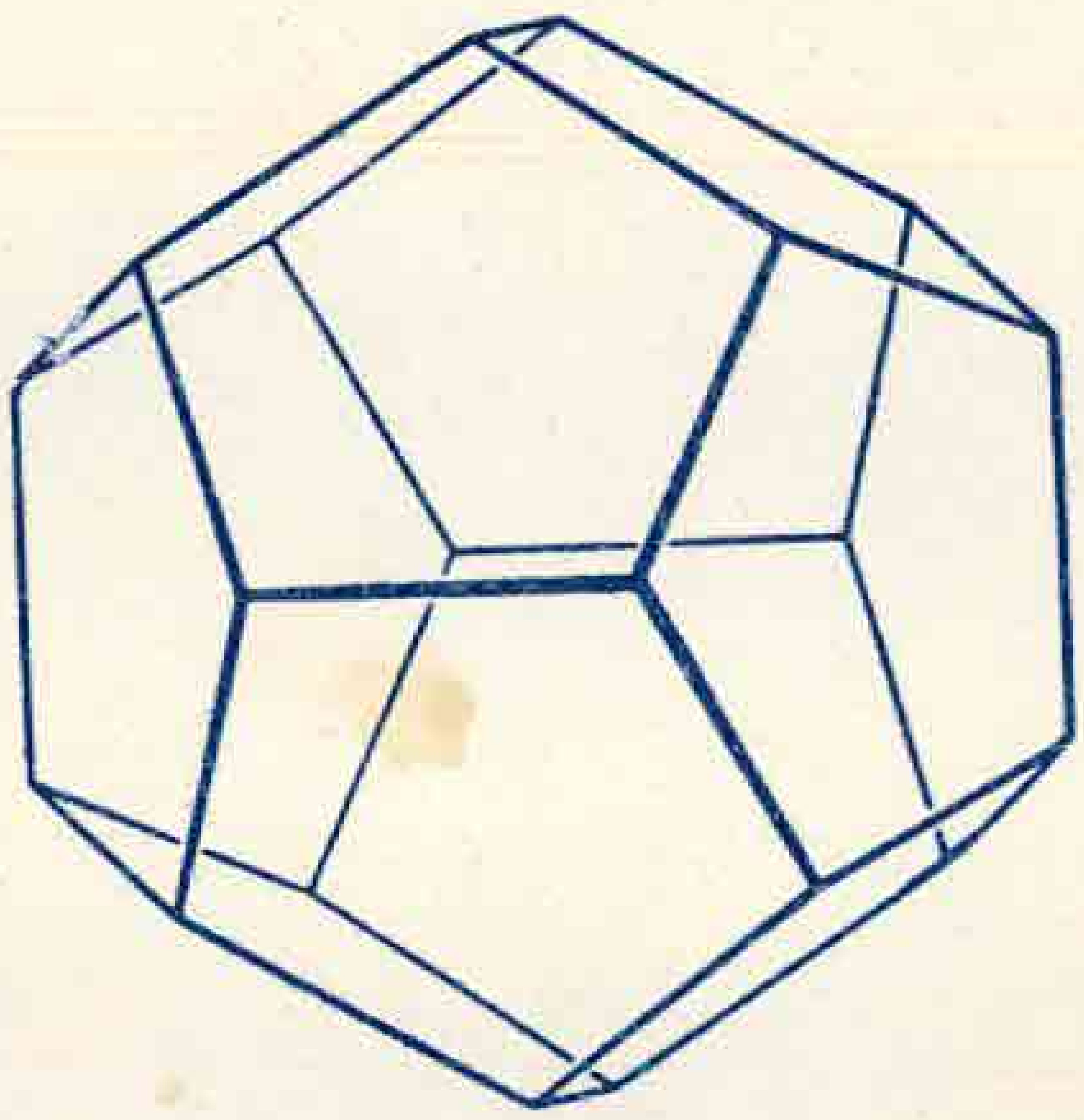
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 2 ת"א. כסלו תשכ"ד - דצמבר 1963 מס' 5

יוצא לאור בחסות
ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. דוד

המערכת: א. גינזבורג, מ. כהן.

דבר המערכת

אנו שמחים על הגידול הניכר במספר קוראי "הגליונות" ובעיקר על הפותרים החדשים של בעיות התחרות. מובן שחוג הקוראים מתחלף מידי שנה ושנה, בוגרי בתי הספר התכוניים מפסיקים בדרך כלל בקריאה ובמקומם באים תלמידי כתה י.

לגבי הקוראים החדשים - וגם הותיקים - ברצוננו להדגיש שנפרסם רק מאמרים המודפסים במכונת כתיבה או מוגשות בכתב-יד ברור מצדו האחד של הגליון, ברווח כפול, ובשוליים רחבים, כמו כן יובאו בחשבון הנקודות רק אותם הפתרונות שיוגשו בצורה נקיה וברורה מצדו האחד של הגליון, שרטוטים יש להגיש באופן ברור ומדויק, כשהם מוכנים לדפוס.

בשער חוברת זו מובא שרטוט הדודקאדר שהנו הגוף המשוכלל החמישי; בשערי ארבע החוברות הקודמות תמצאו את שאר הגופים המשוכללים. בחוברת הבאה ינתן מאמר על חמשת הגופים המשוכללים.

בכוונתנו להרבות גם במאמרים שאינם דורשים ידיעות מוקדמות רבות ומתאימות מבחינת רמתם גם לתלמידי כתות ט'-י'. בחוברת שלפנינו משמשים דוגמא לכך המאמרים של נתן אליוסף ושל דב ורדן.

נתברר בינתיים שההוכחה בדבר חוצי הזויות במשולש שוה-שוקיים שניתנה בחוברת האחרונה היא מאת מר יוסף פפו כהן, מורה בביה"ס התיכון ברמת השרון.

אנחנו חוזרים על בקשתנו להעביר את כל התשלומים דרך בנק הדאר חשבון מס. 23357.

בעיה ופתרונה

פשט את הבטוי הבא ע"י פתיחת הסוגריים:

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ (x-z)$$

מספר הגורמים 26 לפי מספר האותיות באלף-בית האנגלי.

(ראה פתרון בע"מ 7)

נכון או לא נכון ?

תלמיד מחלק $a^2 - b^2$ ב- $a - b$ בצורה הבאה:

$a = a : a^2$, $+ = - : -$, $b = b : b^2$, לכן $a+b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$.

פעם אחרת הוא מצמצם כדלקמן:

$\frac{1}{4} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}$, $\frac{1}{5} = \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}$, $\frac{2}{5} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}$

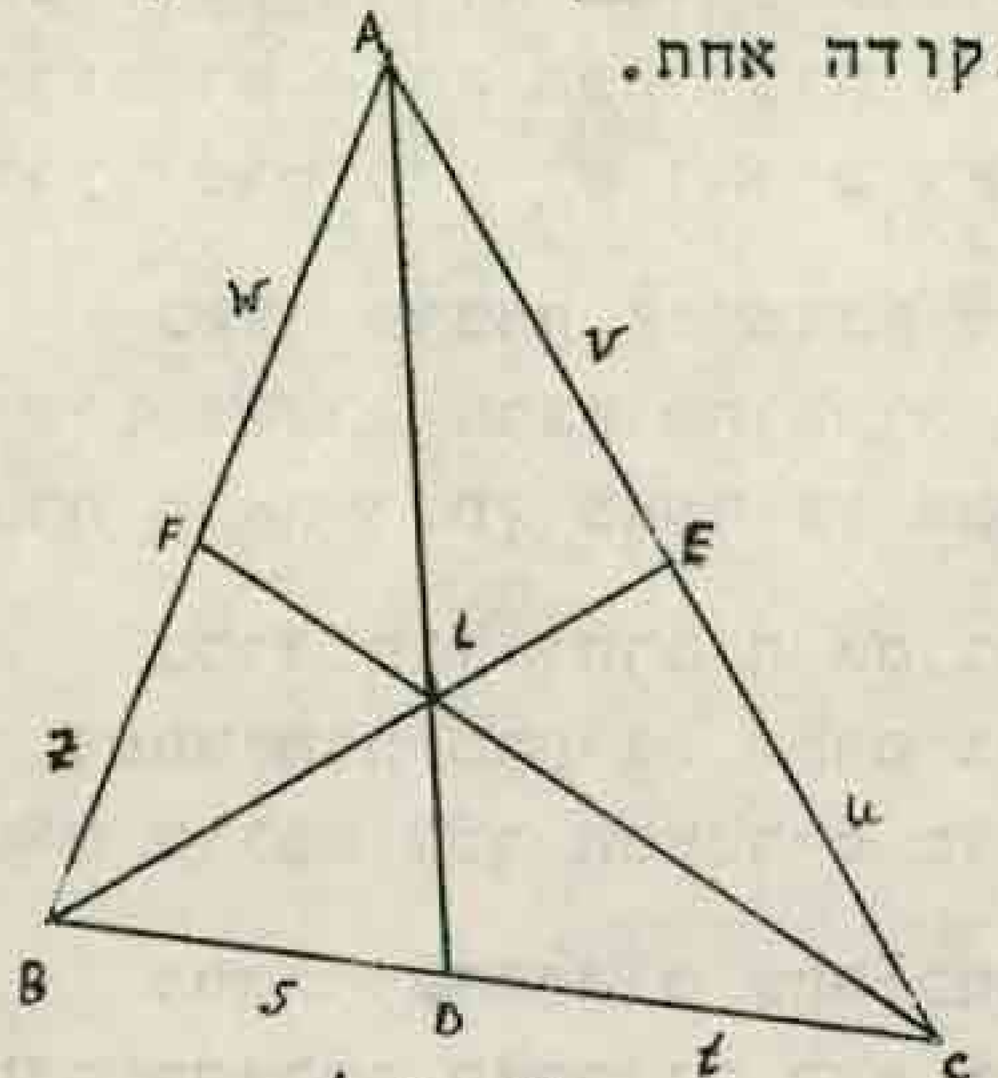
מה דעתכם?

פירוש פיסיקאלי של משפטים גיאומטריים

פרופ' ל.נ. פוזנר

1. המשפטים הידועים על פגישת תיכוני המשולש בנקודה אחת וכן על צומת הגבהים ועל פגישת חוצי הזויות הם מקרים מיוחדים של משפט כללי, שנתגלה ע"י ציבא (Ceva) במאה השבע עשרה. משפט זה אומר:

שלושה ישרים, העוברים דרך קדקודי המשולש ומחלקים את הצלעות לפי יחסים, שמכפלתם שוה לאחד, נפגשים בנקודה אחת.



ציור 1

נרשום את המשפט בקיצור, בעזרת הסימונים שבציור 1:

אם קיים

$$\frac{s}{t}\cdot\frac{u}{v}\cdot\frac{w}{z} = 1 \qquad (1)$$

כלומר

$$s\cdot u\cdot w = t\cdot v\cdot z \qquad (2)$$

הרי הקטעים CF, BE, AD נפגשים בנקודה אחת (L).

קודם כל נוכח, שהמשפטים הנזכרים למעלה הם אמנם מקרים פרטיים של משפט ציבא.

א) אם CF, BE, AD הם התיכונים

מקבלים

$$\frac{s}{t} = \frac{u}{v} = \frac{w}{z} = 1$$

לכן

$$\frac{s}{t}\cdot\frac{u}{v}\cdot\frac{w}{t} = 1$$

ב) אם הקטעים הנ"ל הם חוצי הזויות, הרי

$$\frac{s}{t} = \frac{AB}{AC} \; ; \; \frac{u}{v} = \frac{BC}{AB} \; ; \; \frac{w}{z} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{s}{t}\cdot\frac{u}{v}\cdot\frac{w}{t} = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{AC\,.\,AB\,.\,BC} = 1$$

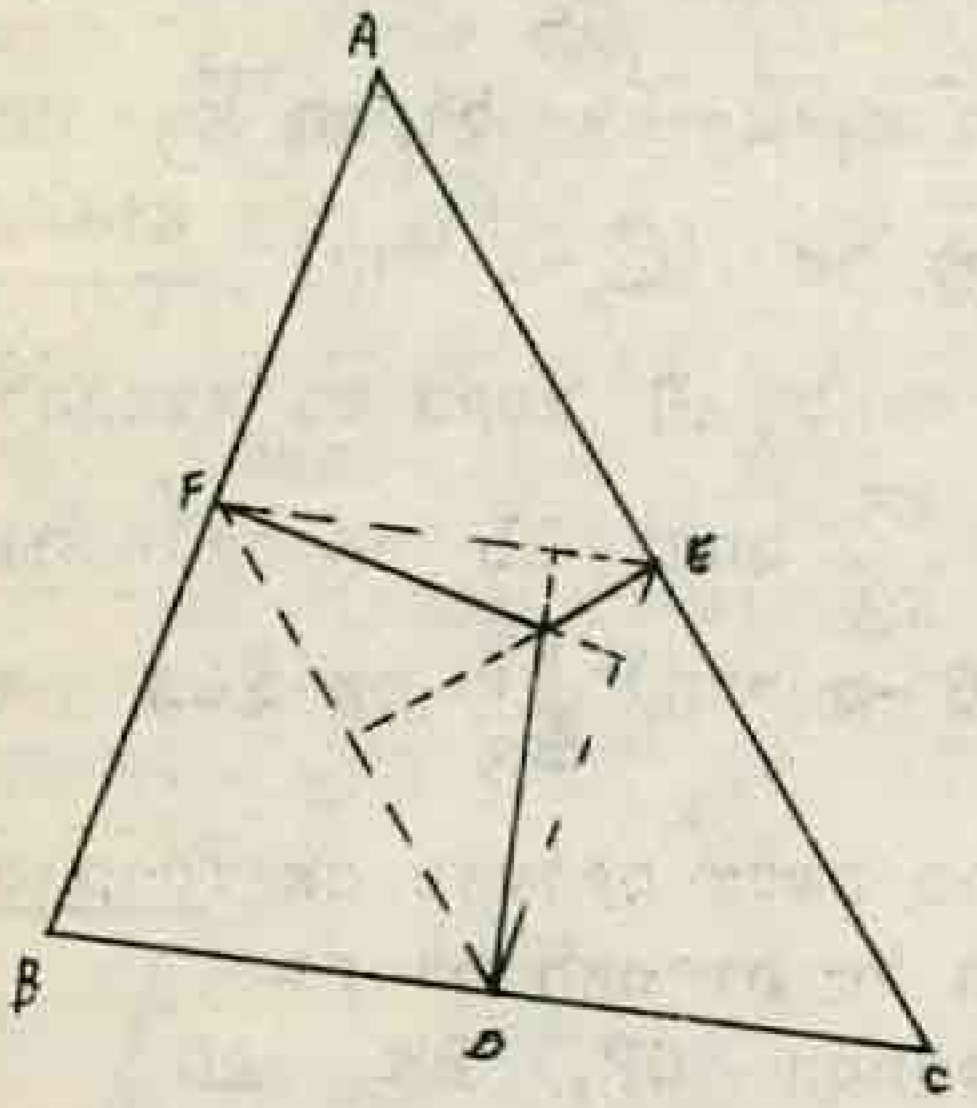
ג) במקרה של שלשת הגבהים:

$$\begin{aligned}
s &= AD\cdot \cot B = h_a\cdot \cot B\\
t &= AD\cdot \cot C = h_a\cdot \cot C\\
u &= BE\cdot \cot C = h_b\cdot \cot C\\
v &= BE\cdot \cot A = h_b\cdot \cot A\\
w &= CF\cdot \cot A = h_c\cdot \cot A\\
z &= CF\cdot \cot B = h_c\cdot \cot B
\end{aligned}$$

$$s\cdot u\cdot w = h_a\cdot h_b\cdot h_c\cdot \cot B\cdot \cot C\cdot \cot A = t\,v\,z$$

מסקנה: גם האנכים האמצעיים של צלעות משולש נפגשים בנקודה אחת
ובאמת, האנכים האמצעיים של
המשולש ABC (ציור 2) הם
הגבהים של המשולש DEF .

שים לב: בדרך כלל נוהגים להוכיח
עובדה זו באופן בלתי
תלוי וכמסקנה ממנה
מקבלים שהגבהים
במשולש נפגשים
בנקודה אחת.

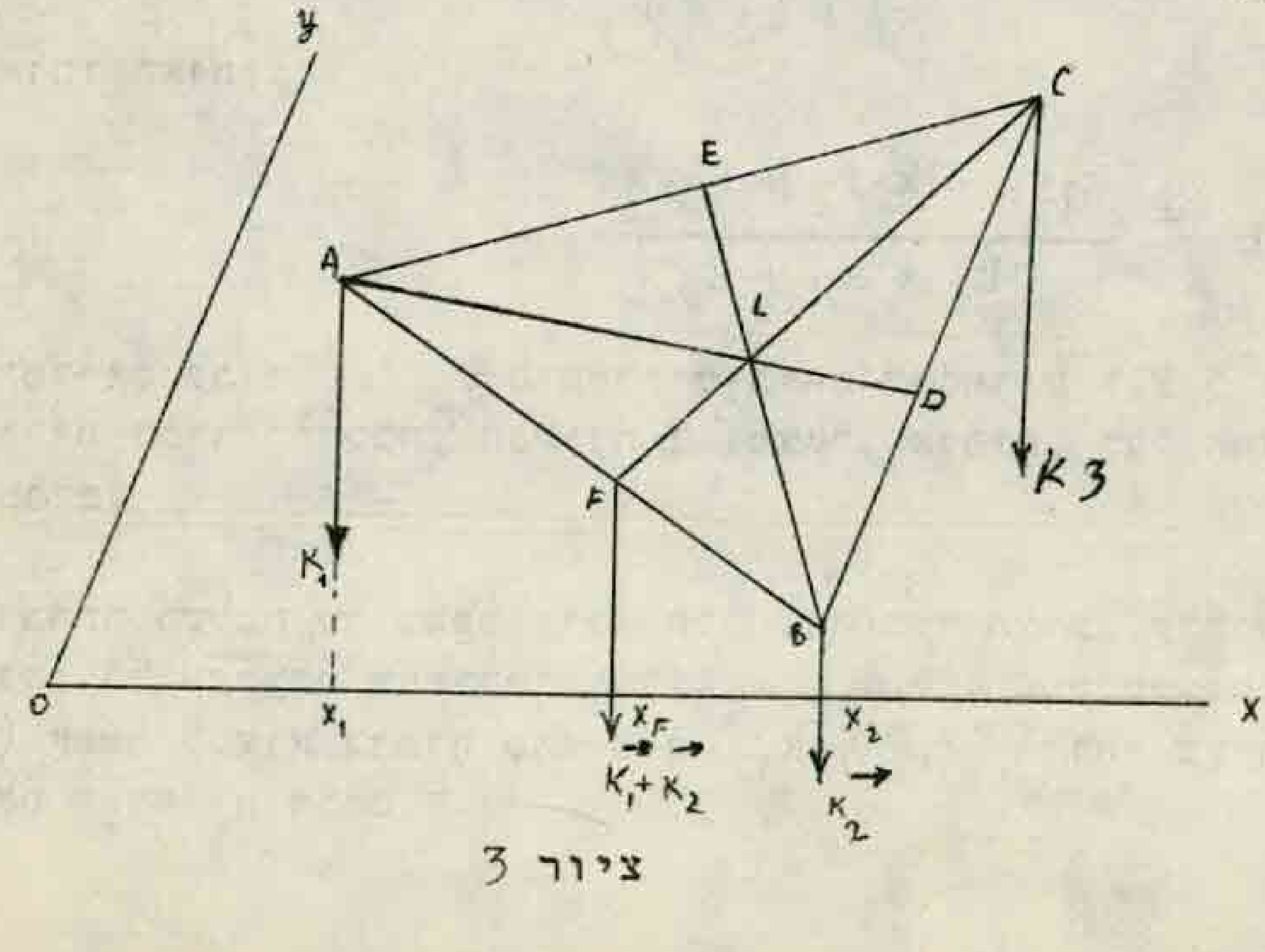


ציור 2

<u>הערה:</u> במשולש ישר זוית ($C = 90^o$) הגבהים נפגשים בקודקוד C.
$\frac{s}{t}$ אינו קיים במקרה זה ולמשואה (1) אין שום מובן.
לעומת זאת התנאי (2) נשמר גם כאן: שני האגפים שוים
ל-0.

את המקרה של משולש קהה זוית נברר בהמשך.

2. ניתן למשפט ציבא פירוש פיסיקאלי, שיעזור לנו גם למצוא הוכחה פשוטה שלו.



