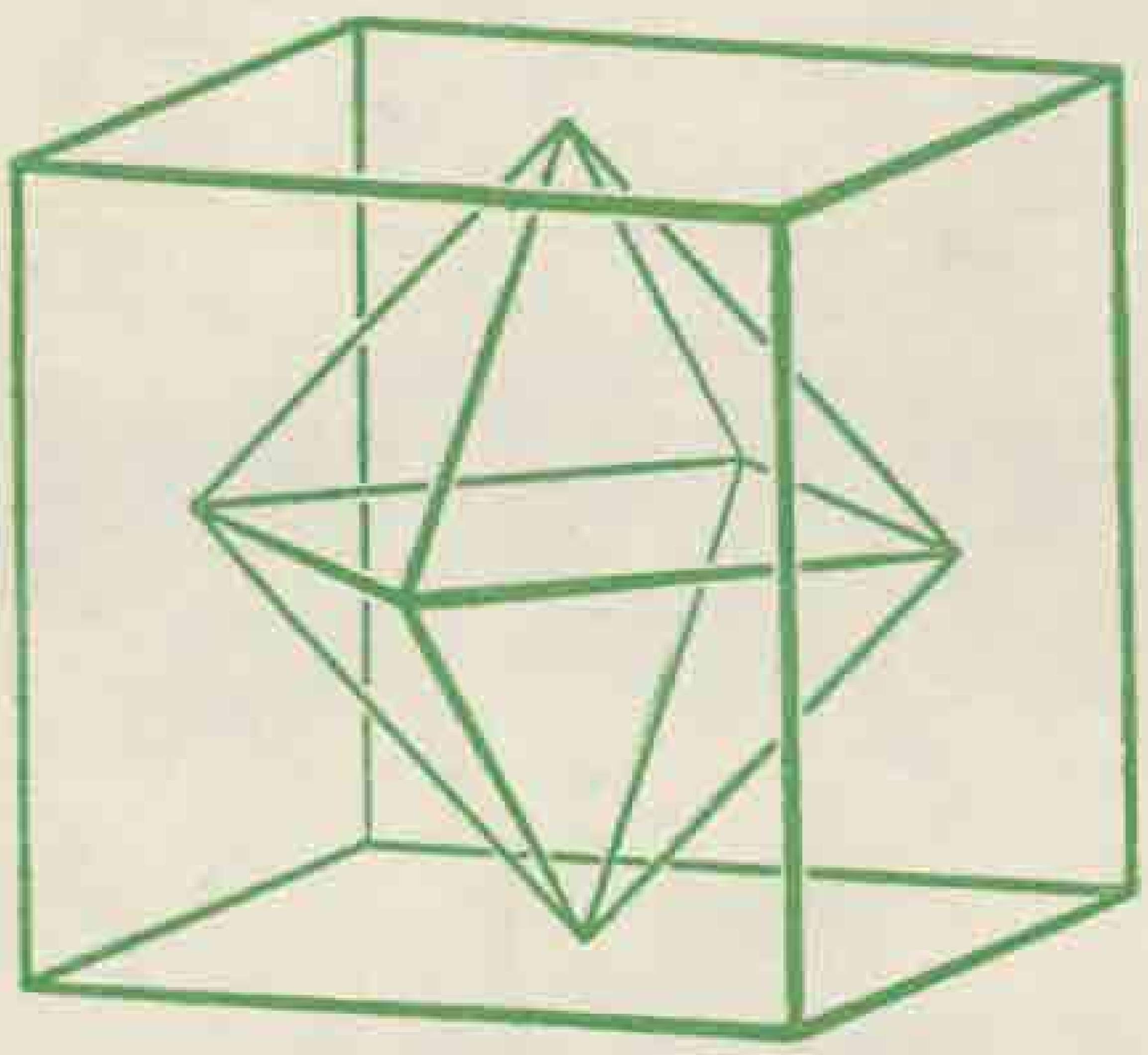
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 2 ת"א, ניסן תשכ"ד - אפריל 1964 מס' 6

יוצא לאור בחסות
ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. דוד

דבר המערכת

כנהוג ב"גליונות", גם הפעם אנו מפרסמים מאמרים מסוגים שונים, בחלקם המיועדים לתלמידי כתות ט' ו-י' ובחלקם לתלמידי הכתות הגבוהות יותר.

