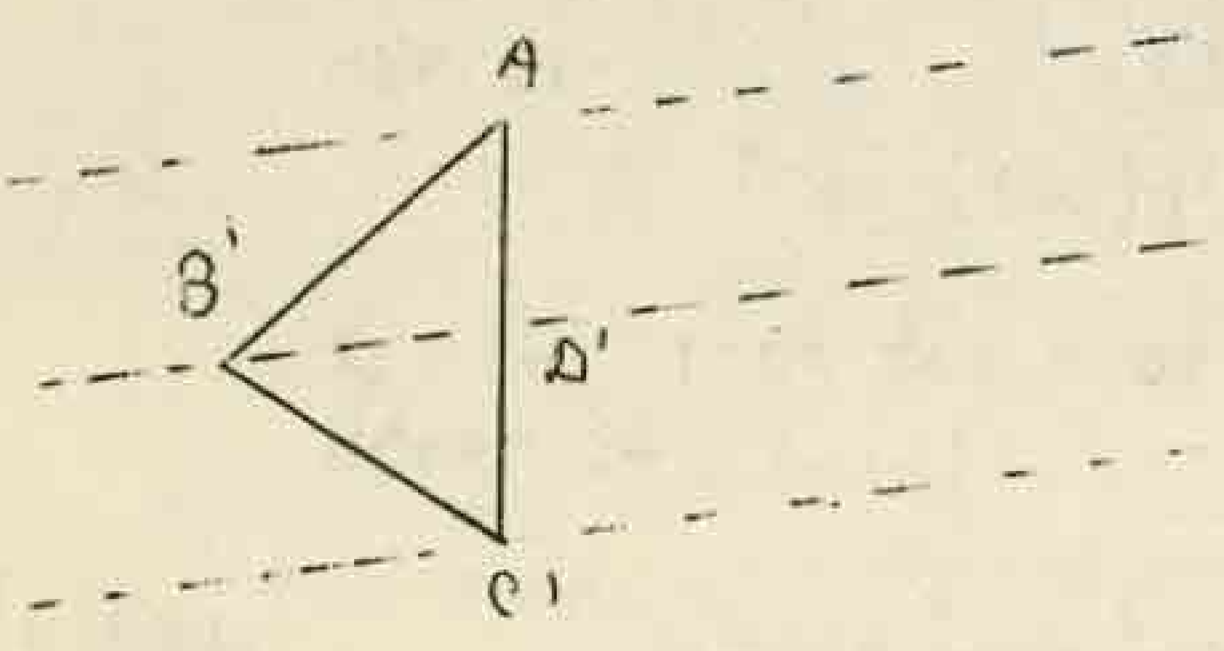
$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$$

אפשרות (ב) $\quad \alpha+\beta = 90^0 \quad$ המשולש ישר זוית.

ת.141 <u>נתוח:</u> נדמה כי בנינו את המשולש. היחס AD/DC ידוע לנו, כי הוא שוה ליחס בין מרחקי המקבילים המתאימים.



<u>בניה:</u> נבנה משולש$A'B'C'$ לפי הזויות הנתונות. את צלע $A'C'$ נחלק לפי היחס בין מרחקי ab ו bc נעביר את $B'D'$ ושני מקבילים לו, דרך A' ודרך C'. נבחר נקודה שרירותית על b - נסמנה B. נבנה את הזויות$A'B'D'$ ו $C'B'D'$ ותתקבלנה A ו C.



הערה: ייתכנו ששה פתרונות, שונים בדרך כלל 3 (מדוע ששה?)

ת.142 מאי השויונות הנתונים נובע כי

$$0 < a - \sqrt{b} < 1$$

ולכן $\quad 0 < (a-\sqrt{b})^n < 1 \quad$ שבר אמתי.

נסתכל בשני הפתוחים הבאים:

$$(a+\sqrt{b})^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\sqrt{b} + \binom{n}{2}a^{n-2}b + \ldots + (\sqrt{b})^n$$

$$(a-\sqrt{b})^n = a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}\sqrt{b} + \binom{n}{2}a^{n-2}b - \ldots + (-\sqrt{b})^n$$

בסכמנו את שני הפתוחים נותרים רק האברים בהם מופיע $\sqrt{b}$ בחזקה זוגית. לכן סכום שני הבטויים הנו מספר זוגי.

$$(a+\sqrt{b})^n+(a-\sqrt{b})^n=2a^n+2\binom{n}{2}b+2\binom{n}{4}b^2+\ldots=2K$$

מאחר ש $(a-\sqrt{b})^n \equiv \alpha$ שבר אמתי, נוכל לרשום

$$(a+\sqrt{b})^n+\alpha=2K$$

$$(a+\sqrt{b})^n=(2K-1)+(1-\alpha)$$

$2K-1$ אי זוגי, $1-\alpha$ שבר אמתי. מ.ש.ל.

<u>ת.143</u> כאשר $0<x<\pi$ $\quad y=\frac{2+\sqrt{3}\ \cos x}{\sqrt{3}\ \sin x}>0$