ציור 3

נניח שהמשולש ABC נמצא במישור הצירים (x,y), ונתאר לעצמנו שלושה כוחות מקבילים, $\vec{k_1},\vec{k_2},\vec{k_3}$ פועלים בנקודות A,B,C בהתאמה. נמצא שקול הכוחות הללו בדרך הבאה: קודם נרכיב $\vec{k_1}$ עם $\vec{k_2}$ השקול $\vec{k_1}+\vec{k_2}$ פועל בנקודה F, המחלקת את הקטע AB ביחס הפוך לגודל הכוחות k_1 ו-$\vec{k_2}$ ז.א. ביחס $\frac{k_2}{k_1}$ (החל מ- A). את השקול הזה נרכיב עם $\vec{k_3}$ השקול $\vec{k_1}+\vec{k_2}+\vec{k_3}$ פועל בנקודה L המחלקת את הקטע CF ביחס $\frac{k_1+k_2}{k_3}$ (החל מ- C). אך נקודת האחיזה של שקול שלשת הכוחות מוכרחה להימצא גם בקטע AD, כאשר D היא נקודת האחיזה של השקול $\vec{k_2}+\vec{k_3}$ והמחלקת את BL ביחס $\frac{k_3}{k_2}$ (החל מ- B) וגם בקטע BE, כאשר E מחלקת את CA ביחס $\frac{k_1}{k_3}$ (החל מ- C)

<u>סיכום</u>: אם פועלים שלשה כוחות מקבילים בקודקודי המשולש, נמצאת נקודת האחיזה של הכוח השקול בנקודת הפגישה של הקטעים AD, BE, CF המחלקים את הצלעות לפי היחסים:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{k_3}{k_2} \; ; \quad \frac{CE}{EA} = \frac{k_1}{k_3} \; ; \quad \frac{AF}{FB} = \frac{k_2}{k_1}$$

כלומר:

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$$

<u>הערה</u>: באופן אנליטי מקבלים:

$$x_F = \frac{k_1 \cdot x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2}$$

$$x_L = \frac{(k_1 + k_2)\, x_F + k_3 x_C}{k_1 + k_2 + k_3} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

ובאותו האופן:

$$y_L = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

הביטויים עבור x_2, y_2 סימטריים ביחס למספרים 3,2,1 ולכן אינם תלויים בסדר ההרכבה. הנקודה L נמצאת, איפוא, בכל אחד משלשת הישרים.

3. להוכחתה השלמה של משפט ציבא חסר עוד צעד חשוב. עלינו להראות שלגבי כל הערכים האפשריים של z,w,v,u,t,s הממלאים את (2) או (1) אפשר למצוא כוחות מתאימים $\vec{k_1}, \vec{k_2}, \vec{k_3}$. זוהי בעיה אלגברית, בעלת פתרונות רבים.

נניח למשל:

$$k_3 = \lambda s; \quad k_2 = \lambda t; \quad k_1 = \lambda \frac{s}{v} \cdot u$$

אזי:

$$\frac{s}{t} = \frac{k_3}{k_2}$$

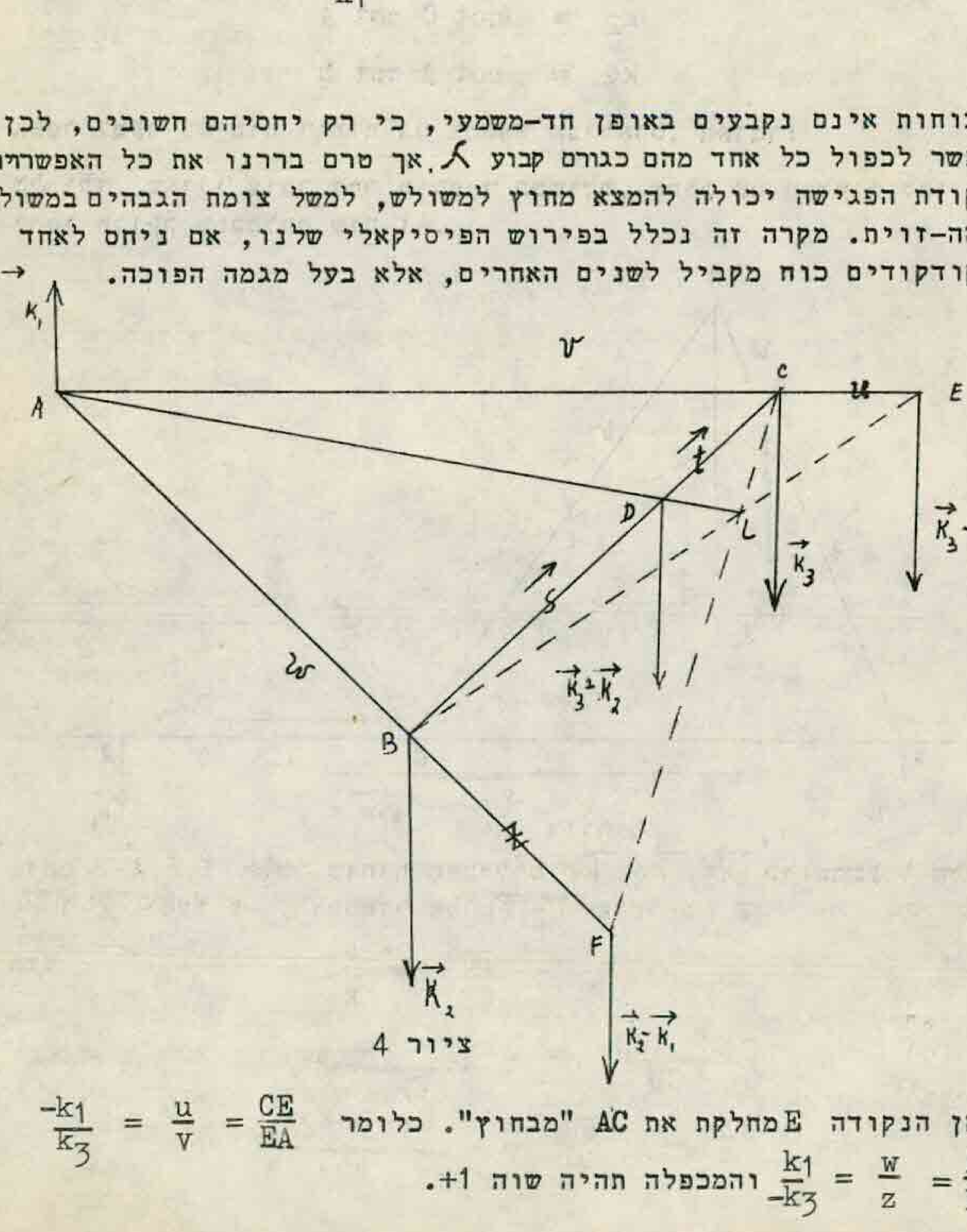
$$\frac{u}{v} = \frac{k_1}{k_3}$$

לפי הנתון:

$$\frac{s}{t} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{w}{z} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{w}{z} = 1$$

לכן גם היחס השלישי $\frac{w}{z} = \frac{k_2}{k_1}$ מתקיים.

הכוחות אינם נקבעים באופן חד-משמעי, כי רק יחסיהם חשובים, לכן אפשר לכפול כל אחד מהם כגורם קבוע λ. אך טרם בררנו את כל האפשרויות. נקודת הפגישה יכולה להמצא מחוץ למשולש, למשל צומת הגבהים במשולש קהה-זוית. מקרה זה נכלל בפירוש הפיסיקאלי שלנו, אם ניחס לאחד הקודקודים כוח מקביל לשנים האחרים, אלא בעל מגמה הפוכה.



ציור 4

כאן הנקודה E מחלקת את AC "מבחוץ". כלומר $\frac{-k_1}{k_3} = \frac{u}{v} = \frac{CE}{EA}$

$\frac{k_1}{-k_3} = \frac{w}{z} = \frac{AF}{FB}$ והמכפלה תהיה שוה 1+.

כאשר $k_1 = k_2$ (ז.א. שני הכוחות שוים בגדלם) נקבל צמד כוחות והנקודה F "תתרחק לאין סוף", CF יהיה מקביל ל AB והמרובע ABLC יהיה טרפז. אם שלשת הכוחות שוים בגודלם, יהפך מרובע זה למקבילית. AD יהיה תיכון המשולש ו- AL אלכסון המקבילית.

4. קל למצוא את הכוחות $\vec{k_1}, \vec{k_2}, \vec{k_3}$ במקרים מיוחדים:

א) עבור התיכונים: $k_1 = k_2 = k_3 = k$

ב) עבור חוצי הזויות: $k_1 = \lambda a, \quad k_2 = \lambda b, \quad k_3 = \lambda c$

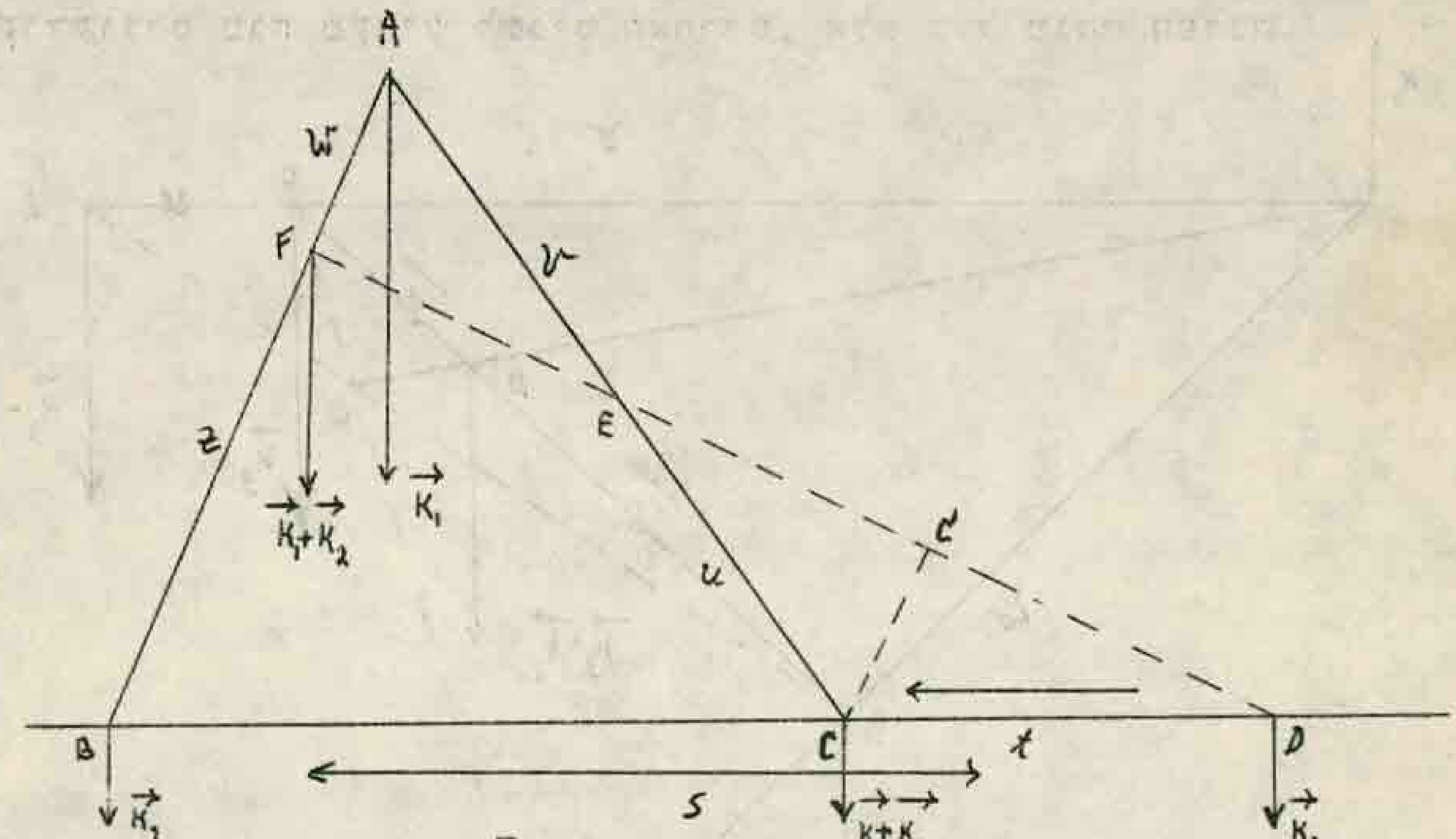
λ : גורם כל שהוא, c,b,a, צלעות המשולש.

ג) עבור הגבהים:

$$k_1 = \cot B \cot C$$
$$k_2 = \cot C \cot A$$
$$k_3 = \cot A \cot B$$

5. אפשר לטפל בשיטות דומות גם במשפט מנילאוס, האומר:

כל ישר, שאינו עובר דרך קודקוד המשולש, מחלק את הצלעות לפי יחסי חלוקה שמכפלתם שוה 1-.



ציור 5

ניחס ל-D,B,A שלשה כוחות מקבילים $\vec{k_3}, \vec{k_2}, \vec{k_1}$ כך שהשקול של $\vec{k_2}$ ו $\vec{k_3}$ יפעל ב- C והשקול של $\vec{k_2}, \vec{k_1}$ פועל ב- F.

אז:

$$\frac{BC}{CD} = \frac{K_3}{K_2}$$

$$\frac{BC + CD}{CD} = \frac{k_3 + k_2}{k_2}$$

$$\frac{s}{t} = \frac{BD}{DC} = -\frac{k_3 + k_2}{k_2}$$

נקודת האחיזה של שקול הכוחות ($\vec{k}_2+\vec{k}_3$) ו $\vec{k}_1$ נמצאת בקטע AC.

נקודת האחיזה של שקול הכוחות $\vec{k}_1$ ו- $\vec{k}_2$ היא F לפי הנתון. לכן נמצאת נקודת האחיזה של שקול הכוחות $\vec{k}_1+\vec{k}_2$ $\vec{k}_3$ בקטע DF. אך היות ונקודת האחיזה של שקול שלשת הכוחות אינה תלויה בסדר ההרכבה, היא נמצאת גם בקטע AC וגם בקטע DF, כלומר בנקודה E. לגבי הקטעים על הצלעות קיימים היחסים:

(חלוקה חיצונית)

$$\frac{s}{t} = -\frac{k_3 + k_2}{k_2}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{k}{k_2+k_3}$$

$$\frac{w}{z} = \frac{k_2}{k_1}$$

ומכאן

$$\frac{s}{t} \circ \frac{u}{v} \cdot \frac{w}{z} = -1$$

6. נעיר לבסוף שלכל ההוכחות "הפיסיקאליות" הללו נודע דיוק מתימטי. רק "הלבוש" הוא פיסיקאלי והוא הנותן לנו הבנה עמוקה יותר של המשפטים.

שאלות אל הקוראים.

1. הוכח את משפט מנילאוס באופן גיאומטרי.
   רמז; העבר קטע $CC' \parallel BA$ (ציור 5)
2. הוכח את משפט ציבא בעזרת שימוש כפול במשפט מנילאוס (פעם לגבי המשולש ABD ופעם לגבי ADC (ציור 1) .
3. הראה, שמשפט מנילאוס נובע ממשפט ציבא.
   רמז: השתמש במרובע המושלם (AD) FBCE(קרניים הרמוניות).
4. תן פרוש פיסיקאלי והוכחה "פיסיקאלית" למשפט הבא: ארבעה הקוים הישרים, המחברים את קודקודי הפירמידה המשולשת עם מרכזי הכובד (נקודות פגישת התיכונים) של הפיאות, נפגשים בנקודה אחת.
5. הבטוי "מרכז הכובד של משולש" עבור נקודת פגישת התיכונים אינו מתכון לנקודת האחיזה של שקול שלש מסות נקודתיות שוות בקודקודיך (אף על פי שגם זה נכון); אלא לנקודת האחיזה של כוחות הכובד, הפועלים על שטח המשולש, אם המשולש עשוי מחומר אחיד. הוכח!

פתרון הבעיה מע"מ 1

הבטוי שוה ל-0, כי אחד הגורמים (x-x) מתאפס.

הבעיה האיזופרימטרית

י. דוד

בראשונה נפרש את המלה הלועזית המופיעה בכותרת: איזו = שוה, פרימטרוס = הקף ביונית, כלומר: איזופרימטרי פרושו "שוה-הקף".

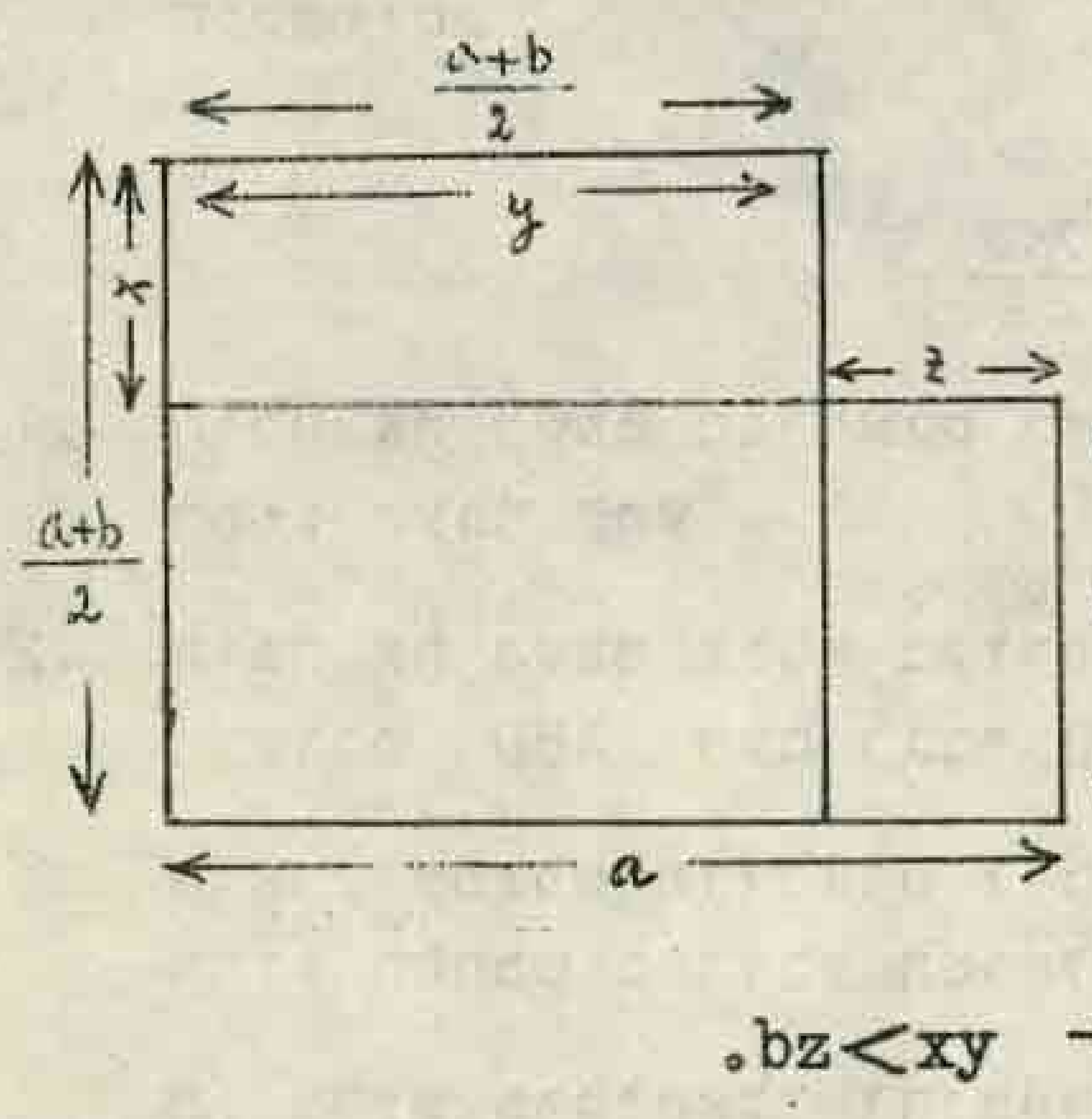
הבעיה שלפנינו היא עתיקת יומין. ישנן אגדות מהתקופות הקדומות ביותר של האנושות בהן מסופר על הענקות ופרסים מצד שליטים עבור שרותים טובים בצורה המקורית הבאה: הזוכה יקבל אותו שטח קרקע אשר את הקפו יספיק לחרוש בזמן מסוים, כדי להפיק תועלת גדולה ביותר מן הפרס, היה צורך לדעת, מהי צורת הקרקע שתבטיח שטח מוקף גדול ביותר. מכאן מקורה של הבעיה האיזופרימטרית, שמשמעותה במישור היא החקירה בדבר העקומה הסגורה בעלת הקף נתון המקיפה את השטח הגדול ביותר.

נבדוק מקרים פרטיים אחדים של בעיתנו.