במיוחד עלינו לציין את המאמר הדן באי-האפשרות להתרת משואה אלגברית ממעלה חמישית. לאחר שהופיעו בעבר מאמרים על התרת משואות אלגבראיות ממעלה שלישית ורביעית פנו קוראים אחדים למערכת בבקשה לפרסם מאמר על הנושא הנ"ל, החלטנו לפרסם מאמרו של אחד הקוראים, אך בכל זאת עלינו להדגיש שהוא חורג משאר המאמרים מבחינת הקושי, אם כי אין צורך בידיעות מוקדמות לשם הבנתו.

אנו מפרסמים את רשימת הזוכים במחזור השלישי של התחרות המתמדת להתרת בעיות, ומקווים שתמשך השתתפותם הערה של קוראינו בהצעת בעיות מענינות ובפתרונן.

עם גליון זה נפרד העורך מקוראי הגליונות, וישמש בעתיד רק כחבר המערכת. המערכת תעבור למחלקה למתמטיקה שמושית במכון ויצמן, רחובות. קוראינו מתבקשים להפנות להבא את מכתביהם לכתובת החדשה.

במספר החשבון של המערכת בבנק הדואר לא יחול שנוי.

לבסוף ברצוננו לאחל לאלו מבין הקוראים הנגשים השנה לבחינות הבגרות הצלחה בבחינותיהם, ולכל קוראינו סיום שנת-למודים מוצלח.

בעיה ופתרונה

שני סוחרים קבעו ביניהם כתב סתרים לסכומי כסף כך שאות אנגלית מסויימת פרושה ספרה, אבל רק ספרה אחת.

יום אחד קבל אחד הסוחרים מברק מחברו וזו לשונו:

$$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ \underline{\text{MORE}} \\ \text{MONEY} \end{array}$$

בלי ספק יש כאן חבור שני מספרים, האם תוכלו לפענח את הסכום הסופי ?

ראה תשובה בעמ' 23.

גופים משוכללים

י. דוד

בשערי חמשת ה"גליונות" האחרונים הופיעו חמישה פאונים משוכללים אשר היו ידועים לאפלטון והנקראים על שמו פאונים אפלטוניים, ואלו הם: הטטראדר (בעברית - ארבעון), האוקטאדר (בעברית - תמנון), האיקוזאדר (פאון בעל 20 פאות), ההקסאדר (בעברית - קוביה), הדודקאדר (פאון בעל 12 פאות).

מגדירים פאון משוכלל כגוף אשר פאותיו מצולעים משוכללים חופפים והוא בעל פינות חופפות.

נשאל עצמנו האם קיימים פאונים משוכללים נוספים על אלו שהיו מוכרים ליונים. התשובה היא שלילית; יכולים להתקיים לכל היותר חמישה פאונים משוכללים. ניתן להווכח בזאת בשתי דרכים: באמצעות בדיקה ומיצוי מחד, וכתוצאה ממשפט כללי טופולוגי מאידך.

נסתכל בפינת חדרנו (הרי גם החדר הוא פאון, אם כי בדרך כלל אינו משוכלל). בכל פינה נפגשים לפחות שלושה מקצועות (שני מקצועות אינם יוצרים פינה). באותה פינה נפגשות לפחות שלוש פאות, ומטעם כל פאה גובלת בפינה זוית פנימית אחת.

סכום כל הזויות הללו חייב להיות קטן מ-360°, אחרת לא תיוצר פינה. במקרה שסכום הזויות מגיע ל-360°, תתקבל פריסת הפאון.

עתה עלינו רק למנות את כל האפשרויות:

א. פאון המורכב ממשולשים שוי-צלעות; בכל פינה נפגשים 3 מקצועות. סכום זויות הפינה יהיה: $3 \times 60^\circ = 180^\circ$, וזה יתכן (הארבעון).