$$\sqrt{3}y\ \sin x-\sqrt{3}\cos\ x=2$$

נגדיר $y=\cot\varphi$

$$\sqrt{3}\left(\frac{\cos\varphi\sin x}{\cos\varphi}-\cos x\right)=2$$

$$3\sin(x-\varphi)\ /\ \sin\varphi=2$$

אולם $1+y^2=\frac{1}{\sin^2\varphi}$

לכן $\sqrt{3(1+y^2)}\ \sin(x-\varphi)=2$

$$\frac{2}{\sqrt{3(1+y^2)}}\leqslant 1$$

כלומר $4\leqslant 3+3y^2$

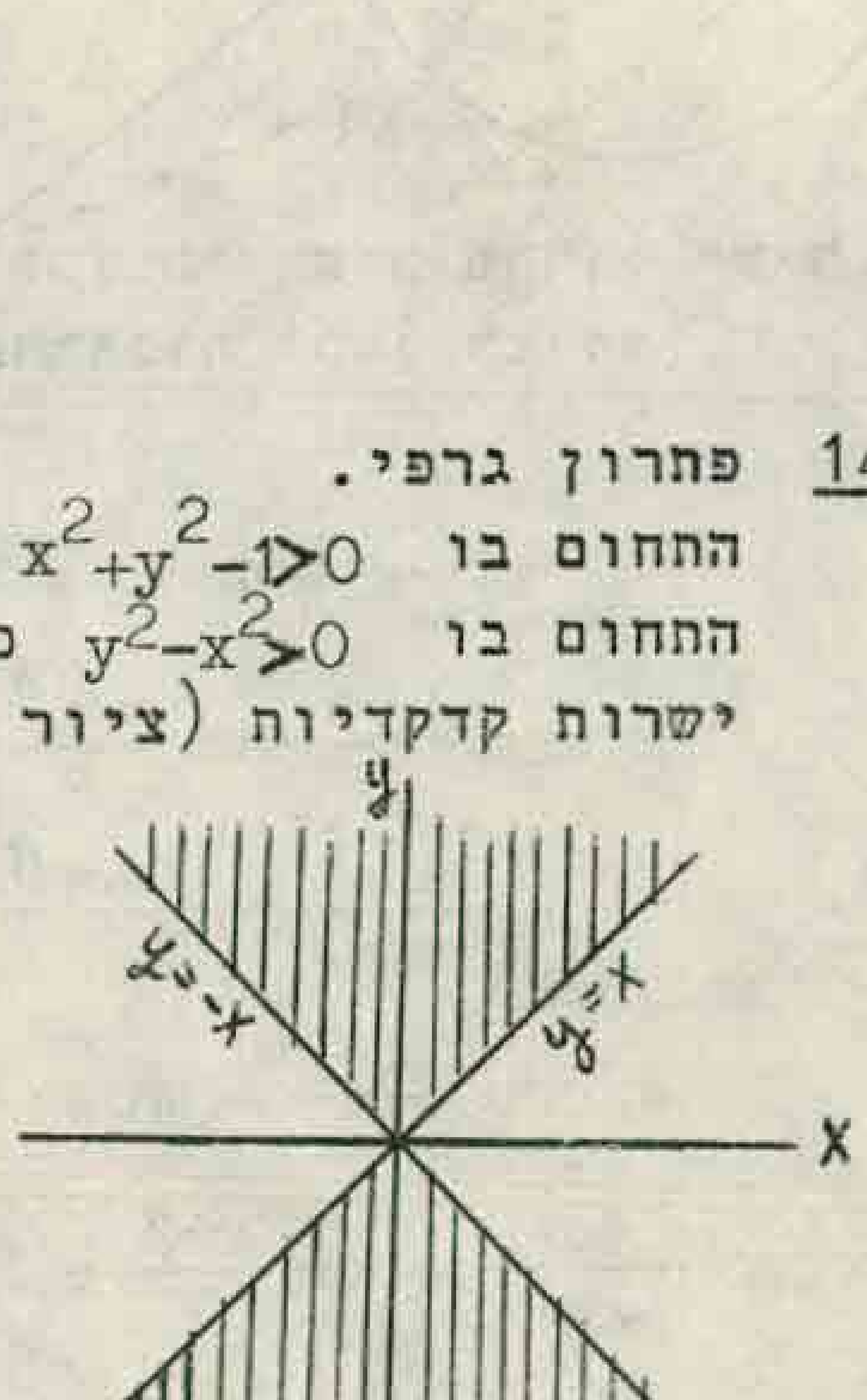
$$1\leqslant 3y^2$$

$$y\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$$

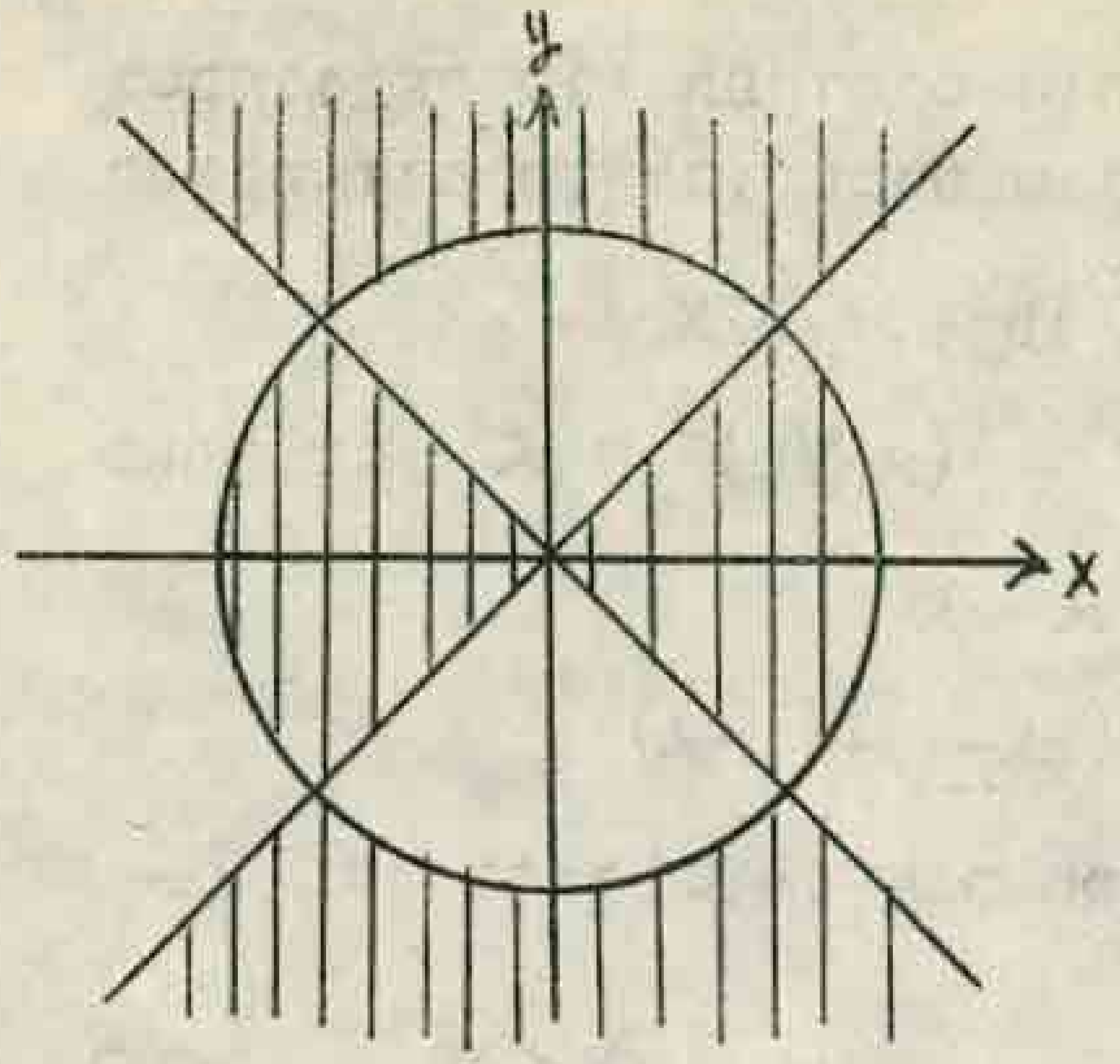
$$y_{min}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