א) מצא את המלבן בעל השטח הגדול ביותר בין כל המלבנים בעלי אותו ההקף.

כידוע, מהוה הרבוע את הפתרון המבוקש. ניתן הוכחה הנדסית פשוטה:

יהי $a + b$ חצי-הקפו של מלבן כלשהו, ולכן צלע הרבוע בעל אותו ההקף תהיה $\frac{a + b}{2}$. נעיין בשרטוט הבא:



יש להראות ששטח המלבן xy גדול משטח המלבן bz כי שארית השטח משותפת למלבן ולרבוע. נניח ש- $a > b$ (בהתאם לציור). מתוך שויון ההקפים נובע:

$$x + b + y = b + y + z$$

לכן: $x=z$. כלומר, צלע אחת של הרבוע שוה לצלע אחת של המלבן. b קטנה מ- $y = \frac{a+b}{2}$ בתור חלק ממנה. ובזה הוכחנו ש- $bz < xy$.

אפשר לכתוב את התוצאה גם בצורה אלגבראית כדלקמן:

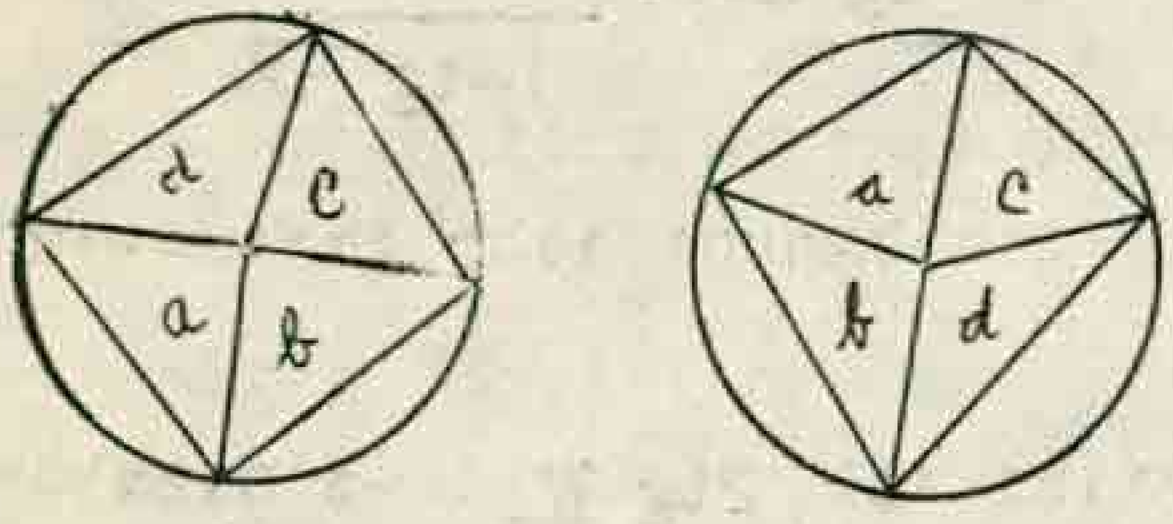
$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 > ab \quad \text{או:} \quad \frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$$

כלומר, הממוצע החשבוני של שני איברים גדול מן הממוצע ההנדסי, בתנאי ש a ו b מספרים חיוביים ושונים. (הוכח אי-שויון זה בדרך אלגבראית).

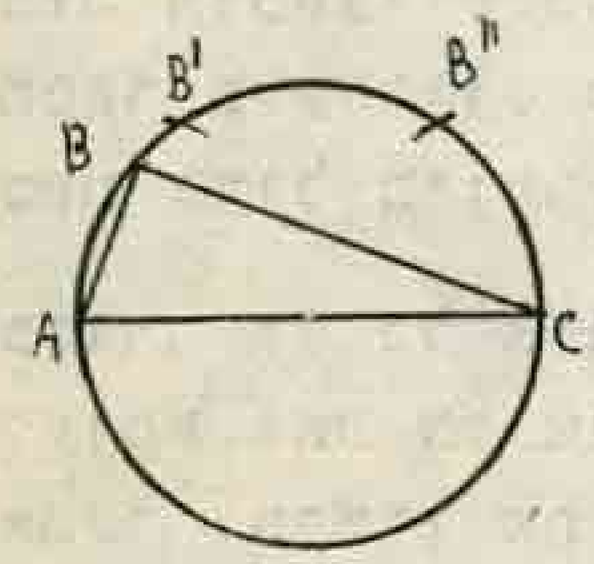
ב) מבין המצולעים בני n צלעות החסומים במעגל נתון, איזהו בעל השטח הגדול ביותר?

בעיה זו אינה בדיוק איזופרימטרית, כי ההיקפים של המצולעים אינם קבועים, אלא רק חסומים, כלומר קטנים מהקף המעגל הנתון.

לשם התרת הבעיה נחלק מצולע כל שהוא חסום במעגל למשולשים שוי שוקיים ע"י חבור מרכז המעגל עם קדקדי המצולע. כפי שנראה מן השרטוט לא ישתנה המצולע בהקפו ובשטחו, אם נחליף את סדר המשולשים.



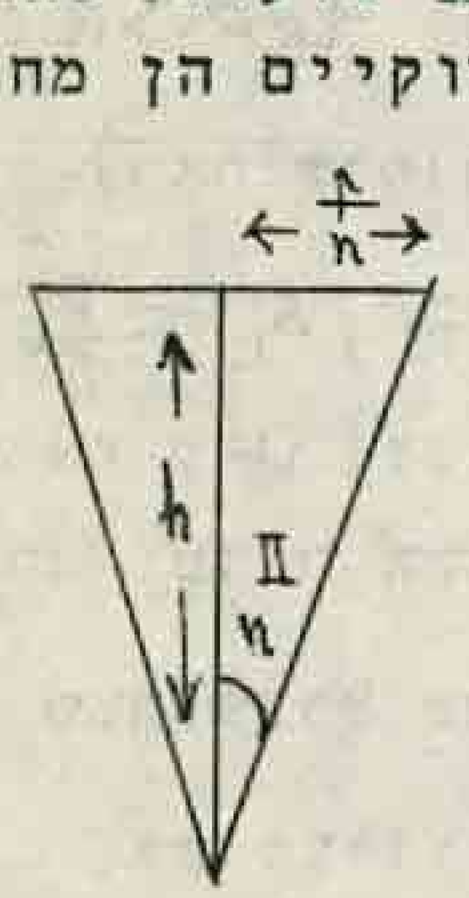
במקרה שהמצולע איננו משוכלל, לפחות צלע אחת גדולה מ- $\frac{H}{n}$ (H: הקף המצולע, n: מספר צלעותיו) ולפחות צלע אחת קטנה מ- $\frac{H}{n}$ (מדוע?). נחליף את סדר המשולשים כך שצלע גדולה מ- $\frac{H}{n}$ (BC) סמוכה לצלע קטנה מ- $\frac{H}{n}$ (AB). נקצה על קשת המעגל $AB' = \frac{H}{n}$ ו $AB = CB''$ (ראה שרטוט!). הנקודה B' צריכה להמצא בין B ל B'' כי: $AB < AB'$ לפי הנתון. לו היתה B' נמצאת בין B'' לבין C היה $AB'' < AB'$. אבל $AB'' = BC$ (מדוע?). BC גדול מ- $\frac{H}{n}$ לפי הנתון, בו בזמן ש- $AB' = \frac{H}{n}$ לכן B' נמצאת בין B לבין B''.



אם נחליף משולש ABC במשולש AB'C נגדיל את השטח. במצולע החדש לפחות אחת הצלעות שוה ל- $\frac{H}{n}$. אם נחזור על התהליך הזה לכל היותר n-1 פעמים נוספות, נקבל מצולע משוכלל אשר שטחו גדול משטח כל המצולעים הקודמים.

ג) מבין כל המצולעים המשוכללים בעלי הקף נתון איזהו בעל השטח הגדול ביותר?

נסמן את הקף המצולעים ב- 2p ונבחר מצולע בעל n צלעות. נתבונן במשולש שוה-שוקיים אשר בסיסו אחת מצלעות המצולע, והשוקיים הן מחוגי המעגל החוסם. מחצית זוית קדקד המשולש היא $\frac{\pi}{n}$ (ברדיאנים) וגבהו $h = \frac{p\, ctg\frac{\pi}{n}}{n}$, לכן



שטחו:
$$S_n = \frac{p^2\, ctg\frac{\pi}{n}}{n^2}.$$

במצולע משוכלל בעל 2n צלעות יהיה השטח המתאים:
$$S_{2n} = \frac{p^2\, ctg\frac{\pi}{2n}}{4n^2}.$$

אם נצליח להוכיח ש- $2S_{2n} > S_n$, יהיה פרוש הדבר ששטח המצולע המשוכלל בעל 2n צלעות גדול מזה בעל n צלעות.

נניח ש: $2S_{2n} > S_n$ כלומר $\frac{p^2\, ctg\frac{\pi}{2n}}{2n^2} > \frac{p^2\, ctg\frac{\pi}{n}}{n^2}$,
מכאן נובע $tg\frac{\pi}{n} > 2tg\frac{\pi}{2n}$ (מותר לצמצם ב $\frac{p^2}{n^2}$ כי מספר זה חיובי!).

במקום האגף השמאלי של אי-השויון נוכל לכתוב בעזרת הנוסחה

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$: $\quad tg\frac{\pi}{n} = tg\,2\frac{\pi}{2n} = \frac{2tg\frac{\pi}{2n}}{1-tg^2\frac{\pi}{2n}}$

לכן אי-השויון שלנו יהפך ל: $\frac{2tg\frac{\pi}{2n}}{1-tg^2\frac{\pi}{2n}} > 2tg\frac{\pi}{2n}$.

מותר לצמצם ב- $2tg\frac{\pi}{2n}$, כי בטוי זה חיובי ל $n>1$ ולכן נקבל:
$1 > 1-tg^2\frac{\pi}{2n}$ או: $tg^2\frac{\pi}{2n}>0$.

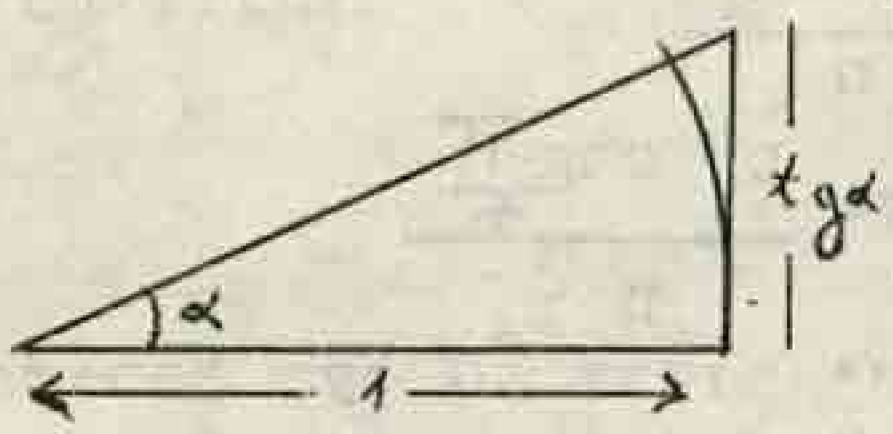
אי-שויון זה מתקיים לכל $n>1$, מכאן שהנחתנו נכונה.
בזה הוכחנו ששטח מצולע משוכלל בעל הקף נתון יגדל, אם נכפיל את מספר צלעותיו. כלומר: אין מצולע משוכלל בעל הקף נתון שהוא בעל שטח גדול ביותר. מצב דומה קיים לגבי הסדרה: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \frac{n}{n+1}$.
בסדרה זו כל איבר גדול מקודמו, אבל אין איבר גדול ביותר ביניהם. לעומת זאת כל איברי הסדרה קטנים מ-1 ושואפים ל-1 (פרוש הדבר: אפשר להקטין את ההפרש בין 1 לבין $\frac{n}{n+1}$ כרצוננו ע"י בחירת n גדול למדי).

נשאלת השאלה, אם גם שטחי המצולעים ההולכים וגדלים הם קטנים ממספר מסוים ושואפים אליו.

שטח המצולע בעל n צלעות יהיה:

$$A_n = n\cdot S_n = \frac{p^2\,ctg\frac{\pi}{n}}{n} = \frac{p^2\frac{\pi}{n}}{\pi\,tg\frac{\pi}{n}}$$

קיים: $tg\alpha>\alpha$ לכל $\alpha<\frac{\pi}{2}$, כי שטח הגזרה $\frac{\alpha}{2}$ קטן משטח המשולש $\frac{tg\alpha}{2}$ (ראה שרטוט!).



לכן: $A_n<\frac{p^2}{\pi}$; אבל $\frac{\alpha}{tg\alpha}$ שואף ל-1, כאשר α שואף ל-0 (ז.א. n שואף לאין סוף).
כלומר: סדרת השטחים שואפת לבטוי $A=\frac{p^2}{\pi}$ שהוא שטח עגול שהקפו 2p (בדוק זאת!).

יש לציין ששקולינו נכונים לכל n, ז.א. אין חשיבות לכך, מאיזה מצולע נצא. בעיה אחרת היא, אם כל המצולעים המשוכללים בעלי הקף נתון מהווים סדרה מונוטונית עולה, כלומר: אם $A_{n+1}>A_n$

או: $\frac{p^2ctg\frac{\pi}{n+1}}{(n+1)} > \frac{p^2ctg\frac{\pi}{n}}{n}$. אי שויון זה

הופך בקלות לאי-השויון הבא:
$$\frac{tg\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} > \frac{tg\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}\ .$$

קשה להוכיח באופן אלמנטרי אי-שויון זה, אבל אלו ביניכם שלמדו חשבון דיפרנציאלי יבינו כי יש רק להוכיח שהפונקציה $y=\frac{tgx}{x}$ עולה מונוטונית בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ ולשם כך יש להראות שהנגזרת חיובית תמיד.
ואמנם:
$$y' = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - tg\, x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}\ .$$
כפי שראינו, $\sin x < x$, בתחום הנ"ל $\cos x < 1$, לכן המונה חיובי. המכנה חיובי בתור רבוע.

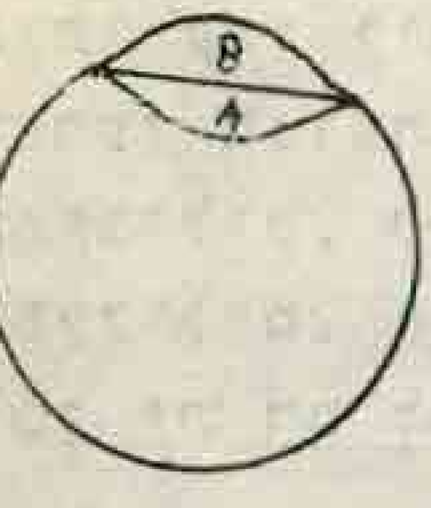
עתה ניגש לדון בבעיה הכללית. נוכחנו לדעת שאין ודאות בקיומו של פתרון לבעיה האיזופרימטרית. הוכחת קיום פתרון כללי אינה קלה כלל וכלל. נתעלם כאן משאלה זו ונוכיח לפי Steiner (מתמטיקאי שויצרי שחי במאה התשע-עשרה), כי אם קיימת עקומה סגורה בעלת הקף נתון ושטח מוקף מקסימלי, הרי היא המעגל.

לא נגדיר כאן מהי עקומה, ונסתפק בידיעות הנרכשות בביה"ס.

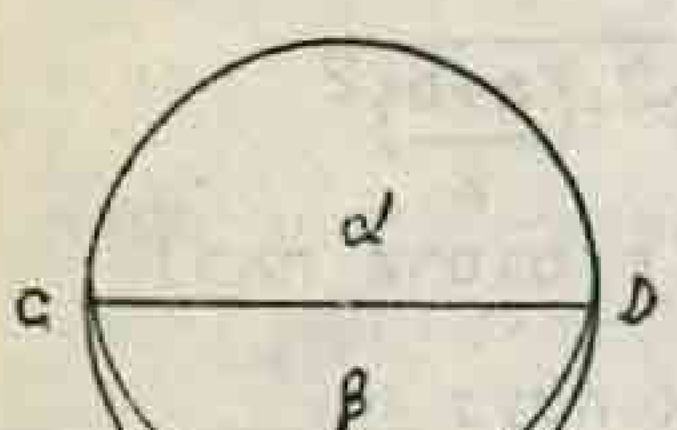
אם קיימת עקומה כזאת, הרי היא חייבת לקיים את התנאים הבאים:

(1) היא צריכה להיות קמורה בכל מקום; כלומר: כל קטע המחבר שתי נקודות של ההקף צריך להמצא כולו בפנים או על שפת העקומה הסגורה.

נניח שהיא קעורה בחלקה (ראה שרטוט!), כלומר: קיים קטע המחבר שתי נקודות של הקפה והנמצא מחוץ לשטח המוקף ע"י העקומה; אזי אפשר לשקף את המקטע A הנוצר ע"י הקטע ולקבל את המקטע החופף B. הקיפה של העקומה החדשה (המקיפה גם את B) שוה להקף העקומה המקורית, אבל השטח המוקף גדל.

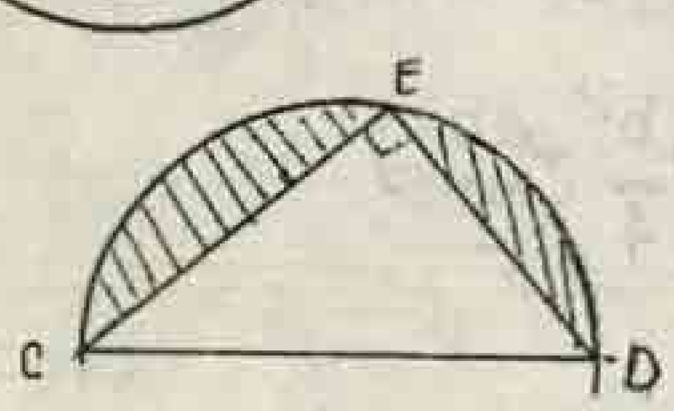


(2) קטע CD החוצה את הקף העקומה יחצה גם את שטחה.



נניח ששטח α הנמצא מצד אחד גדול משטח β מצד שני, אזי אפשר לשקף את α ב- CD ולקבל עקומה סגורה בעלת אותו ההקף, אבל בעלת שטח גדול יותר.

(3) העקומה היא מעגל.



נתבונן במחצית השטח α ונבחר נקודה E על הקפו. שטח זה ניתן לשנוי בלי שנוי ארך הקשת $\widehat{CED}$ ע"י שנוי הזוית ההקפית $\widehat{CED}$. שנוי זה יגרום רק לשנוי שטח המשולש CED, אבל ישמור על שטחם של המקטעים CE ו ED. שטח המשולש CED גדול ביותר, כאשר הזוית ההקפית $\widehat{CED}$ ישרה ($\sin\widehat{CED}=1$!). הואיל והנקודה E היתה

נקודה כלשהי על הקשת, על כל הזויות ההקפיות הנשענות על הקטע החוצה CD להיות ישרות, מכאן נובע שהקשת היא חצי מעגל, ובזה סיימנו את ההוכחה.

נרמוז על מהלך ההוכחה של הבעיה האיזופרימטרית במרחב, כלומר: חקירת משטח סגור בעל שטח פנים נתון אשר מקיף גוף בעל נפח גדול ביותר (גם פתרון זה ניתן ע"י Steiner).

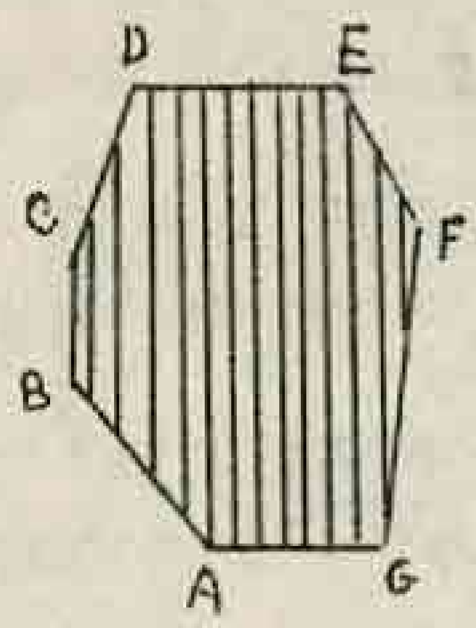
נציג את הבעיה בצורה הפוכה לקודמת: נתבונן בגופים בעלי נפח קבוע, ונחפש ביניהם את הגוף בעל שטח פנים קטן ביותר.