ב. פאון המורכב ממשולשים שוי-צלעות; בכל פינה נפגשים 4 מקצועות. סכום הזויות בפינה יהיה: $4 \times 60^\circ = 240^\circ$ (התמנון).

ג. פאון המורכב ממשולשים שוי-צלעות; בכל פינה נפגשים 5 מקצועות. סכום הזויות בפינה יהיה: $5 \times 60^\circ = 300^\circ$ (האיקוזאדר). לעומת זאת לא יתכן פאון המורכב ממשולשים שוי-צלעות שבו נפגשים יותר מ-5 מקצועות בכל פינה, היות ו $6 \times 60^\circ = 360^\circ$.

ד. פאון המורכב מרבועים; בכל פינה נפגשים 3 מקצועות. סכום הזויות בפינה יהיה: $3 \times 90^\circ = 270^\circ$ (הקוביה).

לא יתכנו יותר פאונים משוכללים בעלי פאות רבועיות, כי: $4 \times 90^\circ = 360^\circ$.

ה. פאון המורכב ממחומשים משוכללים; בכל פינה נפגשים 3 מקצועות. סכום הזויות בפינה יהיה: $3 \times 108^\circ = 324^\circ$ (הדודקאדר).

לא יתכנו פאונים משוכללים "מחומשים" נוספים, הואיל ו $4 \times 108^\circ = 432^\circ$ שהוא עולה על 360°.

פאון משוכלל בעל משושים משוכללים כפאות לא יתכן, משום שכבר: $3 \times 120^\circ = 360^\circ$. כלומר: באמצעות בדיקה זו מצינו את כל האפשרויות.

המיצוי מראה רק שיש לכל היותר חמישה פאונים משוכללים, ואילו עובדת קיומם של הפאונים מוכיחה שיש בדיוק חמישה פאונים משוכללים. משפט זה מפתיע במקצת, כי במישור לא קיימת הגבלה מעין זו: קיים מספר בלתי מוגבל של מצולעים משוכללים, כך שלכל מספר טבעי הגדול או שווה ל-3 מתאים מצולע משוכלל.

הוכחה נוספת למשפט זה מבוססת על משפט אוילר (Euler), הדן בפאונים כלליים, והוא עצמו משפט מעניין מאוד. משפט אוילר מבטא קשר הקיים בין מספר הפינות, הפאות והמקצועות של פאון פשוט.

בשם פאון פשוט נקרא פאון אשר ניתן להעברה לכדור באמצעות עוותים (בלי קריעות); בקצור: גוף שאין בו חורים (כמו למשל כריך).

טענת המשפט היא שמספר הפינות (e) ומספר הפאות (p) גדול בשנים ממספר המקצועות (m). בנוסחה:

$$e + p = m + 2$$

משפט אוילר שייך לטופולוגיה, שהיא ענף המתמטיקה המטפל בהעתקות (טרנספורמציות) כלליות ביותר.

במאמר על העתקות פרויקטיביות שהופיע בחוברת 2, כרך 2 של ה"גליונות" שאלנו אלו תכונות גיאומטריות נשמרות בהעתקות אלו.

בטופולוגיה דנים בשמורות גיאומטריות של העתקות בהן אפשריים עוותים כלשהם של גוף בתנאי שנשמרת תכונת הרציפות (הגוף לא יקרע). קל להווכח שמספר הפאות, הפינות והמקצועות של גוף אינו משתנה ע"י העתקות כאלה. נבדוק תחילה את משפט אוילר בפאונים הידועים לנו:

	פינות e	פאות p	מקצועות m
ארבעון	4	4	6
תמנון	6	8	12
קוביה	8	6	12

ואלו לגבי גופים כלליים יותר נמצא:

	פינות e	פאות p	מקצועות m
מנסרות בהן הבסיסים מצולעים בני n צלעות	$2n$	$n+2$	$3n$
פירמידות בהן הבסיס מצולע בןn צלעות	$n+1$	$n+1$	$2n$

למרות שכל הדוגמאות מאשרות את החוק, יש כמובן צורך בהוכחה כללית.