<u>ת.144</u> פתרון גרפי.
התחום בו $x^2+y^2-1>0$ הוא חוצה של מעגל היחידה(ציור א׳)
התחום בו $y^2-x^2>0$ כלומר $(y+x)(y-x)>0$ הוא שתי זויות ישרות קדקדיות (ציור ב׳)

ציור א׳



ציור ב׳



ציור ג׳

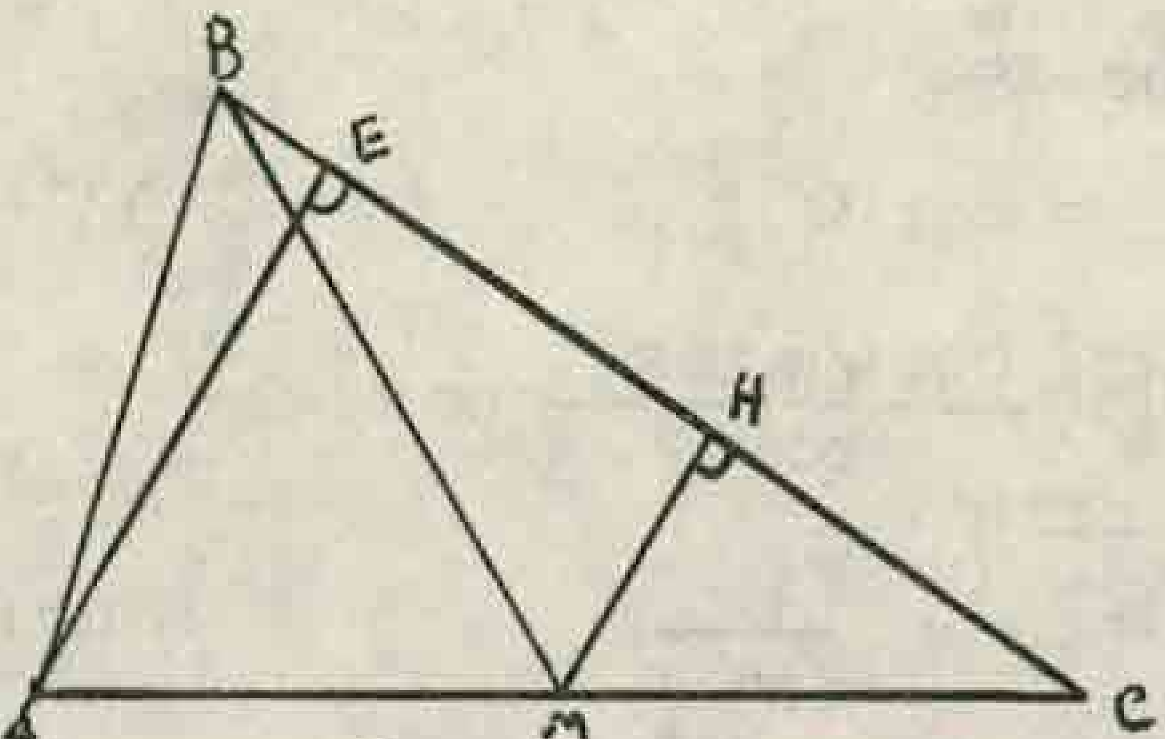
התחום בו יתקיים אי השויון הנתון הוא או המשותף לשני התחומים הנ"ל, או המשותף לפנים המעגל עם הזויות הישרות האחרות (מדוע?) (ציור ג׳)

<u>ת.145</u> <u>נתוח:</u> נדמה כי בנינו את המשולש (ציור א׳) נוריד אנך מ- M ל- BC.

AE || MH

MH חוצה לכן את EC (כי הוא חוצה את AC ו מקביל ל- AE).