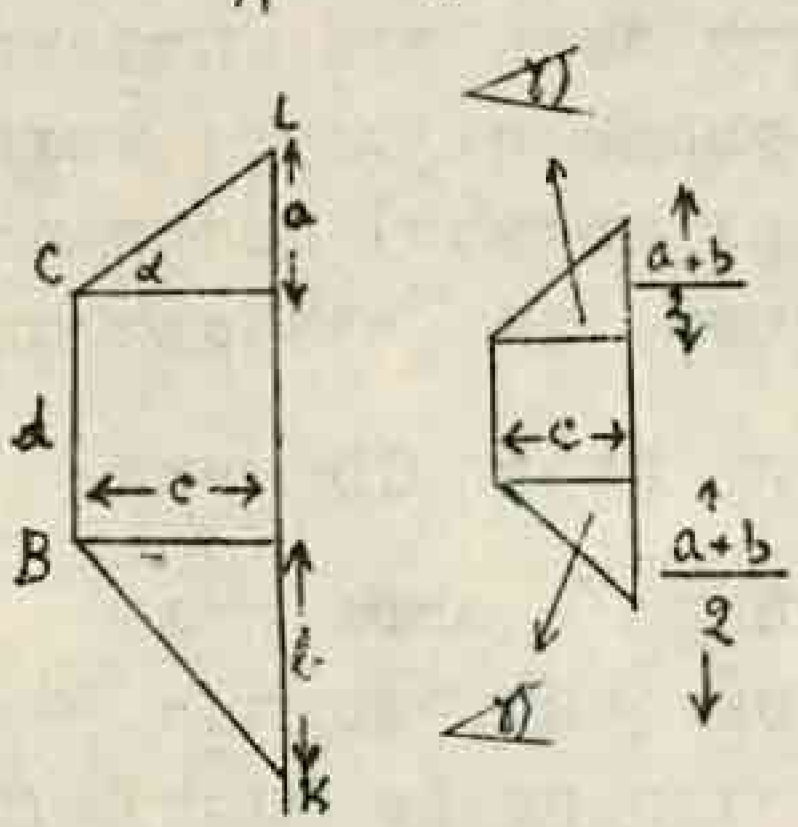
אם קיים גוף כזה הוא חייב גם להוות פתרון של הבעיה האיזו-פרימטרית (מדוע?).

עפ"י אותם שקולים שהופיעו בהוכחה האחרונה ברור שעל הגוף להיות קמור (שקוף לגבי מישור!).

הרעיון העיקרי של שטיינר הוא סימטריסציה של פאון, בהנחה שאמנם אפשר לתאר כל גוף כמקרה גבולי של פאון.

נעיין בחתך כל שהוא העובר דרך הפאון. חתך זה הנו מצולע. נעביר קטעים מקבילים לאחת הצלעות (למשל BC) אשר קצותיהם נופלים על צלעות המצולע. נזיז את הקטעים המקבילים לאורכם, כך שמרכזיהם יימצאו על קו ישר אחד. ע"י כך יווצר מצולע חדש אשר שטחו שוה לשטח המצולע המקורי (לפי עקרון Cavalieri), אבל הקפו קטן יותר. לשם ההוכחה נתבונן בטרפז הנוצר ע"י הצלע BC ואחד המקבילים, לפני ואחרי הזזת הקטעים המקבילים. אורך הקטע KL לא ישתנה, לכן יש רק להראות כי:





$$\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{c^2+b^2} > 2\sqrt{c^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

(ראה שרטוטים!).

נעלה אי-שויון זה ברבוע (פעולה מותרת, מאחר שסימני השרשים כארכי קטעים חיוביים):

$$c^2+a^2+c^2+b^2+2\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)} > 4\left(c^2+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{ab}{2}\right)$$

מכאן:

$$\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)} > c^2+ab$$

נעלה ברבוע:

$$(c^2+a^2)(c^2+b^2) > c^4+a^2b^2+2abc^2$$

$$c^4+a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2 > c^4+a^2b^2+2abc^2$$

$$c^2(a^2+b^2) > 2abc^2$$

לאחר צמצום ב- c^2 $(c^2 \neq 0)$; $(a-b)^2 > 0$.

אי-שויון זה נכון כאשר $a \neq b$, ולכן גם אי-השויון שיצאנו ממנו מתקיים, כלומר: פעולת הסימטריזציה מקטינה את ההקף. נחזור על פעולה זו גם לגבי כל החתכים המקבילים לחתכנו דרך הפאון. שטח הפנים של הפאון המתקבל קטן מזה של הפאון המקורי, בו בזמן שנפחיהם שוים. מכאן ששכלול הפאון, תוך שמירה על נפחו, מקטין את שטח פניו.

בדומה לבעיה האיזופרימטרית במישור אפשר להוכיח שהגדלת מספר הפאות - גם הפעם תוך שמירה על נפח קבוע - תקטין את שטח פניו של הפאון. ע"י סימטריזציה והגדלת מספר הפאות מתקרבים לכדור, המהוה פתרון לבעיתנו, אם אמנם פתרון כזה בכלל קיים.

פתרון שאלות התחרות במתמטיקה על פרס על שם
פרופ' י. גרוסמן תשכ"ג - 1963

1. נתונה המשואה $\sqrt{x} = \sqrt{1-x} + \sqrt{a-x}$ כאשר $0 < a < 1$
התר את המשואה וחקור את קיום ומספר הפתרונים.

הערה: ב- $\sqrt{m}$ מבינים תמיד $+\sqrt{m}$

פתרון *) פתרון המשואה, במידה ויש לה בכלל פתרון, חייב לקיים:
$x \geq 0 \quad 1-x \geq 0, \quad a-x \geq 0$
ז.א. $0 \leq x \leq a$ (כיון ש- $a < 1$ הרי זה מבטיח $x \leq 1$).
נעלה את המשואה הנתונה בריבוע: $x = 1-x+a-x+2\sqrt{(1-x)(a-x)}$

המערכת
$$\begin{cases} 3x - (1+a) = 2\sqrt{(1-x)(a-x)} \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

שקולה בבירור למשואה הנתונה במובן זה שכל פתרון של המערכת הוא גם פתרון של המשואה הנתונה ולהיפך.

האגף הימני של $3x-(1+a) = 2\sqrt{(1-x)(a-x)}$ אינו שלילי עבור אף x. מכאן שבמידה ויש למשואה זו פתרון הוא חייב לקיים $3x-(1+a) \geq 0$ או $x \geq \frac{1+a}{3}$.

נעלה שנית ברבוע ונקבל:

$$9x^2 - 6x - 6ax + 1 + 2a + a^2 = 4a - 4ax - 4x + 4x^2$$

---

*) לפי ספרו של מודנוב: אוסף בעיות בקורס מיוחד של מתמטיקה אלמנטרית (ברוסית).

בסך הכל מקבלים שהמשואה הנתונה שקולה למערכת

$$\begin{cases} 5x^2 - 2(1+a)x + (1-a)^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq a \\ x \geq \dfrac{1+a}{3} \end{cases}$$

כעת נשלב את החקירה עם מציאת פתרונות.

<u>מקרה א</u>. $\frac{1+a}{3} > a$ ז.א. $a < \frac{1}{2}$. במקרה זה שני אי-השויונות סותרים זה את זה ולמשואה אין פתרונות.

<u>מקרה ב</u>. $\frac{1+a}{3} < a$ ז.א. $a > \frac{1}{2}$ (לפי הנתון $a < 1$).
פתרונות המשואה הרבועית שבמערכת יהיו במקרה זה גם פתרונות המשואה הנתונה אם הם יקיימו $\frac{1+a}{3} < x \leq a$

נסמן $f(x) = 5x^2 - 2(1+a)x + (1-a)^2$ קיים:

$$f(a) = 5a^2 - 2a - 2a^2 + 1 - 2a + a^2 = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2 > 0$$

$$f\left(\frac{1+a}{3}\right) = \frac{5}{9}(1+a)^2 - \frac{2}{3}(1+a)^2 + (1-a)^2 = (1-a)^2 - \frac{1}{9}(1+a)^2 =$$

$$= \frac{1}{9}(3-3a-1-a)(3-3a+1+a) = \frac{1}{9}(2-4a)(4-2a) = \frac{4}{9}(1-2a)(2-a)$$

כיון ש- $1 > a > \frac{1}{2}$ הרי $(1-2a) < 0$ ו- $2-a > 0$
ז.א. $f\left(\frac{1+a}{3}\right) < 0$ מכאן שלמשואה $f(x) = 0$ יש פתרונות ממשיים
וכיון ש- $\frac{1+a}{3} < a$ והמתקדם של x^2 במשואה הוא חיובי הרי ברור שפתרונותיה מקיימים $x_1 < \frac{1+a}{3} < x_2 < a$ כלומר רק הפתרון הגדול יותר של $f(x) = 0$ הוא גם פתרון של המשואה הנתונה.
ערכו:

$$x_2 = \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2 - 5(1-a)^2}}{5} = \frac{1+a+\sqrt{12a-4a^2-4}}{5} = \frac{1+a+2\sqrt{3a-a^2-1}}{5}$$

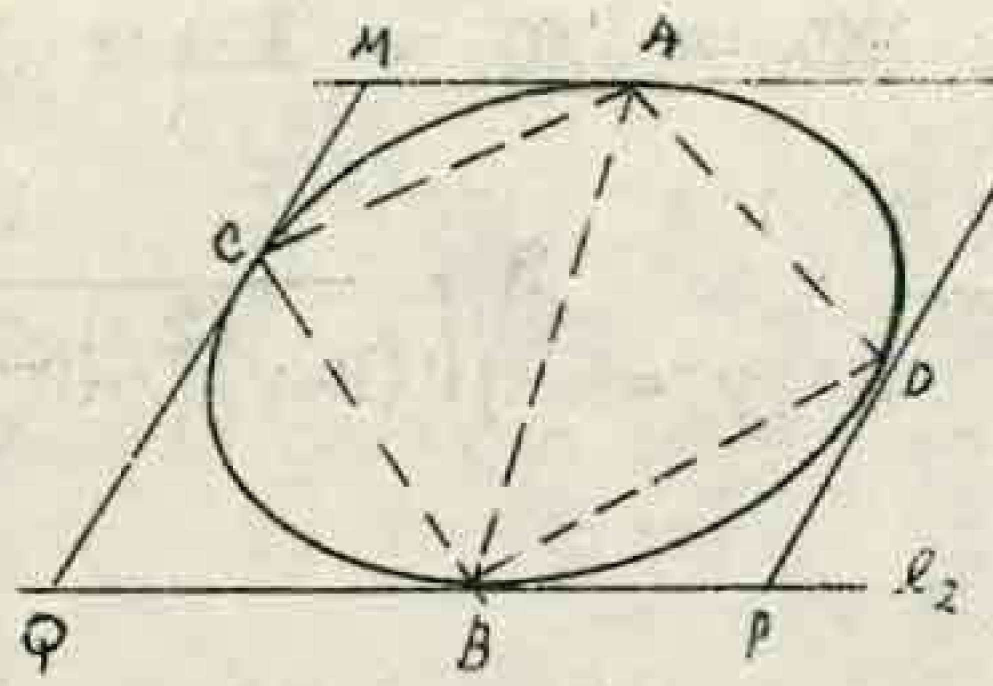
<u>מקרה ג</u>. $a = \frac{1}{2}$ במקרה זה $f(a) = 0, \frac{1+a}{3} = a$ כלומר a הוא פתרון אחד של המשואה הנתונה.

הפתרון השני של המשואה הרבועית המקבלת את הצורה $5x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$ הוא $1/10$ אבל מספר זה קטן מ-$1/2$ ז.א. מ- $\frac{1+a}{3}$ ואיננו יכול לקיים את המשואה הנתונה.

2. תחום מישורי מוגבל ע"י עקום סגור (שגם נקודותיו נחשבות כשייכות לתחום זה) נקרא קמור, כאשר כל קטע המחבר שתי נקודות כלשהן של התחום שייך בשלמותו לתחום.

הוכח שכל תחום מישורי קמור, בעל שטח נתון S אפשר לכלול בתחום מישורי קמור, בעל סימטריה מרכזית, ששטחו אינו גדול מ- 2S

<u>פתרון</u> *) ראה ציור. נעביר שני ישרים מקבילים כלשהם l_1 ו l_2



l_1 ו- l_2 הנוגעים בהיקף של התחום המישורי ותהיינה A ו B נקודות הנגיעה. נעביר שני ישרים נוספים הנוגעים בהיקף של התחום ומקבילים ל- AB נוצרת מקבילית שהיא תחום מישורי קמור בעל סימטריה מרכזית אבל

$$S_{\square ABQM} = 2S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\square ABPN} = 2S_{\triangle ABD}$$

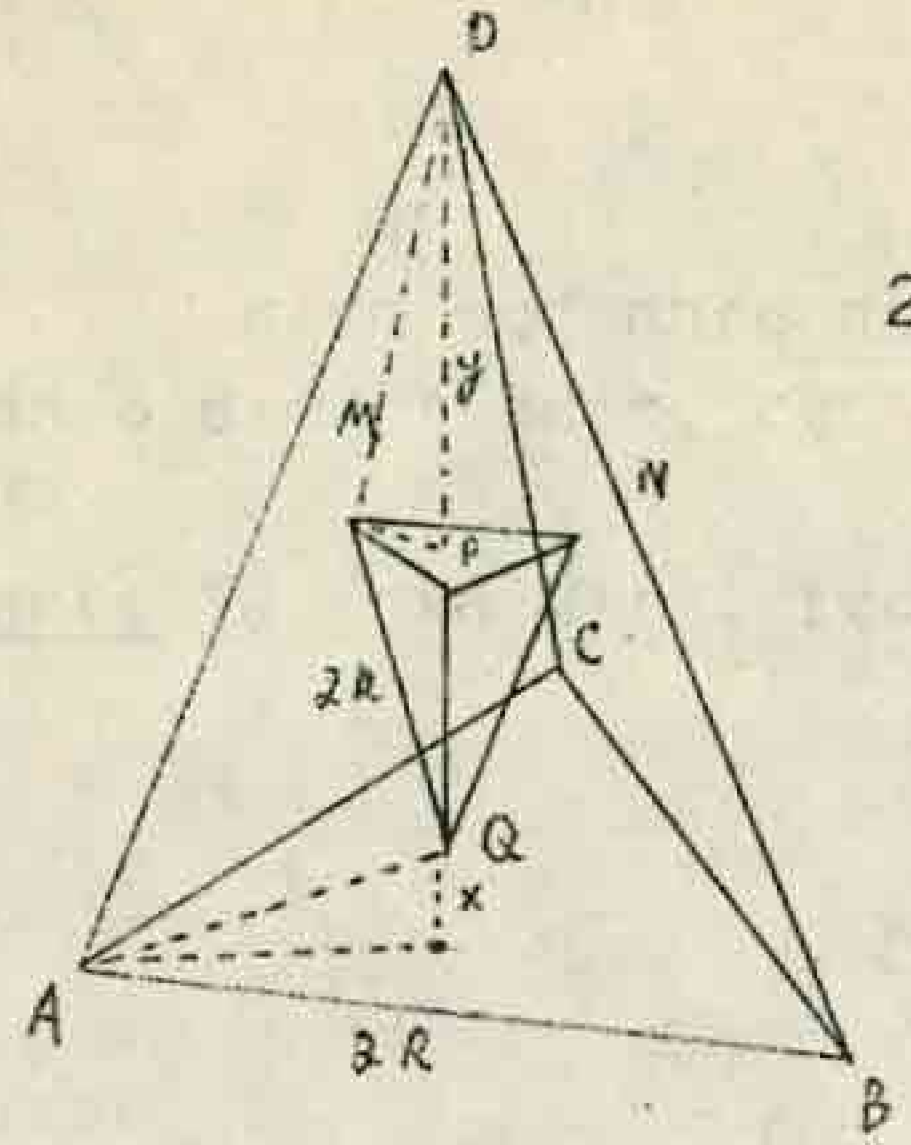
כך ש- $S_{\square MNPQ} = 2S_{ADBC}$

בגלל קמירות התחום המישורי הנתון, הוא מכיל בהכרח את המרובע ADBC כך ששטחו ז.א. S אינו קטן משטח מרובע זה. מכאן נובע ששטח המקבילית MNPQ אינו גדול מפעמיים S.

3. שמונה כדורים מהם ארבעה בעלי רדיוס R כל אחד וארבעה בעלי רדיוס r כל אחד, מונחים במרחב כך שכל כדור משיק לשלושה כדורים בעלי רדיוס R ולשלושה כדורים בעלי רדיוס r מצא את היחס $\frac{R}{r}$.

<u>פתרון</u>: מתנאי הבעיה ברור שמרכזי הכדורים בעלי רדיוס R ואלה בעלי רדיוס r יוצרים שתי פרמידות שכל מקצועותיהן שוים ל- 2R ו- 2r בהתאמה ושתי הפירמידות נמצאות במצב הדדי כמתואר בציור (בע"מ הבא):

*) לפי ספרם של יגלום ובולטיאנסקי: צורות קמורות (ברוסית).



גובה של הפירמידה הגדולה הוא $2R\sqrt{\frac{2}{3}}$

וגובה הפירמידה הקטנה $2r\sqrt{\frac{2}{3}}$. נסמן

ב x את מרחק הקדקד Q מהמישור ABC

וב y את מרחק הקדקד D מהמישור MNP.

אזי $2R\sqrt{\frac{2}{3}} = x + y + 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$

קיים בבירור $MD = AQ = R + r$

מכאן:

$$x = \sqrt{(R+r)^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2}, \quad y = \sqrt{(R+r)^2 - \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

נציב כל זאת לשויון הקודם ונקבל

$$2R\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{(R+r)^2-\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \sqrt{(R+r)^2-\left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2} + 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

לנוחיות החישובים נסמן $R+r = u$ ו- $R-r= v$ מקבלים

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}\,v = \sqrt{u^2 - \frac{(u+v)^2}{3}} + \sqrt{u^2 - \frac{(u-v)^2}{3}}$$

נעביר את השרש הראשון שמאלה ונעלה את שני האגפים בריבוע:

$$\frac{8}{3}v^2 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}\,v\sqrt{u^2-\left(\frac{u+v}{3}\right)^2} + u^2 - \left(\frac{u+v}{3}\right)^2 = u^2 - \frac{(u-v)^2}{3}$$

מכאן:

$$\frac{8}{3}v^2 - \frac{4uv}{3} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}\,v\sqrt{u^2 - \frac{(u+v)^2}{3}}$$

ברור ש- $R=r$ איננו פתרון, כך שאפשר לצמצם ב- v ונקבל:

$$2v - u = \sqrt{6u^2-2(u+v)^2}$$

כלומר

$$4v^2 - 4uv + u^2 = 6u^2 - 2u^2 - 4uv - 2v^2$$

מכאן

$$3u^2 = 6v^2$$

ו-

$$u = \pm\sqrt{2}\,v$$

נציב:

$$R + r = \pm\sqrt{2}\,(R-r)$$

ז.א.

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2}$$

או

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

בתחרות השתתפו 47 תלמידים מבתי ספר רבים בארץ. הפרס לא הוענק הפעם לאף אחד, כיון שלא נמצאה עבודה ברמה מתאימה.

<u>מספרים מיוחדים</u>

נתן אליוסף

(מיועד בעיקר לתלמידי כתות ט' וי')

<u>מבוא.</u>

מבין המספרים שהם רבועים שלמים (כגון: $4^2=16$, $3^2=9$, $1^2=1$ וכו') ישנם שלשה סוגים. ישנם רבועים כך שכל-אחת מספרותיהם היא רבוע שלם כמו $7^2=49$, ישנם כאלה שאף אחת מספרותיהם אינה רבוע, כמו $5^2=25$ ולבסוף יש כאלה, כמו $4^2=16$ שחלק מספרותיהם רבועים וחלק לא.

נטפל במאמר זה ברבועים שלמים <u>שאף אחת מספרותיהם</u> אינה רבוע. לשם קצור, נקרא למספר כזה, בשם <u>מספר מיוחד</u>.

המספרים המיוחדים הראשונים הם:

$5^2=25$	$26^2=676$
$6^2=36$	$75^2=5625$
$15^2=225$	$76^2=5776$
$16^2=256$	$85^2=7225$
$24^2=576$	$94^2=8836$
$25^2=625$	$165^2=27225$

השאלה היא: כמה מספרים מיוחדים ישנם?

<u>הזהות היסודית.</u>

נסמן: $a = 3\,(10^n+10^{n-1}+\ldots\ldots+1)$.

מאחר ש- $10^n=10\ldots\ldots0$ עם n אפסים, ע"כ a הוא המספר $33\ldots3$ עם $n+1$ ספרות של 3.