טענת משפט אוילר היא: $e + p - m = 2$. נוכיח את המשפט באמצעות בניה (הוכחה קונסטרוקטיבית).

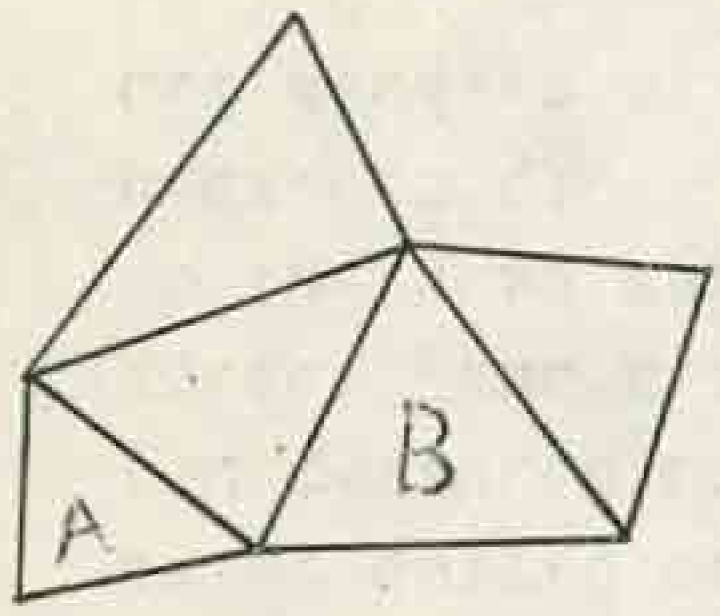
נוציא מתוך הגוף פאה אחת ונפרוש את הפאון שנותר. פעולה זו תתכן, כיון שניתן, כאמור, לעוות את הפאות. כתוצאה מכך נקבל צרוף מצולעים רבים בצורת רשת.

הואיל והוצאנו פאה אחת, עלינו להראות כי הרשת מקיימת את הקשר: $e + p - m = 1$.

נערוך עתה מספר פעולות ונווכח לגבי כל פעולה כי אינה משנה את הערך של הבטוי $(e + p - m)$.

א. נוסיף אלכסונים למצולעים במידה כזו שכל הרשת תכיל רק משולשים. כל פעולת העברה של אלכסון כזה מגדילה את p ב-1 ואת m ב-1, אך אינה משנה את e ולכן אף $(e + p - m)$ אינו משתנה.

ב. נוריד משולש אחד משולי הרשת. תתכנה שתי אפשרויות, כפי שמתואר בשרטוט ב- A וב-B. במקרה A עלינו להסיר שתי צלעות, לכן e קטן ב-1, p קטן ב-1 ו- m קטן ב-2, ולכן $(e + p - m)$ נשאר קבוע.



במקרה B עלינו להסיר רק צלע אחת, לכן p קטן ב-1 ו-m קטן ב-1, כך שגם הפעם $(e + p - m)$ קבוע. אם נמשיך בפעולות אלו, נגיע לבסוף למצב של משולש בודד ולגביו מתקיים המשפט. מכאן נופק שהמשפט נכון גם לגבי הרשת שממנה יצאנו וגם לגבי הפאון.

עתה נוכל לגשת להוכחת המשפט על קיום מירבי של חמישה פאונים בעזרת משפט אוילר.

בפאון משוכלל נפגשים בכל פינה n מקצועות ולכן גם n פאות; לכן מ-e פאות יוצאים ne מקצועות. אולם בשיטה זו ספרנו כל מקצוע פעמיים, כיון שהוא מחבר שתי פינות על כן: $ne = 2m$.

יהא הפאון מורכב ממצולעים משוכללים בעלי r צלעות, לכן מספר הצלעות השייכות לפאות הוא rp , אולם גם הפעם ספרנו כל מקצוע פעמיים (כי כל מקצוע שייך לשתי פאות), לכן $rp = 2m$.