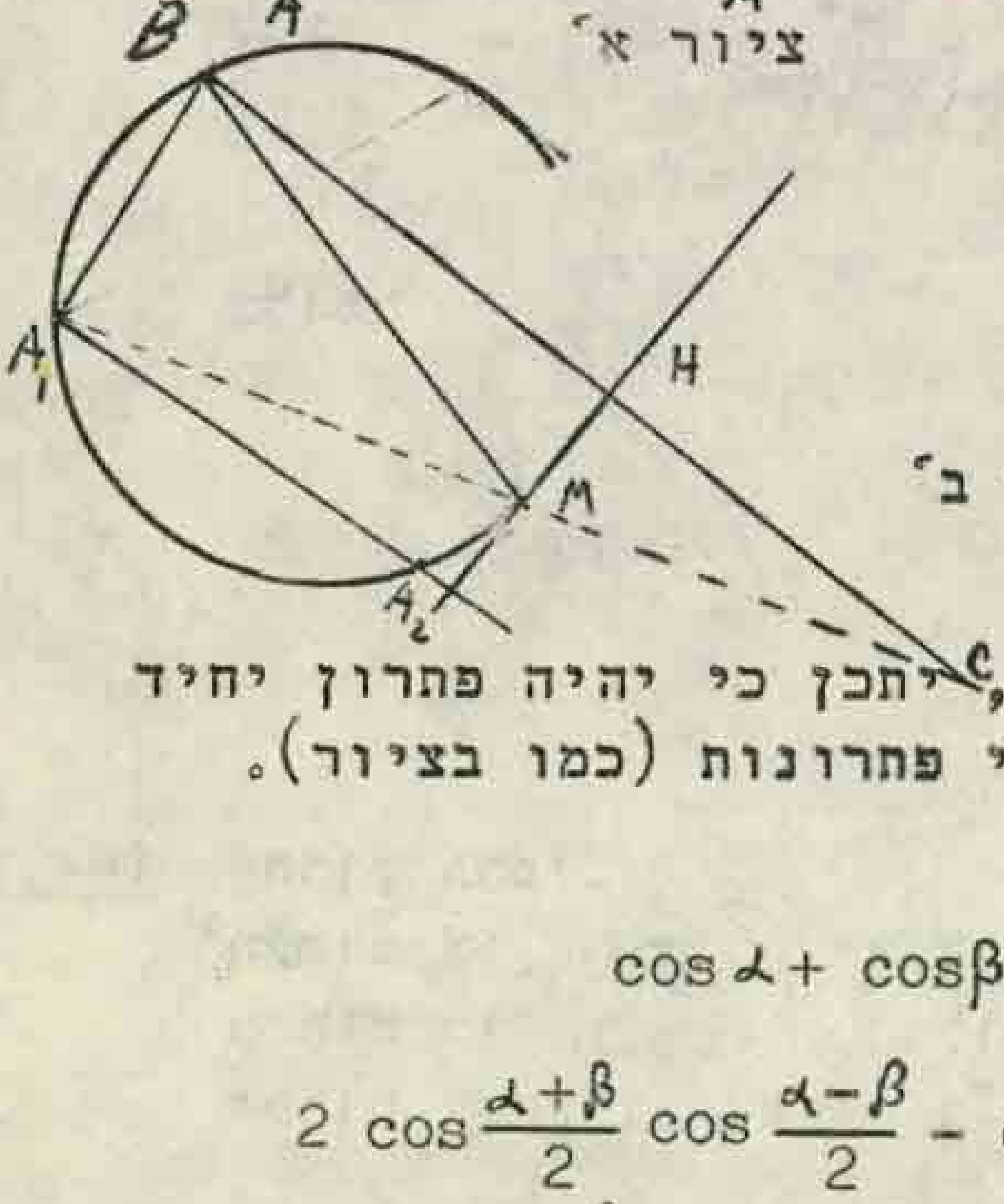
EH = HC ; MH = AE/2



ציור א׳

<u>בניה:</u> (ציור ב׳) נבנה את △ MBH לפי יתר BM וניצב MH = AE/2.

על BM נבנה קשת ראיה לפי ∡A. תעביר מקביל ל- BH במרחק h_a (כפלים מ- MH).



ציור ב׳

<u>הערה:</u> יתכן כי לא יהיה כל פתרון, יתכן כי יהיה פתרון יחיד (המקביל ישיק) ויתכן כי יהיו שני פתרונות (כמו בציור).

<u>ת.146</u>

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1\tfrac{1}{2}$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos(\alpha+\beta) = 1\tfrac{1}{2}$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 = 1\tfrac{1}{2}$$

$$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 = 0$$

$$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 + 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right)^2 + 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0$$

הרבוע גדול או שוה לאפס, הבטוי השני גם גדול או שוה לאפס,

כי $\frac{\alpha+\beta}{2}<90^0$ וגם $\frac{\alpha-\beta}{2}<90^0$ לכן $1\geqslant\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}>0$ מכאן נובע

שגם הרבוע וגם הבטוי השני צריכים להתאפס.

לכן $1-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$; $\alpha=\beta$

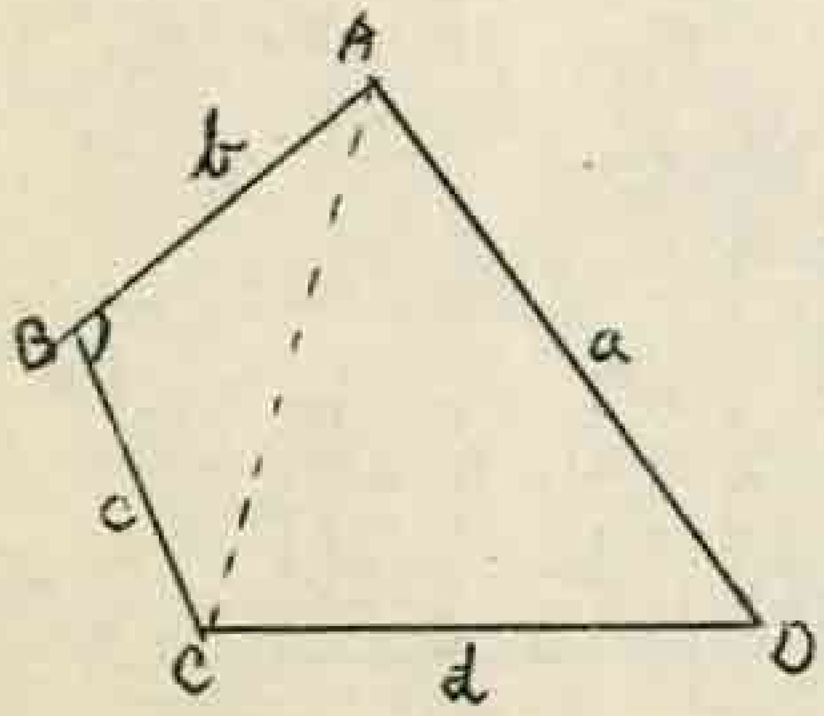
ומ $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-1=0$ נובע $\alpha+\beta=120^0$ ו $\alpha=60^0$ מ.ש.ל.