נחשב את: a^2:

$$a^2 = 9\,(10^n+10^{n-1}+\ldots\ldots+1)^2$$

במקום 9 נכתוב $10-1$ ובמקום הבטוי ברבוע נכתוב את הבטוי כפול עצמו, כלומר $x^2 = x\cdot x$, נקבל:

$$a^2=(10-1)(10^n+10^{n-1}+\ldots\,+1)(10^n+10^{n-1}+\ldots\,+1)$$

נזכור כי

$$(10-1)(10^n+10^{n-1}+\ldots\,+1)=10^{n+1}-1$$

(מוכיחים ע"י פתיחת הסוגרים או ע"י נוסחת סכום של טור הנדסי).

ואז: $a^2 = (10^{n+1} - 1)(10^n + 10^{n-1} + ... + 1)$

נפתח את הסוגרים ונקבל:

$$a^2 = (10^{2n+1} + 10^{2n} + ... + 10^{n+1}) - (10^n + 10^{n-1} + ... + 1)$$

נבחר במספר טבעי כלשהו K, ונבנה את המספר $x = ka + 1$.
נעלה אותו ברבוע ונקבל:

$$x^2 = (ka+1)^2 = k^2a^2 + 2ka + 1$$

נציב את ערכו של a ושל a^2 מהנאמר לעיל ונקבל:

$$x^2 = k^2(10^{2n+1} + 10^{2n} + ... + 10^{n+1}) - k^2(10^n + 10^{n-1} + ... + 1)$$
$$+ 2k\cdot 3\cdot(10^n + 10^{n-1} + ... + 1) + 1$$

הבטוי $10^n + 10^{n-1} + ... + 1$ מופיע בשני מחוברים, ונוכל להוציאו מחוץ לסוגרים. ונקבל לבסוף את <u>הזהות היסודית</u>.

$$x^2 = k^2(10^{2n+1} + 10^{2n} + ... + 10^{n+1}) + (6k - k^2)(10^n + 10^{n-1} + ... + 1) + 1$$

<u>שמוש לזהות היסודית.</u>

הספרות של x^2 ייקבעו ע"י k^2 וע"י $6k-k^2$. אסור לאף ספרה להיות שלילית, ע"כ אסור ל- k^2 ול- $6k-k^2$ להיות שליליים. בקשר ל- k^2 אנו בטוחים בדבר (כי k^2 הוא רבוע של מספר) בתנאי ש- k חיובי מאחר ש- $6k-k^2 = k(6-k)$ (ע"י פרוק לגורמים) לכן k איננו יכול לעלות על 6.

נבחר $k = 5$ נקבל: $k^2 = 25;\ 6k-k^2 = 5$

לכן האגף הימני של הזהות היסודית יהיה $25\cdot 11...100...0 + 5\cdot 11...1 + 1$ (המספר הכופל את 25 מכיל $n+1$ ספרות של 1 ו- $n+1$ אפסים. המספר הכופל את 5 מכיל $n+1$ ספרות של 1).

לכן נקבל:

$$27....750....0 + 5....5 + 1 = 27....75....56$$

מספר הספרות 7 הוא n ומספר הספרות 5 הוא $n+1$ בסה"כ $2n+3$ ספרות.

אצלנו $x = 5a+1$ כי $k = 5$ לכן

$$x = 15\cdot 1......1 + 1 = 16....6$$

מספר הספרות 6 הוא $n+1$.

בסה"כ נקבל: $\underline{\underline{16....6^2 = 27....75....56}}$

מספר הספרות 6 משמאל כמספר הספרות 5 מימין, ומספר הספרות 7 הוא באחד פחות.

לדוגמא:

$$16^2 = 256$$
$$166^2 = 27556$$
$$1666^2 = 2775556$$

וכו'

מרשימה זאת מקבלים את <u>המשפט</u>: <u>מספר המספרים המיוחדים הוא אינסופי</u>. כי מצד ימין של השוויון מופיעות רק הספרות 7, 6, 5, 2 ואף אחת מהן אינה רבוע שלם.

<u>תרגילים</u>. א) הוכח כי סכום שני מספרים מיוחדים אינו מספר מיוחד.

ב) הוכח כי הספרה האחרונה של מספר מיוחד הוא 5 או 6.

ג) חשב את $(7a+4)^2$ ותקבל עוד משפחה אינסופית של מספרים מיוחדים.

ד) בזהות היסודית כתוב $k = 1,2,3,4,6$ ותקבל משפחות של רבועים. אין בהם מספרים מיוחדים.

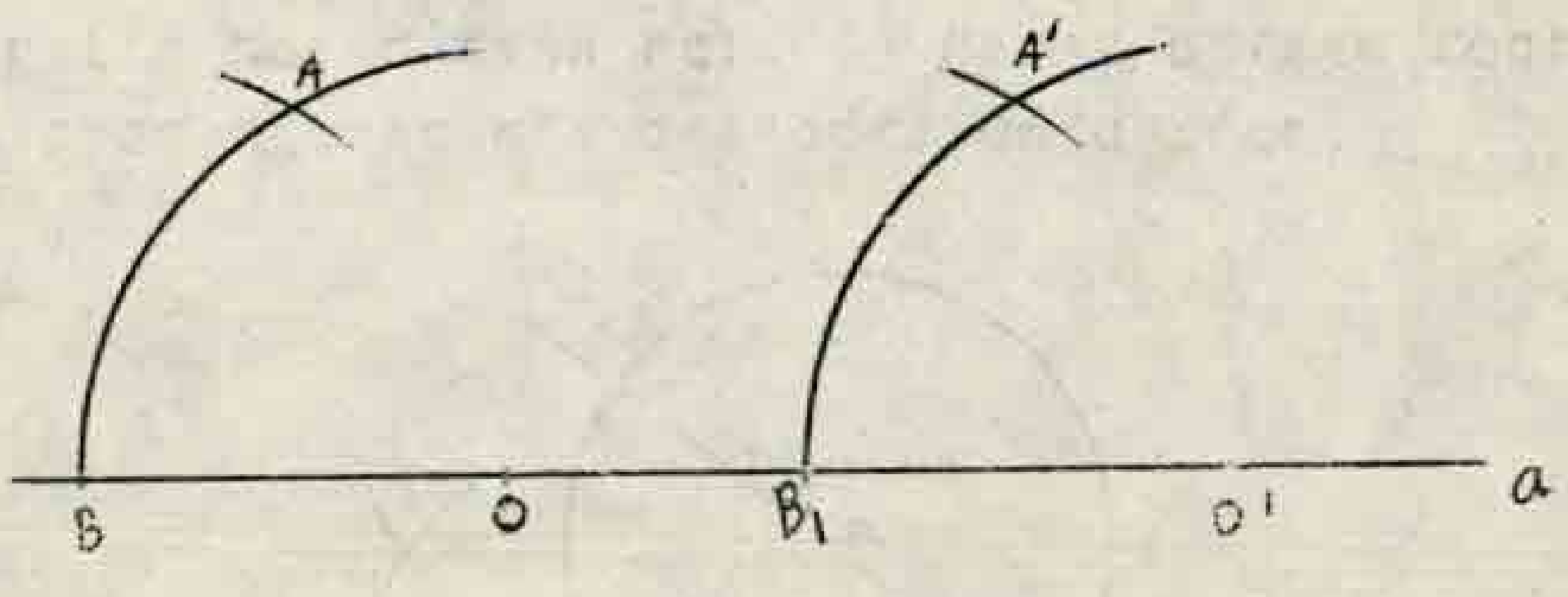
איך להעביר מקביל?

י. דב ומשה ירדן

<u>בעיה</u>. נתון ישר a ונקודה A מחוצה לו. העבר מקביל ל-a דרך A.

על הבניות הנתונות בספרי הלמוד נוסיף כאן 6. ארבע הראשונות – הצעת דב ירדן, שתים האחרונות – הצעת משה ירדן.

<u>בניה א</u>.



1) סביב נקודה כלשהי O על a נרשם קשת ברדיוס OA שתחתך את a ב-B.

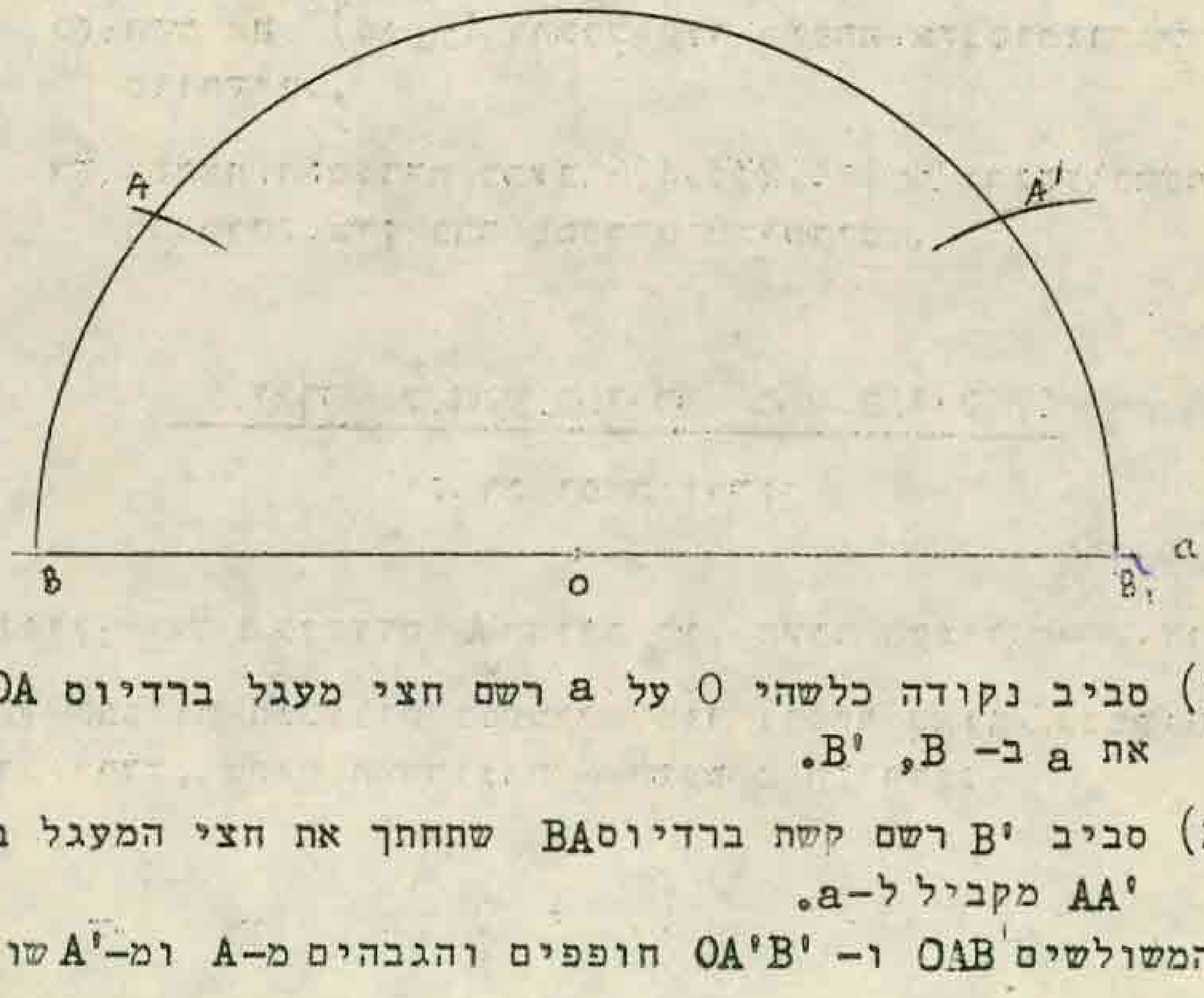
2) סביב נקודה אחרת כלשהי O' על a נרשם קשת באותו רדיוס שתחתך את a ב-B'.

3) סביב 'B נרשם קשת ברדיוס BA שתחתך את הקשת שב 2) ב-'A.
'AA מקביל ל-a .

<u>הוכחה</u>. המשולשים OBA ו- 'O'B'A חופפים, $\sphericalangle$ O'B'A' = $\sphericalangle$ OBA, BA= B'A',
לכן 'AA מקביל ל- a .

הערה: יתרון הבניה הזאת הוא בזה שהיא הסתכלותית. הקשת 'B'A היא
העתקה מקבילה של הקשת BA לארך הישר a. לכן 'A נמצאת על
מקביל ל- a העובר דרך 'A.

<u>בניה ב.</u>



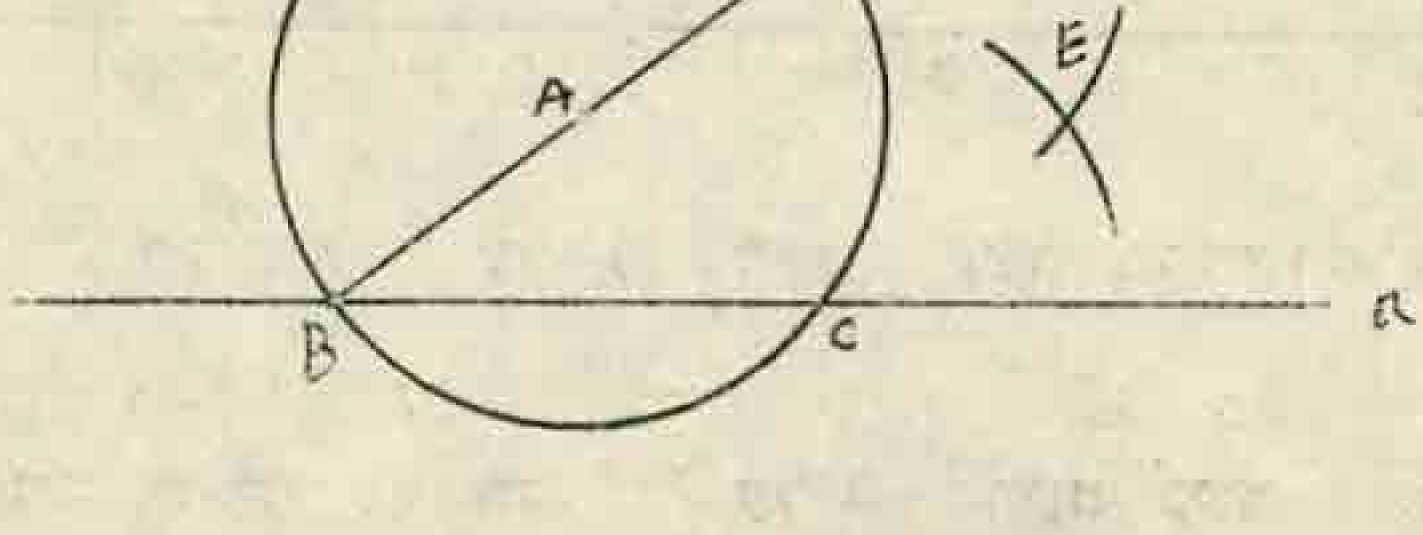
1) סביב נקודה כלשהי O על a רשם חצי מעגל ברדיוס OA שיחתך
את a ב- B, 'B.

2) סביב 'B רשם קשת ברדיוס BA שתחתך את חצי המעגל ב- 'A.
'AA מקביל ל-a.

<u>הוכחה</u>. המשולשים OAB ו- 'OA'B חופפים והגבהים מ-A ומ-'A שוים ומקבילים.

הערה: יתרונות הבניה הזאת הם: 1) הבניה מבוצעת במחוגה בלבד.
2) מספר הקשתות הוא מינימלי: שתים בלבד.

<u>בניה ג.</u>



1) סביב A נרשום מעגל (ברדיוס גדול למדי) שיחתך את a ב B, C.

2) נעביר את הישר BA שיחתך את המעגל בנקודה נוספת D.

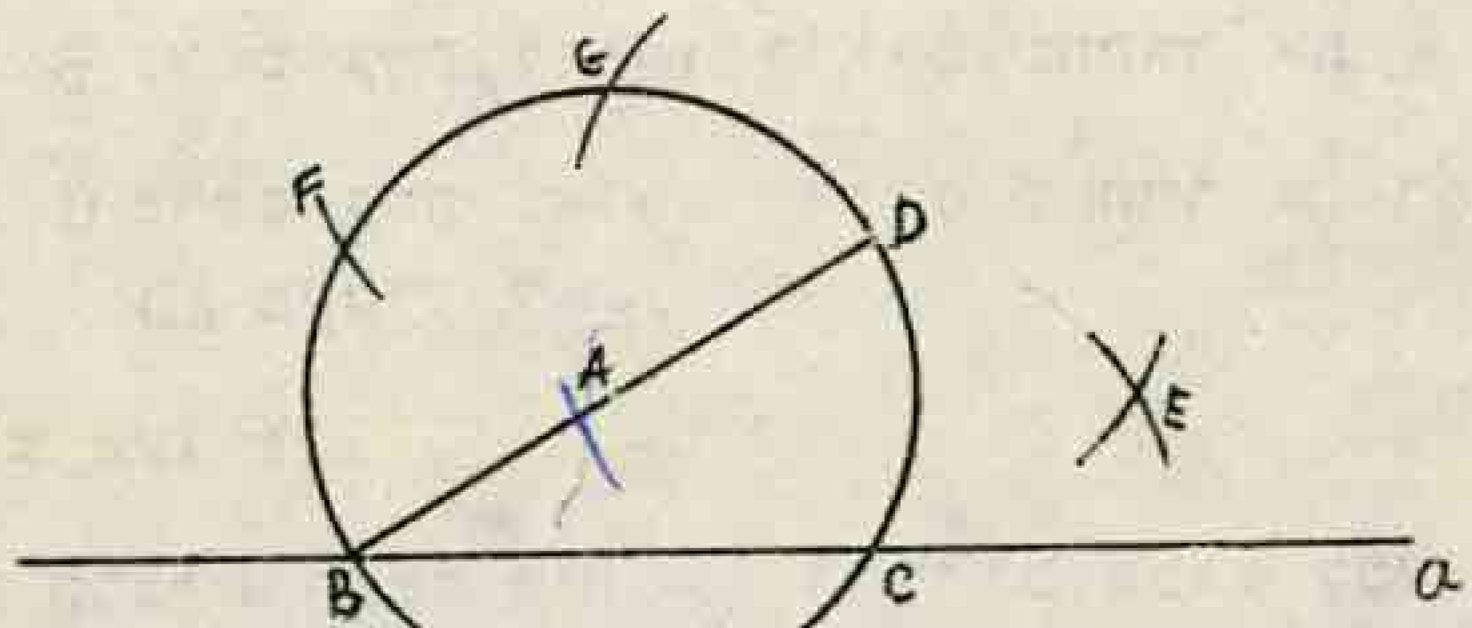
3) סביב C ו- D נרשם קשתות באותו רדיוס כמו רדיוס המעגל שב- 1). הן תחתכנה בנקודה E.

AE מקביל ל- a.

<u>הרכחה</u>. ACED הוא מעוין שאלכסונו CD נצב ל- a. לכן האלכסון השני AE מקביל ל- a.

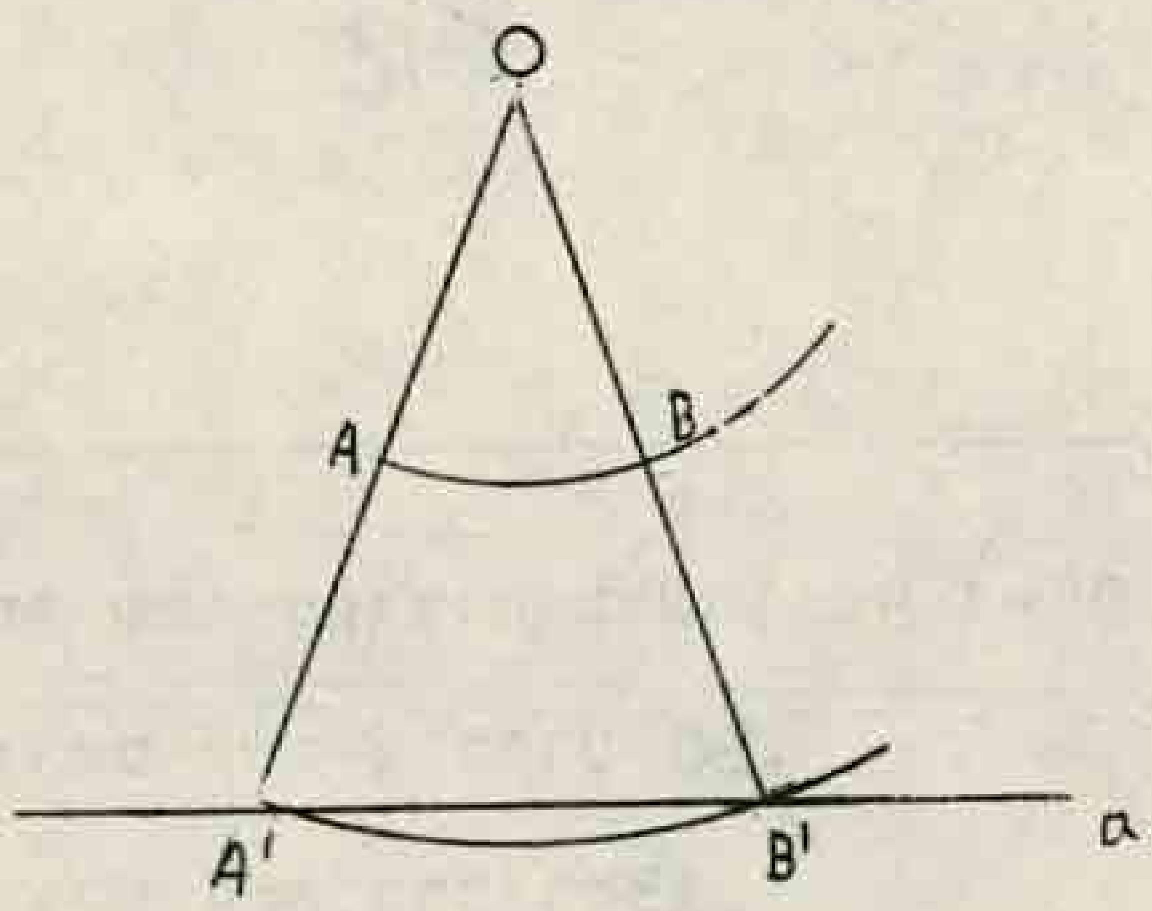
הערה 1. יתרון הבניה הזאת הוא בזה שהרדיוס קבוע לכל הקשתות.