נציג את ערכי e ו- p בנוסחת אוילר: $e + p - m = 2$,

ונקבל:
$$\frac{2m}{n} + \frac{2m}{r} - m = 2$$

או
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$$

n וגם r חייבים להיות גדולים או שוים ל-3 (כי בכל פינה נפגשים לפחות 3 מקצועות, וכל מצולע הוא בעל לפחות

3 צלעות), אבל לא יתכן ששניהם יחד גדולים מ-3.

נניח שכל אחד שוה ל-4, ונקבל:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = 0$$

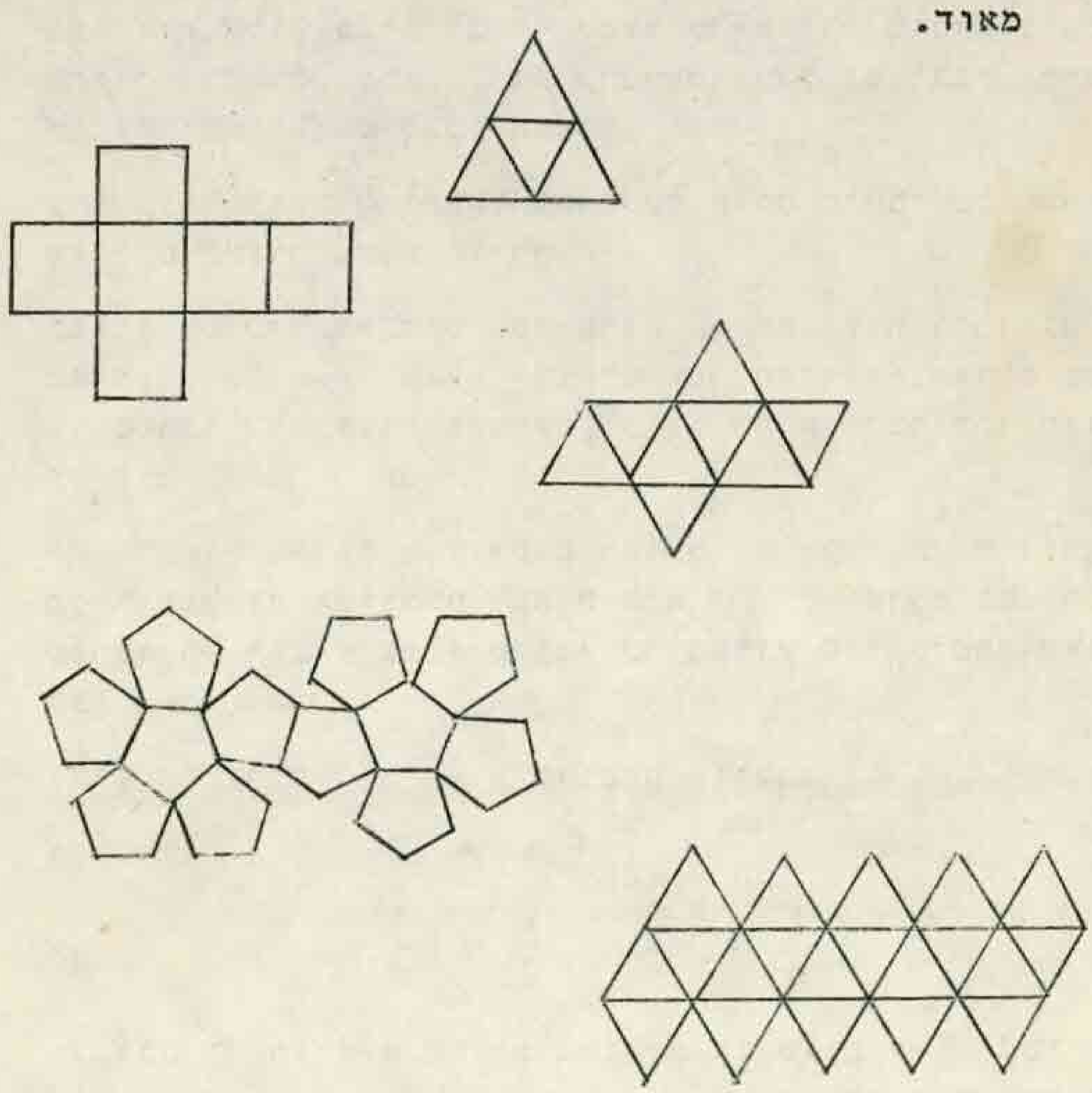
וזה לא יתכן.