<u>ת.147</u> נסמן את הצלעות:

$AB=b, BC=c, CD=d, AD=a$

$S=\frac{1}{2}(bc\sin B+ad\sin D)$

לפי משפט ה- cos



$$AC^2=b^2+c^2-2bc\cos B=a^2+d^2-2ad\cos D$$

$$bc\sin B+ad\sin D=2S$$

$$bc\cos B-ad\cos D=\tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2-d^2)$$

נעלה ברבוע ונחבר

$$b^2c^2(\sin^2B+\cos^2B)+a^2d^2(\sin^2D+\cos^2D)+2abcd(\sin B\sin D-\cos B\cos D)$$
$$=4S^2+\tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

$$4b^2c^2+4a^2d^2-8abcd\cos(B+D)=16S^2+(b^2+c^2-a^2-d^2)^2$$

$$16S^2=4(b^2c^2+a^2d^2)-(b^2+c^2-a^2-d^2)-8abcd\cos(B+D)$$

כל הגדלים באגף הימני קבועים, פרט ל- $\cos(B+D)$

הבטוי יהיה מקסימלי כאשר $\cos(B+D)$ מינימלי כלומר

כאשר $B+D=180^0$.

<u>ת.148</u>

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ \ (n-1)}{3\cdot4\cdot5\cdots(n+1)}\cdot\frac{7\cdot13\cdot21\cdots(n^2+n+1)}{3\cdot7\cdot13\cdots(n^2-n+1)}=$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}\,\frac{n^2+n+1}{n^2+n}$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

ובשאף n ל- ∞ ישאף בטוי זה ל-$2/3$.

ת.149

$$k = \frac{b-c}{h_a} = \frac{2R(\sin B-\sin C)}{2R\sin B\sin C} = R$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin B\sin C} =$$

$$= \frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos(B-C)-\cos(B+C)} = \frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos(B-C)+\cos A}$$

ומכאן

$$k\cos(B-C)+k\cos A-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = 0$$

$$k(1-2\sin^2\frac{B-C}{2})-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}+k\cos A = 0$$

נציב $t=\sin\frac{B-C}{2}$ תקבל

$$kt^2+2\sin\frac{A}{2}\cdot t-k\cos^2\frac{A}{2} = 0$$

$$\sin\frac{B-C}{2} \equiv t = \frac{1}{k}\left(-\sin\frac{A}{2}\pm\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}+k^2\cos^2\frac{A}{2}}\right)$$

ומאחר של-k ול-$(b-c)$ אותו סימן, יתכן רק הפתרון:

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{1}{k}\left(-\sin\frac{A}{2}+\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}+k^2\cos^2\frac{A}{2}}\right)$$

זוית A נתונה ולכן גם $B+C$ נתונה. מתוך $B-C$ ו $B+C$ ימצאו את B ואת C.

$$B-C = 2\arcsin\frac{1}{k}\left(-\sin\frac{A}{2}+\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}+k^2\cos^2\frac{A}{2}}\right)$$

ת.150 לפי תנאי התרגיל ערכו של המספר הנתון הוא:

$$2\cdot10^{2n+2}+7\cdot10^{2n+1}+\ldots+7\cdot10^{n+2}+8\cdot10^{n+1}+\ldots+8\cdot10+9 =$$

$$= 2\cdot10^{2n+2}+\frac{7\cdot10^{n+2}(10^n-1)}{9}+\frac{8\cdot10(10^{n+1}-1)}{9}+9 =$$

$$= \frac{18\cdot10^{2n+2}+7\cdot10^{2n+2}-7\cdot10^{n+2}+8\cdot10^{n+2}-80+81}{9} =$$

$$= \frac{25\cdot10^{2n+2}+10^{n+2}+1}{9} = \left(\frac{5\cdot10^{n+1}+1}{3}\right)^2$$

$5\cdot10^{n+1}+1$ מתחלק ב-3, כי

$$5\cdot10^{n+1}+1 = 6\cdot10^{n+1}-(10^{n+1}-1)$$

ידוע ש 10^m-1 מתחלק ל-3.

פתרון הבעיה הסינית (עמ' 1)

נסמן את מספר המטבעות ב-x. אזי צריך x לקיים את שלוש הקונגרואנציות הבאות: (ראה חוברת 1, כרך ב')

$$x \equiv 3 \pmod{17}$$
$$x \equiv 4 \pmod{11}$$
$$x \equiv 5 \pmod{6}$$

את הקונגרואנציה הראשונה אפשר לכתוב בצורת משואה:

$$x = 3+17y$$

בתנאי שגם x וגם y מספרים טבעיים. מכנים משואה כזאת בשם משואה דיופנטית לכבודו של המתמטיקאי היוני Diophantos (חי במאה השלישית לספה"נ) אשר טפל במשואות כאלה.

נציב את ערכו של x בקונגרואנציה השניה ונקבל:

$$3+17y \equiv 4 \pmod{11}$$
$$17y \equiv 1 \pmod{11}$$

קונגרואנציה זו ניתנת להחלפה בקונגרואנציה $6y \equiv 1 \pmod{11}$ מכיון ש $17 \equiv 6 \pmod{11}$ הפתרון הוא: $y = 2+11z$ כאשר z שוב מספר טבעי. לכן

$$x = 3+17(2+11z)$$

נציב את הבטוי החדש של x בקונגרואנציה השלישית:

$$3+17(2+11z) \equiv 5 \pmod{6}$$
$$37+187z \equiv 5 \pmod{6}$$
$$187z \equiv -32 \pmod{6}$$

מכיון ש $187 \equiv 1 \pmod{6}$ ו $-32 \equiv 4 \pmod{6}$

הפתרון הכללי של הקונגרואנציה האחרונה הוא:

$z = 4+6t$ (t מספר טבעי)

לכן יהיה:

$$x = 3+17\,[2+11(4+6t)]$$
$$x = 785+6.11.17t$$

זהו פתרון בעיתנו אשר אפשר לכתבו גם בצורת קונגרואנציה:

$$x \equiv 785 \pmod{6.11.17}$$

הפתרון הקטן ביותר הוא 785 מטבעות. פתרונות נוספים נקבל ע"י הצבת $t = 2,3,4,\ldots$ הפתרון השני למשל יהיה 1907.