הערה 2. אפשר להגיע לנקודה D בעזרת מחוגה בלבד, על ידי כך שמקצים



על המעגל שלש קשתות נוספות BF, FG, GD, ברדיוס הקבוע.

<u>בניה ד</u>.



1) דרך A נעביר ישר כלשהו שיחתוך את a ב-'A

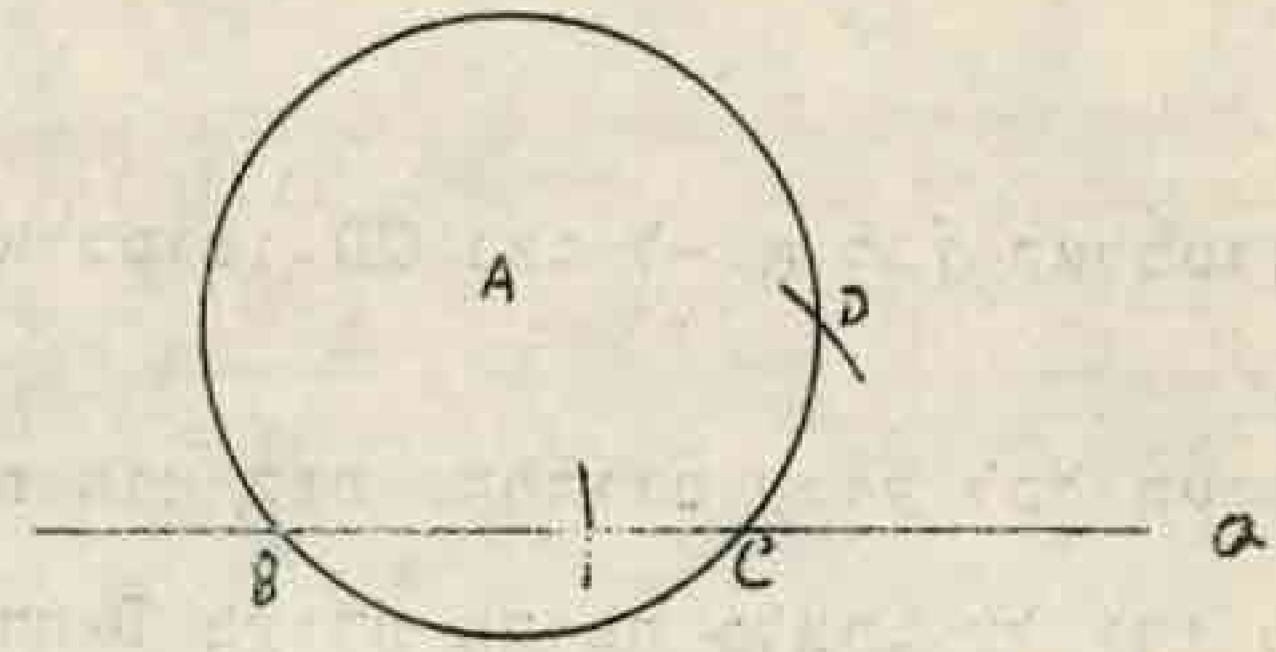
2) סביב נקודה כלשהי O בהמשך הקטע A'A נחוג קשת ברדיוס OA וכן קשת ברדיוס 'OA הקשת האחרונה תחתך את a ב- 'B.

3) נעביר את הישר 'OB שיחתך את הקשת הראשונה ב-B.

AB מקביל ל- a.

<u>הרכחה</u>. המשולשים OAB ו- 'OA'B דומים. לכן AB מקביל ל- 'A'B.

<u>בניה ה.</u>



1) סביב A נרשם מעגל (ברדיוס גדול למדי) שיחתך את a ב- B.

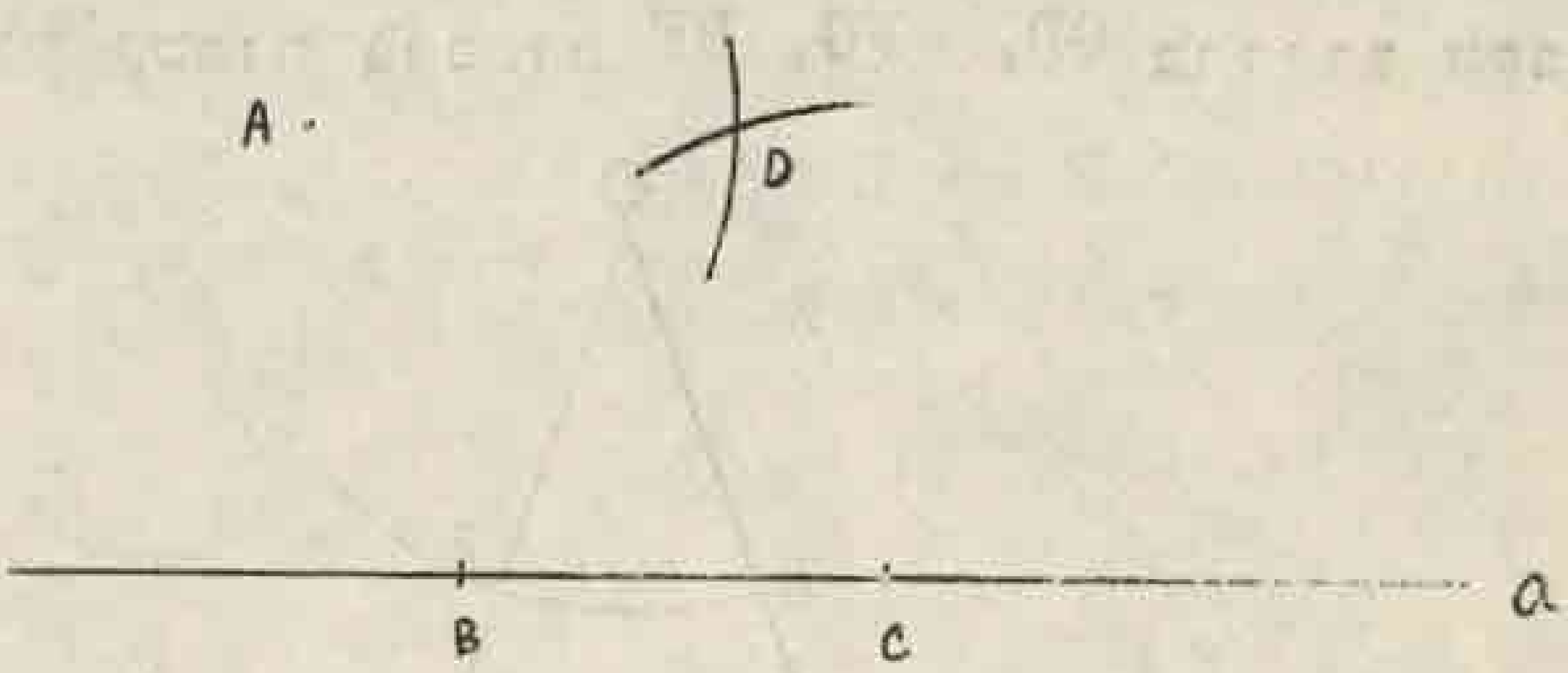
2) סביב B נרשם קשת באותו רדיוס שתחתך את a ב- C.

3) סביב C נרשם קשת באותו רדיוס שתחתך את המעגל שב- 1) ב-D. AD מקביל ל-a.

<u>הוכחה.</u> ABCD הוא מעוין.

הערה: יתרונות הבניה הזאת הם: 1) הרדיוס קבוע לכל הקשתות, 2) הבניה מבוצעת במחוגה בלבד, ורק בשלש קשתות.

<u>בניה ו.</u>



1) על a נבחר שתי נקודות כלשהן B ו- C.

2) סביב A נרשם קשת ברדיוס BC.

3) סביב C נרשם קשת ברדיוסAB.

שתי הקשתות תחתכנה בנקודה D .

AD מקביל ל- a.

<u>הוכחה.</u> ABCD הוא מרובע שצלעותיו הנגדיות שוות ולכן - מקבילות.

הערה: יתרונות הבניה הזאת הם: 1) הבניה מבוצעת במחוגה בלבד. 2) מספר הקשתות הוא מינימלי: שתים בלבד.

תחרות מתמדת להתרת בעיות

הבעיות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות עד כתה י׳ בלבד, אבל אין פרוש הדבר שהן קלות.

בבעיות מס. 176, 179 בחוברת הקודמת נפלו שתי שגיאות דפוס:

ת. 176: צ"ל $\frac{b^{2n}+1}{b^{2n}}$ במקום $\frac{b^{2n}+1}{b^{n}}$.

ת. 179: צ"ל 524 במקום 542.

אפשר להעביר את פתרונות התרגילים הנ"ל יחד עם הפתרונות של החוברת הזו עד 15.2.64.

אשר לצורת הגשת הפתרונות, עיין בדבר המערכת.

ת.181 (4 נקודות) לתוך פירמידה ישרה אשר בסיסה משושה משוכלל מכניסים שני כדורים. הראשון משיק לבסיס ולפאות הצדדיות והשני משיק לכדור הראשון ולפאות הצדדיות. מהו יחס נפחי הכדורים?

ת.182 (3 נקודות) הוכח שאין פאון בעל 7 מקצועות.

ת.183* (3 נקודות) זוית הקדקד A של משולש שוה שוקיים ABC היא בת 20°. על הצלעות AB ו- AC קובעים נקודות D ו- E כך שהזוית $BCD=60^{\circ}$ והזוית $CBE=50^{\circ}$, הוכח שהזוית $CDE=30^{\circ}$.

ת.184* (2 נקודות) הוכח ש- $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}$ מספר שלם, כאשר n מספר זוגי.

ת.185* (5 נקודות) נתונות 17 נקודות שכל שלוש מהן אינן על קו ישר אחד. יש לחבר כל שתי נקודות ע"י ישר באחד הצבעים כחול, צהוב, אדום, הוכח שבין המשולשים הנוצרים יהיה לפחות אחד אשר צלעותיו בנות צבע אחד.

ת.186 (3 נקודות) יהי N מספר הפתרונות של המשואה $x^{\log x^2}-4x^{\log x}+p=0$ (הבסיס של הלוגרתמים הוא 2). כמה ערכים יקבל N? אלו ערכים של p שייכים לכל N?

ת.187 (4 נקודות) בין המספרים החיוביים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ לפחות שנים שונים זה מזה. הוכח

$$\frac{a}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}>n$$

ת.188* (2 נקודות) פתור בלי שמוש באלגברה: על חלקת אדמה גדל עשב בצפיפות אחידה ובקצב שוה. ידוע ש-70 פרות אוכלות אותו במשך 24 ימים ו-30 פרות במשך 60 ימים. כמה פרות יגמרו את כל העשב ב-96 ימים? (בעיה זו ידועה בשם בעית ניוטון).

ת.189 (3 נקודות) הוכח שלכל a טבעי $a^7 - a$ מתחלק ב-42.

ת.190* (2 נקודות) פתור בלי שמוש באלגברה: אם מבוגרת מבתה פי 2,5, לפני 6 שנים היתה מבוגרת פי 4 ממנה. בנות כמה שנים היום האם ובתה?

ת.191* (4 נקודות) הוכח: אם מקדמי המשואה הרבועית $ax^2 + bx + c = 0$ הם מספרים אי-זוגיים, הרי פתרונות המשואה הם ארציונליים.

ת.192* (3 נקודות) נתונים מעגל, ישר ונקודה על הישר. בנה בעזרת סרגל ומחוגה מעגל אשר ישיק למעגל הנתון ולישר בנקודה הנתונה.

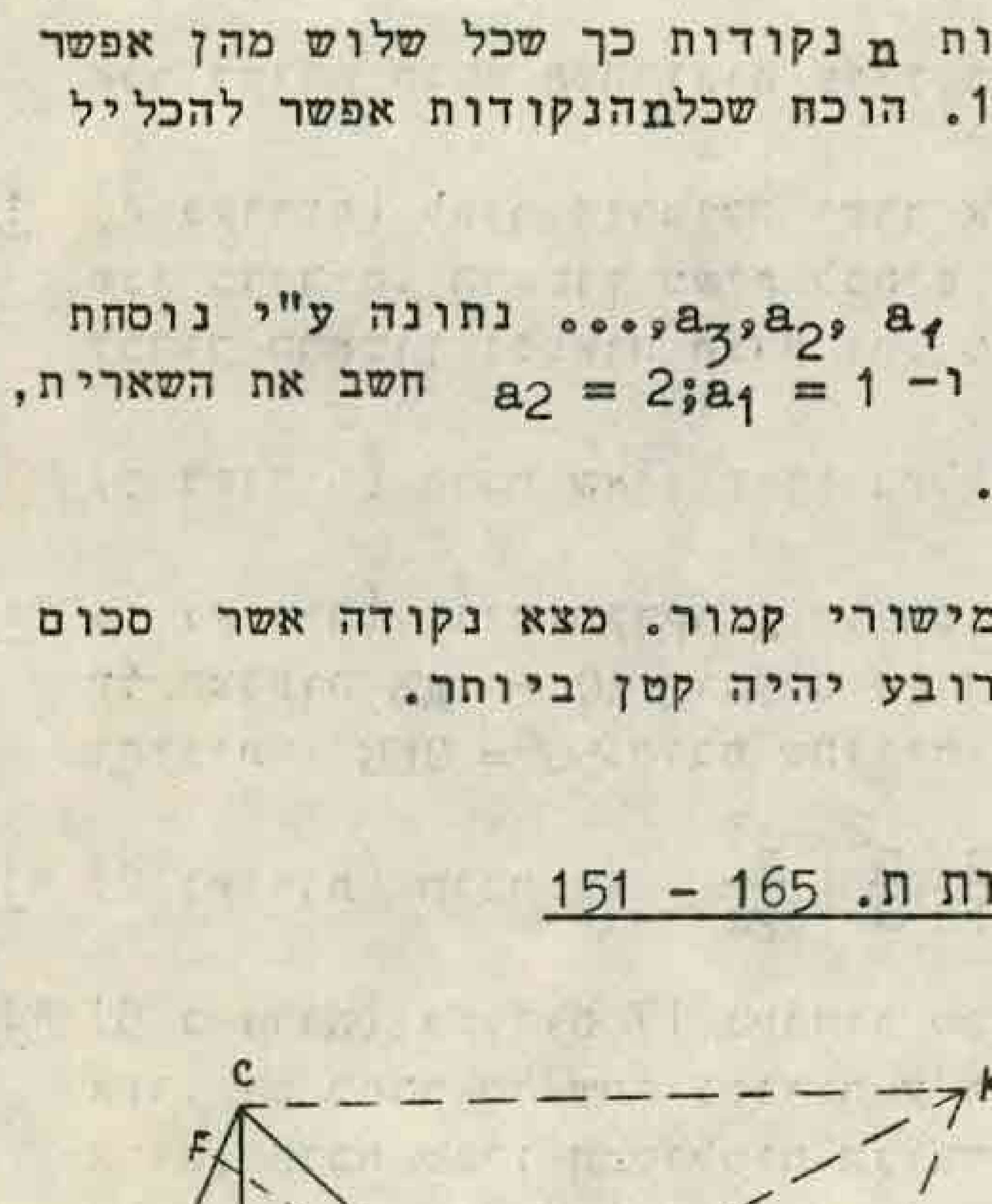
ת.193* (4 נקודות) במישור נתונות n נקודות כך שכל שלוש מהן אפשר לכלול במעגל בעל רדיוס 1. הוכח שכלnהנקודות אפשר להכליל במעגל בעל רדיוס 1.

ת.194* (4 נקודות) סדרת מספרים $a_1, a_2, a_3, \ldots$ נתונה ע"י נוסחת הנסיגה $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ ו- $a_1 = 1$; $a_2 = 2$ חשב את השארית, כאשר מחלקים a_{366} ב-7.

ת.195* (4 נקודות) נתון מרובע מישורי קמור. מצא נקודה אשר סכום המרחקים ממנה לקדקדי המרובע יהיה קטן ביותר.

פתרון הבעיות ת. 151 - 165

ת.151 יהא ABC המשולש המבוקש.



במשולש זה נתונים הגבהים $CD = h_c$ ו- $BE = h_b$ והתיכון $AM = m_a$ נמשיך את AM באופן שוה עד לנקודה K. במקבילית $ABKC$ ידוע כאלכסון AK, ושני הגבהים. בנית מקבילית זו נעשית כך: מעבירים שני ישרים מקבילים במרחק h_c ביניהם. על אחד מהם קובעים נקודה A. מוצאים נקודה K על השני כך ש- $AK = 2m_a$, חוצים את AK ב- M. סביב M כמרכז בונים מעגל שרדיוסו $\frac{1}{2}h_b$ ומ- A ו- K מעבירים משיקים למעגל זה החותכים את הישרים המקבילים בנקודות C ו- B בהתאמה. $ABKC$ היא המקבילית המבוקשת. נשאיר לקורא את החקירה בנוגע לקיום ומספר פתרונות הבעיה.

ת.152 מקדם האבר ה- h בפתוח בינים זה הוא:

$$\frac{(2^k-1)(2^k-2)(2^k-3)(2^k-4)\ \dots\ (2^k-h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\dots\cdot h}$$

הגורם ה- S במונה הוא $2^k - s$, נרשום את s בצורה $S=2^t\cdot u$ כאשר u מספר אידוגי. אזי $2^k-s=2^t\,(2^{k-t}-u)$. גורם זה אפשר לצמצם עם הגורם ה- S במכנה שהוא S עצמו ומקבלים $\frac{2^{k-t}-u}{u}$ - מונה שבר זה הוא בבירור אידוגי (u מספר אידוגי), רק שאחרי צמצום דומה של כל הגורמים ישארו במונה גורמים אידוגיים בלבד והמקדם הבינומיאלי יהיה אידוגי בהכרח.

ת.153 נרשום את המספר הנתון בצורה:

$$x=a^{4b+1}-a = a(a^{4b}-1) = a(a^b-1)(a^b+1)(a^{2b}+1)$$

אם a מתחלק ב- 2, 3 ו-5, x מתחלק ב-30.
אם a אינו מתחלק ב-2 כל אחד משאר הגורמים מתחלק ב-2.
אם a אינו מתחלק ב-3 גם a^b אינו מתחלק ב-3 ואז או a^b-1 או a^b+1 מתחלק ב-3.
אם a אינו מתחלק ב-5 גם a^b אינו מתחלק ב-5. נניח: $a^b=5k+1$ אזי $a^b-1=5k$ מתחלק ב-5. אם $a^b=5k+4$, a^b+1 מתחלק ב-5. לבסוף עם $a^b=5k+2$ או $a^b=5k+3$ הרי

$a^{2b}+1=25k^2+20k+4+1$ או $a^{2b}+1=25k^2+30k+9+1$

וכל אחד ממספרים אלה מתחלק ב-5.