נניח $n=3$:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{r}-\frac{1}{6}$$

כדי שיתקיים r חיובי יתכנו רק הערכים: $r=3\ ;\ 4\ ;\ 5$
המתאימים ל: $m = 6\ ;\ 12\ ;\ 30$
אם נחליף את תפקידי n ו- r נקבל שלושה מקרים נוספים, כלומר: יחד שישה מקרים, מהם שנים זהים: $r=3,\ n=3$. בסה"כ נותרים חמישה מקרים אפשריים; לכן יתכנו לכל היותר חמישה פאונים משוכללים.

נתאר כאן את פריסות חמשת הפאונים המשוכללים, אשר בעזרתן יוכל הקורא להכין לעצמו את דוגמות הפאונים. הדודקאדר והאיקוזאדר עשויים לשמש כמנורות דקורטיביות מאוד.



על אי-פתירות משואה אלגברית ממעלה חמישית

דן לונטל

בביה"ס התיכון הנכם לומדים נוסחה להתרת המשואה הריבועית $x^2+a_2x+a_1=0$, דהיינו: הנכם מבטאים את x בעזרת מקדמי המשואה בנוסחה $x_{1,2}=\frac{-a_2\pm\sqrt{a_2^2-4a_1}}{2}$. הפעולות הנדרשות הן ארבעת הפעולות היסודיות (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) והוצאת שורש.

אף משואות ממעלה שלישית ורביעית ניתנות להתרה ע"י אותן הפעולות, קיימות נוסחאות מתאימות למשואות אלו (ראה "גליונות" מס' 6 ו-7 כרך א').

אחרי שנמצאו הנוסחאות הנ"ל ניסו המתמטיקאים, לשוא, לפתור גם את המשואה ממעלה חמישית. הוכחה ראשונה לאי-התרת משואה זו מיחסים למתמטיקאי האיטלקי Ruffini (1799). הוכחה ברורה ראשונה נתן המתמטיקאי הנורבגי Abel (1826). התורה הכללית על התנאים להתרת משואות אלגבריות בעזרת שרשים נתנה ע"י המתמטיקאי הצרפתי Galois (1832), אשר נהרג בגיל 20 בדו-קרב.

את תורתו השאיר כצוואה מדעית במכתב שכתב ערב הדו-קרב.

ההוכחה שנביא להלן היא בקוים כלליים לפי זו של Galois.

כידוע אפשר לפרק כל משואה ממעלה n-ית ל-n גורמים:

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=0 \qquad (1)$$

במקום ש- $x_1,x_2,\dots,x_n$ הם n שרשי המשואה והם עשויים להיות גם מספרים מרוכבים,

ע"י פתיחת הסוגרים ב (1) נקבל:

$$x^n-(x_1+x_2+\dots+x_n)x^{n-1}+(x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}+$$
$$+\dots\pm x_1x_2\dots x_n=0$$

אנו רואים שבמשואה הכללית מסדר n-י המקדמים הם ביטויים של שרשי המשואה. למקדמים אלה יש תכונה מסויימת, והיא שהם מהוים פולינומים סימטריים ב- $x_1,\dots,x_n$; כלומר: ע"י החלפה של x_i ב- x_j $i,j=1,2,\dots,n$ צורת הפולינומים אינה משתנה.

דוגמא: $x^3y + y^3x$ הוא פולינום סימטרי ב x,y, כיון שאם במקום y נכתוב x, ובמקום x נכתוב y, נקבל $y^3x + x^3y$ השוה לפולינום המקורי.

לפלינומים ב $x_1,\dots,x_n$ המהוים את מקדמי המשואה הכללית מסדר n-י, קוראים הפולינומים הסימטריים היסודיים.