שיטה זו מאפשרת להוכיח את המשפט הכללי:

יהיו $m_1, m_2 \ldots m_k$ k מספרים טבעיים, כל שניים ביניהם זרים זה לזה (אין להם מחלק משותף), אזי קיים ל k הקונגרואנציות

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$
$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

פתרון יחיד מודולו $m_1\, m_2 \ldots m_k$

בהתרת קונגרואנציות ומשואות דיופנטיות נעסוק באחד ה"גליונות" הבאים.

י. דוד

פתרון "מצא את הגילים" (עמ' 1)

לכאורה, תפקידו של שמעון פשוט: הוא יודע את גיל עצמו, ולכן הוא יודע גם את סכום גילי הבנות וגם את מכפלת גיליהן. כל מה שעליו לעשות הוא איפוא: לפרק את המספר 2450 למכפלה של שלשה מספרים, שסכומם יהיה כפליים מגילו.

מאחר והוא מצהיר, שאינו יכול למצא את התשובה, יכולה להיות לכך רק סבה אחת. והיא: יש יותר משלשה אחת של מספרים, שמכפלתם 2450 וסכומם כפלים מגילו, ואין הוא יודע באיזו מהן לבחור.

נעיין איפוא בכל השלשות המתקבלות מפרוק המספר 2450.

מלאכת הפרוק תקל עלינו, אם נזכר כי $2450 = 2.5.5.7.7$

בצד כל שלשה נרשם את סכום איבריה:

252	2 ; 5 ; 245	82	5 ; 7 ; 70
76	2 ; 25 ; 49	108	5 ; 5 ; 98
72	2 ; 35 ; 35	64	7 ; 7 ; 50
184	2 ; 175 ; 7	46	7 ; 14 ; 25
64	5 ; 10 ; 49	52	7 ; 10 ; 35
54	5 ; 14 ; 35		

מאחר ומצאנו רק שתי שלשות שהנן בעלות אותו סכום (64) : 7;7;50 ו- 5;10;49, הרי שהקושי העומד בפני שמעון הוא הבחירה בין שתי שלשות אלה. לכן ברור ששמעון בן 32.

ועתה, הנתון הנוסף, היות ראובן המבוגר מבין החמשה, צריך להספיק כדי לקבע את השלשה הנכונה. אם ראובן הוא בן 49 או פחות מכך, הרי שאף אחת משתי השלשות אינה מתאימה, כי לפי האחת תהיה אחת הבנות בת 50 ולכן מבוגרת מראובן, ולפי השני תהיה אחת הבנות בת 49, ולכן שוב אין ראובן המבוגר שבכלם. לכן אין ראובן בן 49 או פחות מזה.

אילו היה גילו של ראובן למעלה מ- 50, אזי שוב אנו עומדים במצב של חסר נתונים, כי במקרה זה הנתון הנוסף אינו מוסיף מאומה, כל אחת משתי השלשות מתאימה לנתונים, ושוב אין אפשרות לבחר ביניהן. אך מצב זה לא יתכן, כיון שראובן מוסר בפרוש שהתנאי הנוסף שמסר-הנו מספיק. לכן ראובן בהכרח בן חמשים, וגילי הבנות: 49 ; 10 ; 5.

התנאי שאף אחת מהבנות אינה בת שנה - אינו הכרחי, ונתן רק כדי להקל על מלאכת הפרוק של 2450.

הצגה של מספרים טבעיים בצורת הפרש או סכום של שני רבועים

בועז פרויד

מספרים טבעיים הם המספרים $1,2,3,\ldots$. הצגה של מספר טבעי x בתור הפרש (סכום) של שני רבועים פרושה מציאת שויון מהצורה $x=a^2-b^2$ (או $x=a^2+b^2$ בהתאמה) כאשר a ו- b הם מספרים טבעיים.

למשל $3=2^2-1^2$. יחד עם זה קל לראות שאין אפשרות להציג את 3 בצורת סכום שני רבועים.

לעומת זאת $5=3^2-2^2$ וגם $5=2^2+1^2$

3 ו-5 הם מספרים אי זוגיים. אם נתבונן במספרים זוגיים, אזי למשל $2=1^2+1^2$. מצד שני לא קיים $2=a^2-b^2$ ובאמת לשם קיום יצוג כזה דרוש ש- a ו- b יהיו או שניהם זוגיים או שניהם אי זוגיים. אבל אזי $a-b$ ו- $a+b$ הם שניהם זוגיים ו- $2=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ היה מתחלק ב-4 שלא יתכן כמובן.

לעומת זאת את המספר הזוגי 8 אפשר לכתוב בצורה $8=3^2-1^2$ וגם $8=2^2+2^2$.

מתעוררת, איפוא, השאלה מהם המספרים הטבעיים שאפשר לכתוב בצורת הפרש (סכום) של רבועים של מספרים טבעיים.

נתחיל בהצגת מספרים טבעיים בתור הפרש של שני רבועים.

יהא תחילה x מספר אי-זוגי $x=2K-1$

קיים בבירור $2K-1=K^2-(K-1)^2$

לכן עבור $K>1$ כל מספר אי-זוגי נתן להצגה כהפרש של שני רבועים.

עבור $K=1$ מתקבל $2K-1=1$ וקל לראות ש-1 איננו נתן להצגה כנ"ל.

ואמנם אם $x=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ הרי $a+b=1$ $a-b=1$

ולכן $b=0$.

עבור מספרים זוגיים $x=2K$ השויון $x=a^2-b^2$ גורר ש- a ו- b צריכים להיות בעת ובעונה אחת זוגיים או אי-זוגיים. לכן $x=(a-b)(a+b)$ מתחלק בהכרח ב-4. בסך הכל קבלנו שתנאי הכרחי לכך שמספר זוגי x יהיה ניתן לייצוג בצורת הפרש שני רבועים הוא ש- x מתחלק ב-4, כלומר שהוא מהצורה $x=4R$

עבור $K=1$ מקבלים $x=4$. נניח: $4=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

כפי שכבר אמרנו קיים בהכרח $a-b=2r\ ,\ a+b=2s$

מכאן $4=4rs$ ז.א. $rs=1$ ו- $r=s=1$

מכאן $a-b=2$ ו- $a+b=2$ ז.א. $b=0$ וזה בלתי אפשרי.