ת.154 $240=2.2.2.2.3.5$. $p^4-1=(p-1)(p+1)(p^2+1)$

p - ראשוני וגדול מ-5 כך שהוא גם אידוגי. מכאן ש- $p-1$ ו- $p+1$ הם שני מספרים זוגיים עוקבים - אחד מהם מתחלק ב-2 והשני ב-4 ז.א. ב-2.2. p^2+1 הוא גם כן זוגי ומכיל איפוא, גורם 2. בסך הכל p^4-1 מתחלק ב-16. כעת $p-1,\ p,\ p+1$ הם שלושה מספרים עוקבים. p אינו מתחלק ב-3 ז.א. אחד משני המספרים $p-1$ או $p+1$ מתחלק ב-3. נשאר להראות ש- p^4-1 מתחלק ב-5. נבדוק את כל המקרים:

$p=5k+1$ אזי $p-1$ מתחלק ב-5.

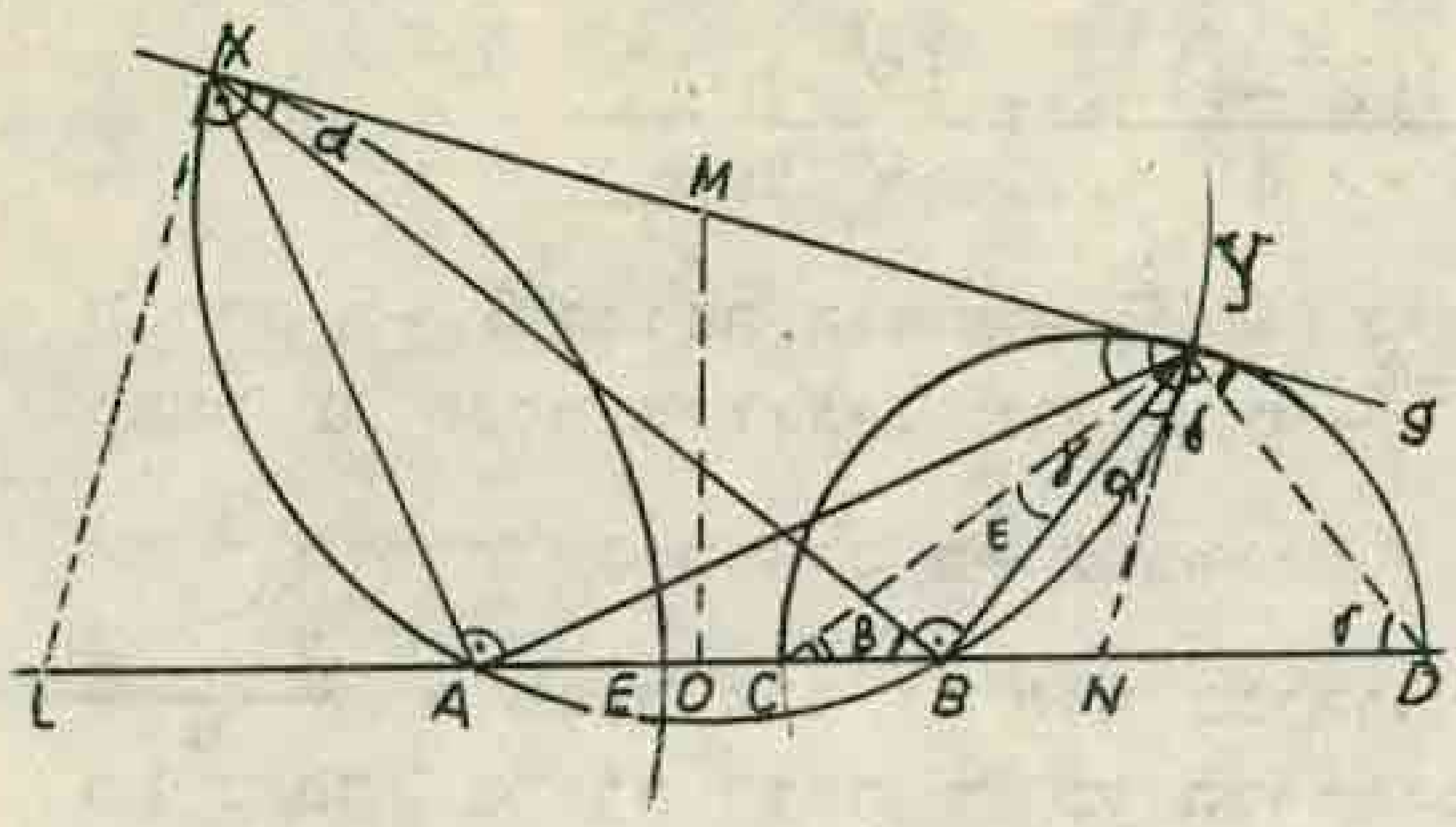
$p=5k+2$ אזי $25k^2+10k+4+1 = p^2+1$ מתחלק ב-5.

$p=5k+3$ אזי $25k^2+30k+9+1 = p^2+1$ מתחלק ב-5.

$p=5k+4$ אזי $p+1$ מתחלק ב-5.

ת.155 על הקטע AB מעמידים אנך אמצעי החותך את הישר הנתון בנקודה M המעגל במחוג AM חותך את הישר הנתון בנקודות המבוקשות X ו- Y.

<u>הוכחה.</u> האנכים ב- X ו- Y על הישר הנתון חותכים את הישר AB בנקודות L ו- N המעגל סביב עם מחוג NY חותך את AB ב- C ו- D (ראה את השרטוט).



בעזרת המשפט על זויות ההיקפיות קיים בנקודה Y:

$$\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ \quad , \quad \varepsilon+\alpha+\delta = 90^\circ$$

ובמשולש CBY : $(90^\circ-\delta) + (90^\circ+\beta) + \varepsilon = 180^\circ$

כלומר: $\delta = \beta+\varepsilon$ ומכאן: $\gamma = 2\varepsilon$

לכן YC הוא חוצה זוית במשולש ABY ומכאן: C ו- D מחלקים את AB בפנים ובחוץ באותו היחס. המעגל על CD כקוטר הוא מעגל אפולוניוס.

קיים : $AY : BY = AC : BC$

לגבי כל מעגלי אפולוניוס יחס זה קטן יותר, מכיון שהם חותכים את AB בין A ל- C ואינם נחתכים ביניהם.

<u>ת.156</u> אם הכונה היא למספר האפסים שבסוף המספר הרי פתרונה הוא כדלקמן:

כל אפס בסוף מתקבל כתוצאה מהכפלת 2 ו-5 בין הגורמים הראשונים של המספר. אבל ב- !50 יש בבירור יותר גורמים 2 מאשר 5, כך שעלינו לספור רק את הגורמים 5. בין המספרים 1 עד 50, 10 מחלקים ב-5 מהם 25 ו-50 ב- 5^2, בסך הכל יש 12 גורמים 5 ב-!50, כלומר מספר זה נגמר ב-12 אפסים.

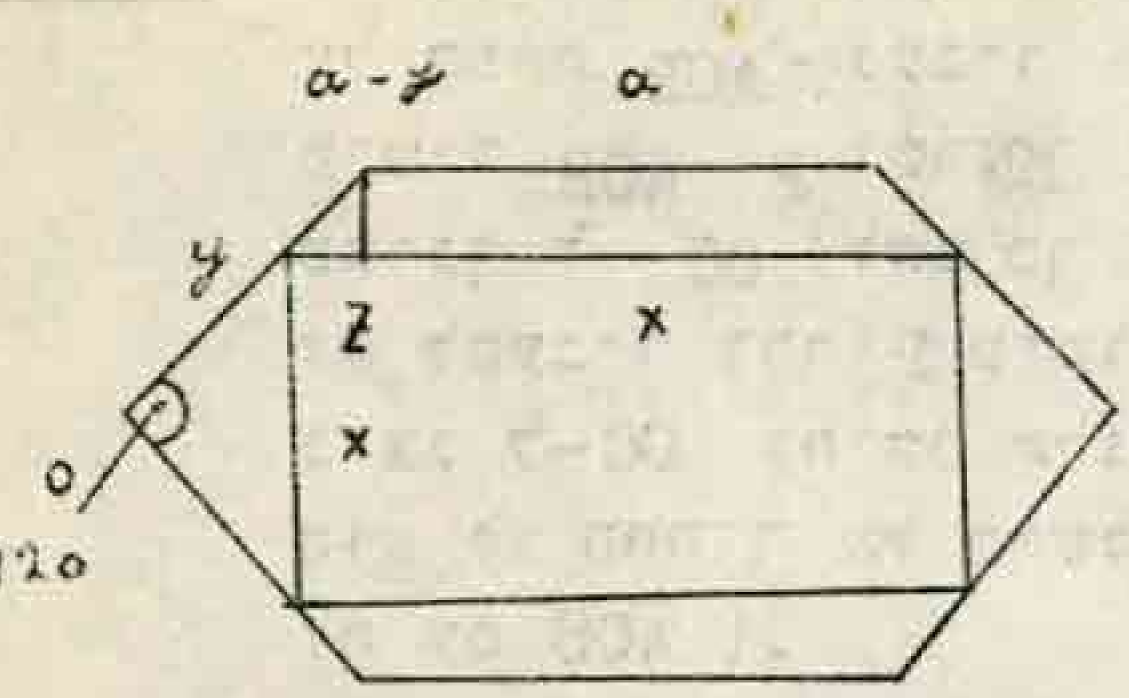
<u>ת.157</u> נרשום

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (a_1-a_2)^2 + (a_1-a_3)^2 + \dots$$
$$\dots + (a_1-a_n)^2 + (a_2-a_3)^2 + \dots + (a_2-a_n)^2 + \dots + (a_{n-1}-a_n)^2$$

אבל נתון ש- $n(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2) = (a_1+a_2+\dots+a_n)^2$

לכן סכום כל רבועי ההפרשים הוא אפס וזה יתכן רק כאשר כל אחד מההפרשים הוא 0 ז.א. כאשר $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

ת.158



$$x^3 = 3y^2$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

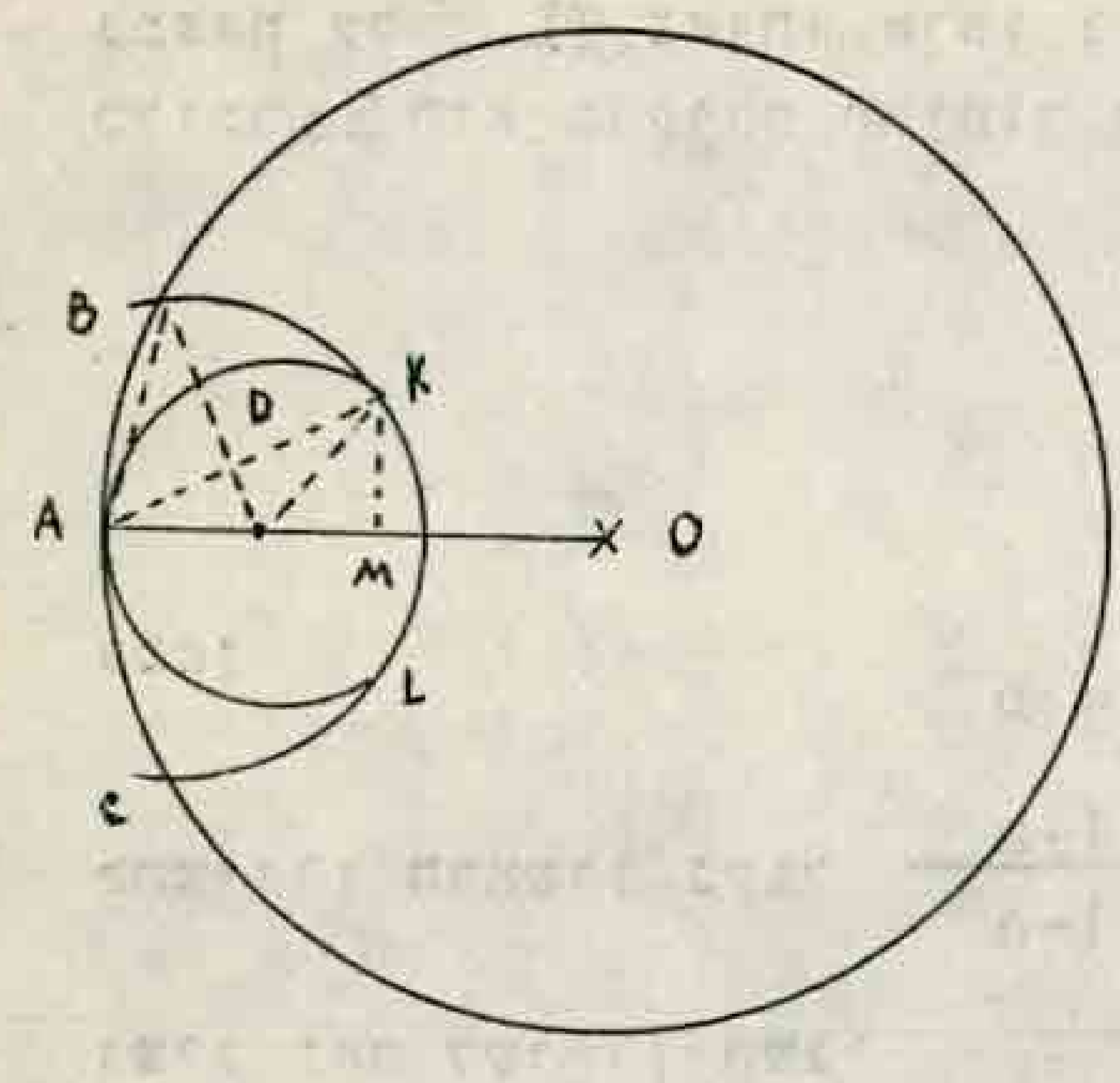
$$z = \frac{a - \frac{x}{\sqrt{3}}}{2}$$

$$a - \frac{x}{\sqrt{3}} + a = x$$

$$x = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = 3a - a\sqrt{3}$$

בטוי זה ניתן לבניה בעזרת סרגל ומחוגה.

ת.159 יהא נתון המעגל שבציור.



נבחר עליו שתי נקודות רצוניות A ו- B בונים מעגל שמרכזו ב- A ורדיוסו AB. נקודת חיתוכו עם המעגל הנתון תסומן ב- C.

בונים קשתות עם המרכזים ב- B ו- C ורדיוסים AB הנפגשים ב- D. בהמשך בונים מעגל שמרכזו ב- D ורדיוסו AD, מעגל זה חותך את המעגל הראשון שבנינו בנקודות K ו- L.

לבסוף אנו בונים מעגלים שמרכזיהם ב- K ו- L ורדיוסיהם AB מעגלים אלה נחתכים במרכז המעגל O.

הוכחה. נעביר $AO \perp KM$ ונסמן $AD = 2x$, $AM = z$, $KM = h$, $AB = a$

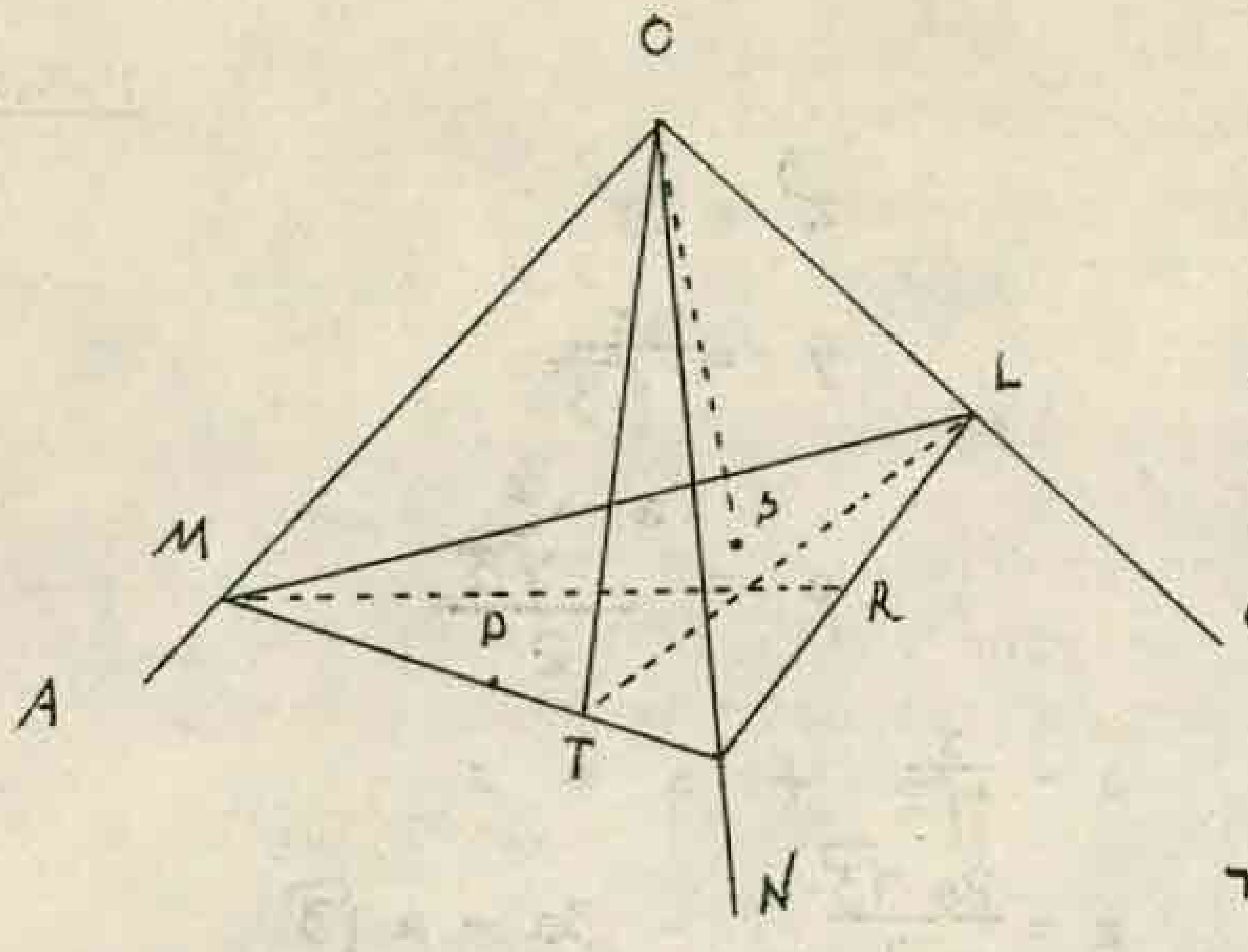
קיים בבירור $x(2r - x) = a^2 - x^2$ (r רדיוס המעגל)

ז.א. $x = \frac{a^2}{2r}$

כעת $h^3 = a^2 - z^2 = 4x^2 - (z - 2x)^2$

כלומר $a^2 - z^2 = 4xz - z^2$

מכאן $z = \frac{a^2}{4x} = \frac{a^2}{\frac{2a^2}{r}} = \frac{r}{2}$ משצ"ל.



ת.160 תהי P הנקודה הנתונה על הפאה AOB. נעביר מישור AOB P ישר MN מאונך ל- OC (לשם כך יש להעביר דרך P מישור ניצב ל-OC והישר שלנו הוא קו החתוך של מישור זה עם AOB).

דרך N נעביר בפאה BOC ישר NL מאונך ל- AO המישור MNL הוא המישור המבוקש.

הוכחה. נעביר את הגובה LT במשולש MNL. כעת $MT \perp LT$ ו- $MT \perp OC$ ז.א. ש- MT מאונך למישור OLT כולו וגם ל- OT. נוריד את הגובה מ- O אל המישור MNL, נניח שהוא פוגש את המישור ב- S. לפי משפט שלושת הניצבים $OT \perp MN$ גורר $TS \perp MN$ וזה מבטיח ש- S נמצאת על TL. באותו אופן נוכיח ש- S נמצאת על $MR \perp NL$, כלומר: S היא בנקודת החיתוך של הגבהים במשולש MNL. משצ"ל.