קבלנו שהמספר 4 איננו ניתן להצגה כהפרש של שני רבועים. יחד עם זה מהשויון $4K=(K+1)^2-(K-1)^2$ נובע שכל מספר $x=4K$ עם $K>1$ ניתן להצגה בתור הפרש של שני רבועים.

נסכם את כל הנ"ל ב-

<u>משפט 1</u>. מספר אי־זוגי $2K-1$ ניתן להצגה בתור הפרש של שני רבועים אם ורק אם $K>1$

מספר זוגי ניתן להצגה בתור הפרש של שני רבועים אם ורק אם הוא בעל הצורה $4K$ עם $K>1$.

בקשר להצגתם של מספרים טבעיים בתור סכום של שני רבועים המצב הוא לא כל כך פשוט. נסתפק פה בהערה אחת בקשר למספרים אי־זוגיים.

נניח ש- $x=2K-1=a^2+b^2$

במקרה זה בהכרח אחד מהמספרים a ו- b הוא זוגי והשני אי־זוגי, למשל $a=2r$ ו- $b=2s-1$.

אזי $x=2K-1=4r^2+4s^2-4s+1$

ומכאן $K-1=2(r^2+s^2-s)$ ז.א. $K-1$ מתחלק ב-2 ו- K הוא מהצורה $K=2t+1$

לכן $x=2(2t+1)-1=4t+1$

כך קבלנו שתנאי הכרחי לכך שמספר אי־זוגי x ינתן להצגה בתור סכום של שני רבועים הוא ש-x הוא בעל הצורה $x=4t+1$ אין זה אבל תנאי מספיק, כי למשל $9=4.2+1$ אינו ניתן להצגה כסכום של שני רבועים.

מהנ"ל ברור גם שאף מספר מהצורה $4t+3$ אינו ניתן להצגה כסכום של שני רבועים.

לבסוף נביא בלי הוכחה את המשפט הפותר את בעית ההצגה של מספרים טבעיים בתור סכום של שני רבועים. (הוכחתו נמצאת, למשל, בספרו של W. Sierpinski, Teoria liczb II עמ' 438.

<u>משפט 2</u>. מספר טבעי x הוא סכום של שני רבועים, אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים גם יחד.

א) אם בפרוק של x לגורמים ראשוניים מופיעים גורמים מהצורה $4t+3$ הרי בחזקה זוגית בלבד.

ב) או שבפרוק הנ"ל המספר 2 מופיע בחזקה אי־זוגית או שיופיע שם גורם ראשוני מהצורה $4t+1$.

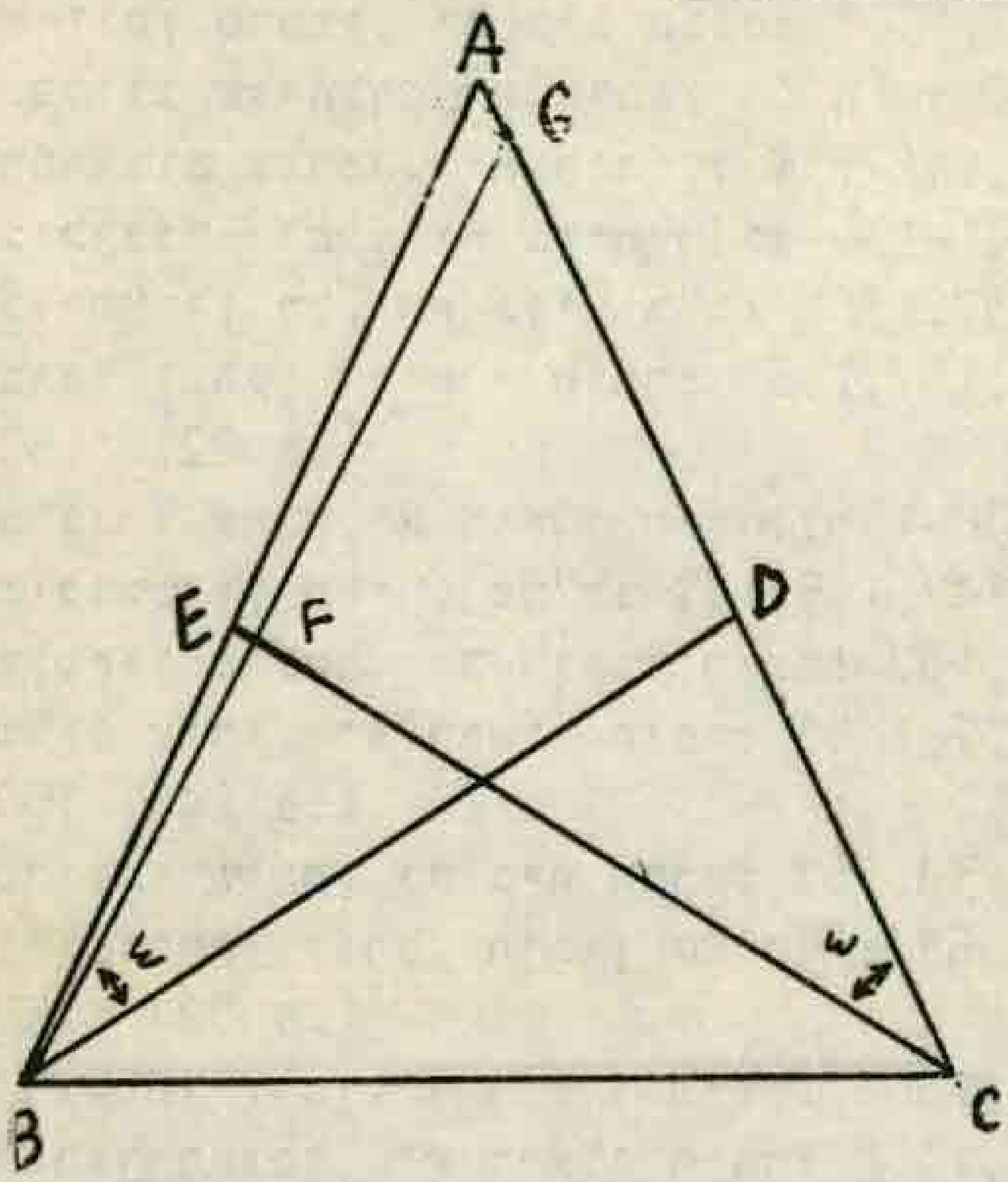
בקשר להצגתם של מספרים טבעיים בתור סכום (או הפרש) של שני רבועים אפשר כמובן לשאול בכמה אופנים אפשר להציג מספר נתון בצורת סכום (או הפרש) כזה. לדוגמה:

$$50=1^2+7^2=5^2+5^2$$

המתעניין בשאלות אלה יוכל למצוא את פתרונן בספרו המצוטט לעיל של W. Sierpinski.

הוכחה בדרך השלילה למשפט:

<u>אם חוצי שתי זויות במשולש שורים המשולש</u>
<u>הוא שורה שוקים</u>



<u>משפט:</u> משולש שבו שני חוצי זויות שלו שוים הוא שוה שוקים.

<u>נתון:</u> משולש ABC

BD חוצה זוית של $\measuredangle B$

CE חוצה זוית של $\measuredangle C$

$BD = CE$

<u>צל"ה:</u> שהמשולש ABC הוא שוה שוקים.

<u>הוכחה (בדרך השלילה)</u>

נניח כי המשולש הוא לא שוה שוקים $\measuredangle B \neq \measuredangle C$

אז $\measuredangle B > \measuredangle C$

או $\measuredangle B < \measuredangle C$. אם $\measuredangle B > \measuredangle C$ גם $\measuredangle \frac{B}{2} > \measuredangle \frac{C}{2}$ זאת אומרת

$$\measuredangle DBA > \measuredangle ECA = W \qquad (1)$$

אם נעביר עתה מנקודה B קו BG כך שזוית $\measuredangle GBD$ תהיה שוה ל- W הקו BG נמצא בתוך הזוית $\measuredangle ABD$ בגלל האי שויון מס. (1). BG חותך את EC בנקודה F. נקודה F נמצאת בן נקודות E ו C. במשולש GBC ולפי משפט ידוע $\measuredangle GBC > \measuredangle GCB$ (אם שתי זויות של משולש אינן שוות מול הזוית הגדולה מונחת הצלע הגדולה)

$$GC > GB$$

או $\frac{GC}{GB} > 1 \qquad (2)$

המשולשים GBD ו GCF דומים

מפני ש- $\measuredangle GBD = \measuredangle GCE = W$ לפי בניה

$\measuredangle GBC$ משותפת.

אז $\frac{CG}{GB} = \frac{CF}{BD}$

ובגלל האי שויון מס. (2)

גם $\frac{CF}{BD} > 1$ או $\frac{CF}{CE} > 1$

מפני שלפי נתון $BD = CE$, דבר זה לא יתכן היות והנקודה F נמצאת בין הנקודות C ו E.

בדיוק באותו אופן מוכיחים כי זוית $\measuredangle B$ לא יכולה להיות קטנה מזוית $\measuredangle C$ ולכן $\measuredangle B = \measuredangle C$ והמשולש הוא שוה שוקים.

(שם המחבר אבד לנו, נא להודיענו ונפרסמו בחוברת הבאה)

רשימת פותרי השאלות מס. 136 - 150

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר.

1. איזנמן מיכאל, יב בית הכרם: 150-145,143-137,136* (43 נ.)
2. אפלויג אלימלך, יא תיכון ה' ת"א: 150,146,142*,140,137 (12 נ.)
3. אהרונוב נורמה, יא חולון: 146,145,141-137 (20 נ.)
4. בוכינגר יואל, יא גזית ר"ג: 150-145,143,141-136 (41 נ.)
5. בורשטיין דב, יא גזית ר"ג: 150-145,143,141-137,136* (40 נ.)
6. בוסל יצחק, י ריאלי חיפה: 149,145,141*,140*,139,138*,137,136*, 150 (22 נ.)
7. ג'נגול אריה, יא ריאלי חיפה: 150-147,146*,145-141,138-136 (39 נ.)
8. גולדשטיין מאיר, צה"ל: 147,145,137 (8 נ.)
9. זלטקין מיכאל, יב ריאלי חיפה: 150-143,141-139,138*,137 (39½ נ.)
10. טליל אורי, יא ריאלי חיפה: 148,145,142,140,139*,138,137,136*, 150 (24 נ.)
11. טרוקמן שלמה, יא בית הכרם: 150,148,147,144*,140,139,137 (19 נ.)
12. יקימובסקי יורם, תיכון א' ת"א: 148,147,145,143*,141-137,136*, 150 (32 נ.)
13. ירושלמי זלמן, י ריאלי חיפה: 150,146,145,140,138*,137,136* (16½ נ.)
14. לורנד ראובן, יא ריאלי חיפה: 145,143,140,139,138*,137,136*, 150,148,147,146* (32 נ.)
15. לביא נתן, יב בית הכרם: 149,148*,147-145,143,142*,141-136, 150 (42 נ.)
16. לוי אליהו, יא ריאלי חיפה: 148,147,145,144,141-137,136*, 150 (31 נ.)
17. סתוי יונתן, יא הרצליה ת"א: 150-137,136* (46 נ.)
18. סורין אנדרי, ט ביה"ס המקצועי חיפה: 142*,137 (3½ נ.)
19. עמיר אליהו, י תיכון בני-ברק: 150,149,145,141,140,138,137 (19 נ.)
20. פרידלנד שמואל, יב ריאלי חיפה: 150-145,143-136 (45 נ.)
21. פינציוק גרשון, יב ריאלי חיפה: 150*,149-145,143-136 (43 נ.)
22. פרויד בועז, יב ביה"ס המקצועי חיפה: 148,146,145,143,141-138, 150 (28 נ.)
23. קושניר ראובן, יא ריאלי חיפה: 148-145,143,142,140-137,136*, 150 (38 נ.)
24. רימון מרדכי, יב גימנסיה עברית ירושלים: 150,148,145,140 (10 נ.)

התכן

כתובת המערכת:

י. דוד, ביה"ס תיכוני עירוני א', רח' בכורי העתים 2, ת"א.

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.