ת.161

$$\frac{c+i}{c-i} = \frac{(c+i)^2}{c^2+1} = \frac{c^2-1+2ic}{c^2+1}$$

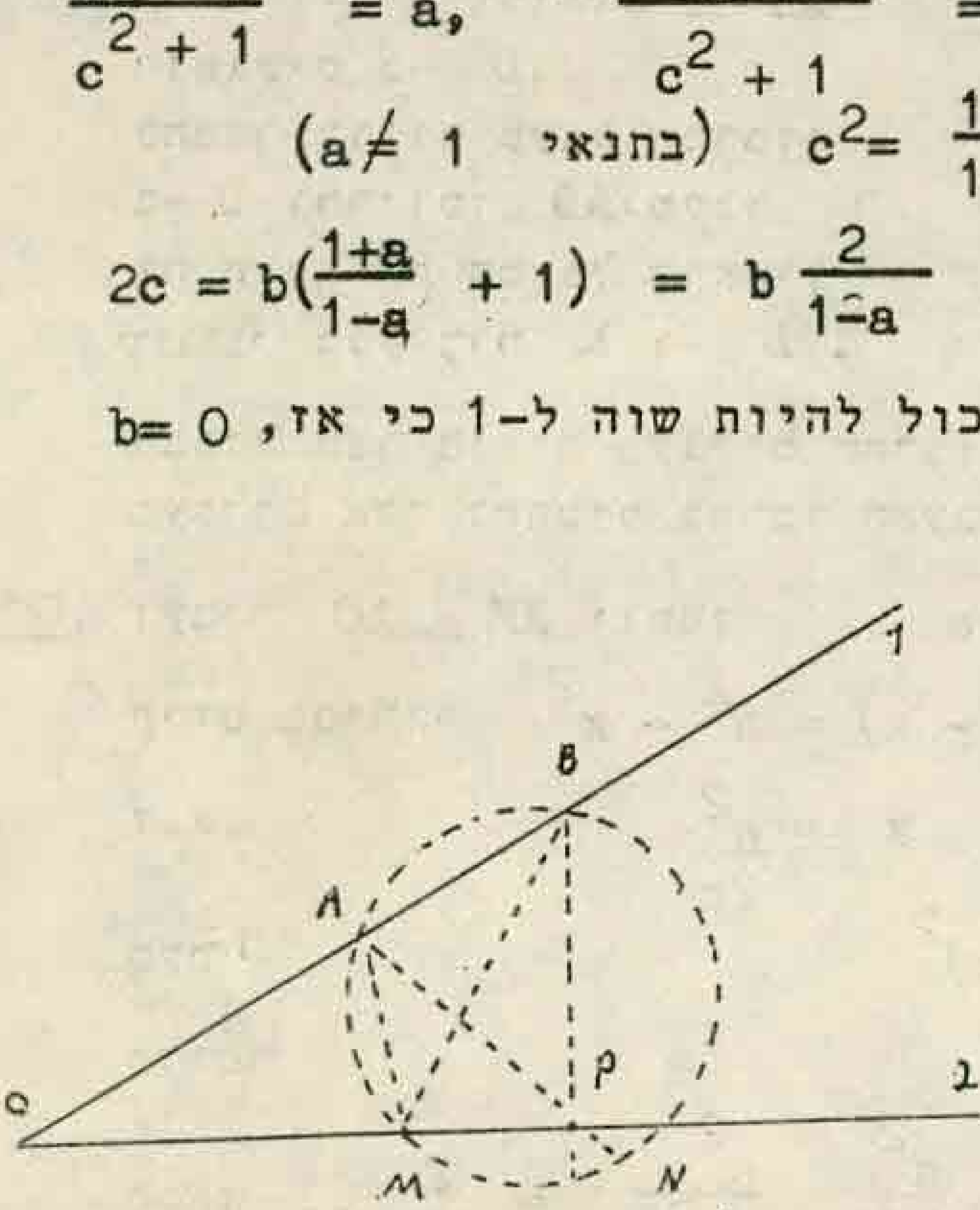
נסמן $\frac{c^2-1}{c^2+1} = a, \quad \frac{2c}{c^2+1} = b$

מהשויון הראשון נקבל $c^2 = \frac{1+a}{1-a}$ (בתנאי $a \neq 1$)

נציג זאת לשויון השני $2c = b\left(\frac{1+a}{1-a} + 1\right) = b\,\frac{2}{1-a}$

מכאן $c = \frac{b}{1-a}$. a לא יכול להיות שוה ל-1 כי אז, $b=0$ בנגוד לנתון.

ת.162 יהא AB הקטע הנתון. ו-M נקודה רצונית על השוק השניה. נעביר דרך B, A ו- M מעגל ונניח שמעגל זה חותך את השוק השניה בנקודה N (נוסף ל- M). אם P היא נקודה כלשהי על הקטע MN, הרי הזוית APB גדולה בבירור מהזוית AMB (משפט ידוע בגיאומטריה).

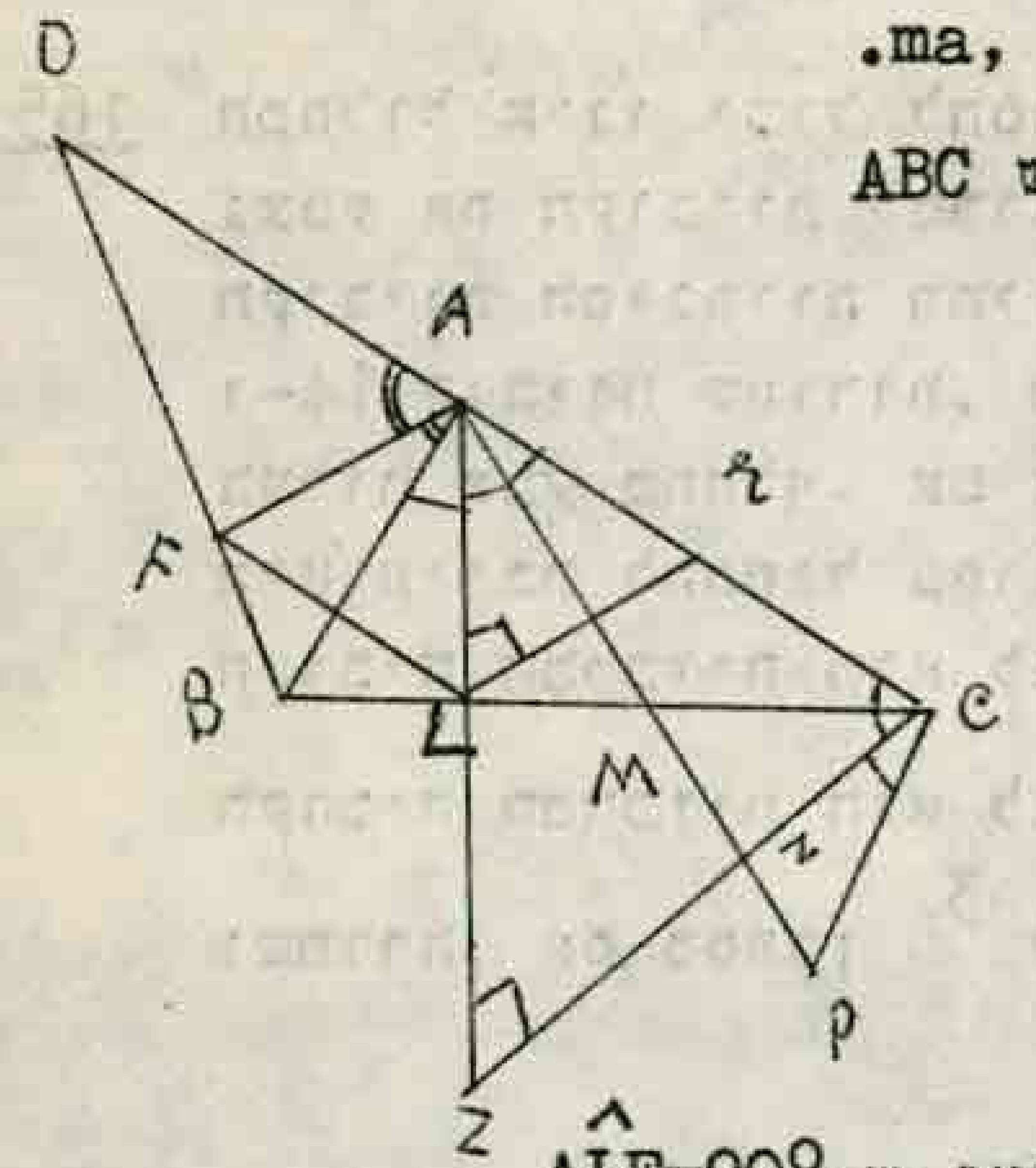


מכאן שעבור כל נקודה   על 2 אפשר למצוא נקודה עם זוית ראיה גדולה יותר, פרט למקרה כאשר המעגל העובר דרך B,A ו- M משיק ל-2 ב- M. אז M היא הנקודה המבוקשת. בנית מעגל זה אפשר לעשות על סמך המשפט על רבוע משיק למעגל ($OM^2=OB \cdot OA$ במקרה זה) או בעזרת שיטת הדמיון.

ת.163 יהי R המספר הטבעי הגדול ביותר אשר עבורו $2u+1$ 3^k ו- P המכפלה של כל המספרים הטבעיים הזרים ל-6 (אינם מתחלקים ב-6) ואשר קטנים או שוים ל-$2n+1$ הסכום: 3^{k-1} P.S

$(S = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1})$. מכיל מחברים שכלם שלמים פרט לאיבר $3^{k-1} P \frac{1}{3^k}$ לכן, לוּ S היה שלם, המכפלה $3^{k-1}PS$ היה גם שלם, אבל הסכום אינו שלם, הגענו לידי סתירה.

ת.164 (לפי אליהו עמיר)



דרוש לבנות משולש ABC לפי la,A ,ma.

נתוח: נניח כי זהו המשולש המבוקש ABC

ובו $B\hat{A}C = \hat{A}$

$AL = la$

$AM = ma$

נמשיך התיכון כארכו $AP=2ma$.

ABPC - מקבילות. CN היא חוצה הזוית ACP.

$2d = B\hat{A}C + A\hat{C}P$ - סמוכות.

$L\hat{A}C + A\hat{C}N = d = 90^o$ חצאים.

$A\hat{Z}C = 90^o$

נעביר LE מקביל ל-ZC. $LE \parallel ZC$. מכאן ש-$A\hat{L}E=90^o$

נמשיך את AC ונקצה $AC=AD$. נחבר את D עם B.

$AB=CP, AD=AC$. $D\hat{A}B = A\hat{C}P$. לכן: $\triangle DAB \cong \triangle ACP$

AF הוא חוצה זוית $D\hat{A}B$ ולכן שוה ל- CN ולפי חשבון זויות פשוט גם מקביל לו. $AF \parallel CN$, אבל $CN \parallel LE$

$\therefore AF \parallel LE$

לפי תכונות של חוצה זוית יוצא כי

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$$

וכן

$$\frac{BF}{FD} = \frac{AB}{AD}$$

אבל

$$AD = AC$$

לכן

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BF}{FD}$$

וכן $FL \parallel CD$

אבל $EL \parallel AF$

מכאן $EAFL$ היא מקבילית.

מכאן $AF = EL$

אבל $AF = CN$

לכן $CN = EL$

את המשולש ALE אפשר לבנות לפי $AM=ma$. $\hat{ALE}=90^{\circ}$ וזוית $\hat{EAL} = \frac{\hat{A}}{2}$. לכן נקבל כך גם את CN השווה ל- EL. במשולש ACP יש לנו את הזוית $\hat{ACP} = 180 - \hat{A}$ (זויות סמוכות במקבילית) הצלע שממולה $AP = 2ma$ וחוצה אותה זוית (נתון) $CN=LE$. בחוברת גליונות למתמטיקה מספר 4. ת-21 הוא תשובה לשאלה כיצד לבנות משולש לפי צלע, זוית שממולה וחוצה אותה זוית. ממשולש זה נגיע למשולש ABL לאחר שנעביר את התיכון ונמשיכו כארכו וכך נקבל את הנקודה השלישית במשולש- B.

ת.165 המסלול איננו יכול להסתיים בקוביה המרכזית, כדי להבין זאת נצבע את הקוביות לסרוגין שחור ולבן (כעין לוח שחמט מרחבי). הקוביות הפינתיות תהינה שחורות, לכן קבלנו 13 קוביות לבנות ו-14 קוביות שחורות. מסלול התולעת עובר לסרוגין דרך קוביות בעלות צבע מתחלף. אם נניח שהתולעת תעבור את כל הקוביות היא חייבת להתחיל בקוביה שחורה ולסיים בקוביה שחורה אבל הקוביה המרכזית היא לבנה!

הקוביה המרכזית היא לבנה, אם מספר הקוביות הוא $(4n-1)^3$ ושחורה, אם מספרן $(4n+1)^3$.

"נים" - משחק סיני עתיק - פתרון נוסף

עמוס אלטשילר

בכרך מס. 1, חוברת 2 ע"מ 39, מופיע תאורו של המשחק "נים" :

" משתתפים שני שחקנים. לפניהם מספר ערימות גפרורים, לדוגמא: שלוש ערמות בנות 3, 5 ו-7 גפרורים. המשחקים מסירים לסרוגין מספר גפרורים מערמה כלשהי. מספר זה יכול להיות 1, 2 וכו', ואף המספר הכולל של הגפרורים שבאותה ערימה. היינו, מותר לשחקן לחסל את הערימה כולה. אך כל פעם שמגיע תורו מותר לשחקן לקחת גפרורים מערימה אחת בלבד.

זוכה השחקן המחסל את הערימה האחרונה."

מספר הערימות הנו רצוני, וכן מספר הגפרורים שבכל ערימה.

באותו מאמר מובא פתרון למשחק זה. כלומר, מובאת השיטה, על פיה יכול אחד השחקנים לכפות - כבר מתחילת המשחק - פתרון על חברו.

בכרך מס. 2, חוברת 3 ע"מ 17, מופיע תאור ההצגה הבינרית של המספרים הטבעיים. בעזרת ההצגה הבינרית קל לתת שיטה קלה ומהירה לפתרון המשחק "נים". (פתרון זה מופיע בספרם של Hardy ו- Wright "The Theory of Numbers".

נסביר את השיטה ע"י דוגמא:

נניח שבתחילת המשחק יש 5 ערימות: א, ב, ג, ד, ה בנות 3, 2, 5, 7, ו-4 גפרורים בהתאמה. נרשם את מספרי הגפרורים לפי השיטה הבינרית: יתקבלו המספרים 11, 10, 101, 111 ו-100 בהתאמה.

נרשמם זה מתחת לזה, ונסכם את המספרים שבכל עמוד, לפי השיטה הרגילה, שיטת הבסיס 10:

א	11
ב	10
ג	101
ד	111
ה	100
	333

שלשת המספרים שהתקבלו הנם אי זוגיים. (3, 3 ו-3). ועתה על השחקן הראשון לשחק. שחקן זה מעונין - מסיבות שאח"כ נבינן - שאחרי שהוא ישחק - יהיו המספרים המבטאים את סכום המספרים שבכל עמוד - זוגיים כולם. לשם כך אין עליו לעשות הרבה: עליו פשוט לבחור באחת הערימות: ג, ד, ה ולהחליף בה כל 0 ב-1 וכל 1 ב-0. נניח שבחר בערימה ג, כלומר ב-101 . אחרי ההחלפה יהיה 010. כלומר, השחקן הראשון השאיר בערימה ג - שמלכתחילה היו בה 5 גפרורים - 2 גפרורים בלבד. כלומר לקח 3 גפרורים מערימה ג.

והמצב עתה הוא:

א	11
ב	10
ג	010
ד	111
ה	100
	242

מצב כזה - בו כל הסכומים הרשומים למטה הינם מספרים זוגיים או 0 - ייקרא מצב זוגי. מצב שבו לא כל הסכומים הללו זוגיים או 0 - ייקרא מצב אי-זוגי.

ברור, שצעדו של השחקן השני - יהיה הצעד אשר יהיה - יגרום למצב אי-זוגי, כי בלקחו גפרורים מאחת הערימות, הריהו משנה לפחות את אחת הספרות - במקום 0-1 ובמקום 1-0 - ובכך נעשה סכום העמוד המכיל ספרה זו לאי-זוגי.

נניח שלקח גפרור אחד מערימה א. בכך נעשה סכום העמוד הראשון לאי-זוגי, ואילו סכומי יתר העמודים לא נשתנו.

השחקן הראשון יכול שוב לגרום למצב זוגי, ב"תקנו" את העמוד הראשון, וזאת פשוט ע"י מחיקת "1" נוסף מאותו עמוד - כלומר, במקרה זה, נטילת גפרור אחד מערימה ג.

וכך הלאה. השחקן השני תמיד מקלקל את הזוגיות, והשחקן הראשון תמיד מחזיר את המצב ל"זוגיותו".

המצב בו כל הערימות ריקות, כלומר כל הספרות שבטבלה הן 0 - הנו מצב זוגי. כאמור, מצב זה יתקבל, בדוגמא שלנו, אחרי משחקו של השחקן הראשון, כלומר, השחקן הראשון הוא הנוטל את הגפרור האחרון, ולכן הוא המנצח.

בעקבות דוגמא זו, לא יקשה על הקורא לתת בעצמו את תאורה הכללי של השיטה, ואת ההוכחה ליעילותה.

כדי להקל על התאור הכללי, כדאי לדרוש שכל 0 המופיע כספרה הקיצונית משמאל במספר בינרי - לא ייכתב כלל. כגון, השחקן בצעדו הראשון בדוגמא דלעיל, בהחליפו את כל הספרות שב-101 קבל לא 010, כפי שכתבנו לעיל, כי אם 10.

האם השחקן הראשון ינצח תמיד? לאו דוקא. אם המצב ההתחלתי הנו זוגי, הרי שהשחקן הראשון בהכרח יהפכנו לאי-זוגי, ואם השחקן השני מכיר את שיטת המשחק הנכונה - הרי שינצח הוא. אך ברור שבדרך כלל, בקביעה מקרית של הערימות, יתקבל מצב אי-זוגי, ולכן בדרך כלל אם שני השחקנים מכירים את שיטת המשחק (אך ברור שאז אין כל טעם למשחק) ינצח השחקן הפותח.

אחרי אמון קצר, יתברר לקורא שאין כל צרך לרשום את הטבלה, ובלי לאמץ כלל את הזכרון - אפשר לעשות תמיד את הצעד הנכון.

רשימת פותרי השאלות מס. 151 - 165

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר.

1. אפלויב אלימלך, יא' תיכון ה' ת"א: 153,154,156*,157,158* (15 נ.)
2. אהרונוב נורמה, יא חולון: 151,152*,153,156,157*,158,159,163* (20 נ.)
3. אצרף מרדכי, י קרית מוצקין: 151,162* (3 נ.)
4. בוסל יצחק, י ראלי חיפה: 152*,154,156,157*,158*,161,162,163*,165* (24 נ.)
5. בורשטיק דב, יא רמת-גן: 151,152*,153,154,157,158*,159,160,162, 163 (31 נ.)
6. גולדשטין מאיר, צה"ל: 151,152*,153,154,156*,157,158*,160,162,163*, 165* (31 נ.)
7. גולדמן יהושע, ט תיכון ת"א: 151,159 (6 נ.)
8. גרוברט אברהם, חולון: 151,152*,153,154,155*,156,158*,160,161,162, 163, (30 נ.)
9. זלטקין מכאל, יב ראלי חיפה: 151,152*,153,154,155*,156,157,158,159, 160,161,162,163,164* (42 נ.)
10. לביא נתן, יב בית בירם: 151,153,154,156,157,161,162,163 (24 נ.)
11. ליבוביץ זאב, יא חולון: 151,152*,153,154,156,157,159,161,162,163, 164* (31 נ.)
12. מכמל שאול, ת"א: 151 (2 נ.)
13. מזלס יוסי, ראלי: 153,154 (7 נ.)
14. מרקסמר ישראל, י מוצקין: 153,154,162 (10 נ.)
15. סורין אנדרי, ט מקצועי חיפה: 153,154*,156*,158,159,165* (19 נ.)
16. סלע מנדל, יא אחד-העם: 151,153,154,156,158,162 (19 נ.)
17. ספרוני שמואל, יא תיכון עירוני ב: 151,152*,153,154,156,157,158, 159,161,162,163,164* (38 נ.)
18. סתוי יונתן, יא הרצליה ת"א: 151,152*,153,154,156,157,158,159*,160, 161,162,163,164*,165* (41 נ.)
19. עמיר אליהו, תיכון בני-ברק: 152*,153,154,156,157,158*,159,161,162, 164, (33 נ.)
20. פנקלשטין דן, ראלי: 153,154,156 (10 נ.)
21. פריד בועז, צה"ל: 151,153,154,157,158,159,160,161,162,163 (34 נ.)
22. פרידלנד שמואל, יב ראלי: 151,152*,153,154,156,157,158,159,160, 161,162,163,164*,165* (44 נ.)
23. קושניר ראובן, יב ראלי: 151,152*,153,154,155*,156,157,158*,159, 160,162,163,165* (40 נ.)
24. רסלר יעקוב, יא אחד-העם: 151,152*,153,154,156,157*,162,163 (21 נ.)
25. רוקח אריה, ט תיכון ב ת"א: 153*,154* (3 נ.)
26. רייך שמואל, ט ראלי: 152*,153,154,159, (13 נ.)
27. שפיצר אהרון, יא הרצליה: 152*,153,154,156,157*,158* (16 נ.)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

י. דוד, ביה"ס תיכוני עירוני א', רח' בכורי העתים 2, ת"א.

חשבון בבנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.