מסמנים ב e_1 פולינום סימטרי יסודי ראשון, ב e_2 את השני וכך הלאה.

$$e_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

סכום התמורות של כל המכפלות של שני אברים שונים:

$$e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}\, x_n$$

סכום התמורות של כל המכפלות של שלושה אברים שונים:

$$e_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \dots + x_{n-2}\, x_{n-1}\, x_n$$

$$\vdots$$

$$e_n = x_1x_2x_3 \dots x_n$$

לגבי פולינומים סימטריים חל המשפט היסודי הבא:

כל פולינום סימטרי ב $x_1,\dots,x_n$ ניתן להבעה, בעזרת ארבעת הפעולות האלגבראיות היסודיות, ע"י הפולינומים הסימטריים היסודיים.

לא נוכיח כאן משפט זה אך נראה דוגמא לקיומו:

יהי p פולינום סימטרי ב x,y: $x^3y + yx^2 + y^3x + y^2x= p(x,y)$

$$p(x,y) = xy(x^2 + y^2) + xy(x + y) = xy\left[(x+y)^2 - 2xy\right] + xy(x+y)$$

$$= e_2\, e_1^2 - 2e_2^2 + e_1\, e_2$$

נניח עתה שקיימת נוסחה כללית לפתרון משואה ממעלה n-ית. זו תהיה נוסחה של מקדמי המשואה שתכיל את ארבעת הפעולות היסודיות והוצאת שרשים מכל סדר.

ידוע שדבר זה אפשרי עד המעלה הרביעית ועד בכלל. לדוגמא:

$a x + b = 0$; הפתרון הוא: $x = \frac{-b}{a}$.

ולמשואה ממעלה שניה: $ax^2 + bx + c = 0$

נוסחת הפתרון היא: $x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

השורש כאן מובנו גם + וגם - . באופן כללי, מעל לשדה המספרים המרוכבים הביטוי - $\sqrt[n]{x}$ הוא n ערכי.

לדוגמא: ל - $\sqrt[2]{4}$ שני שרשים $+2$, -2.

ל - $\sqrt[3]{8}$ שלושה שרשים; $+2$, $-1 + \sqrt{3}i$, $-1 - \sqrt{3}i$.

נקל לאשר ע"י בדיקה שאמנם הביטוי האחרון למשל, הוא שורש שלישי של 8. בהגדירנו $i^2 = -1$ נקבל:

$$(-1 - \sqrt{3}i)^3 = -1+9- 3\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i = 8$$

עתה נראה שבמשואה כללית שמעלתה גבוהה מהראשונה, חייבת נוסחת הפתרון להכיל סימני שרשים.

הוכחה בדרך השלילה: נניח שלא מופיע אף סימן שורש בנוסחה, אזי הנוסחה כוללת רק את ארבעת הפעולות היסודיות, המופעלות על המקדמים $e_1,\ldots,e_n$ של המשואה:

$$x^n - e_1x^{n-1} + \ldots \pm e_n = 0$$

כאמור, כל ה e_i הם פולינומים סימטריים ב- $x_1,\ldots,x_n$ וקל לראות שע"י הפעלת ארבעת הפעולות היסודיות על פולינומים סימטריים נקבל ביטוי סימטרי ב $x_1,\ldots,x_n$.

נניח שנוסחת הפתרון היא: $x_i = \varphi(a_1,\ldots a_n)$, $i=1,\ldots,n$.
נציב כל a_i כפונקציה של $x_1,\ldots,x_n$ ונקבל:

$$x_i = \varphi(a_1,\ldots,a_n) = f(x_1\ldots,x_n)$$ כאשר $f(x_1,\ldots,x_n)$

כמוסבר למעלה, פונקציה סימטרית ב $x_1,\ldots,x_n$, $x_i = f(x_1,\ldots,x_n)$.

נחליף עתה בשני האגפים את x_i ב x_j :

$$i,j = 1,\ldots n,\ i \neq j,\ x_j = f(x_1,\ldots,x_n)$$

מכיון ש f סימטרית, נשמר האגף הימני , ולכן נקבל משני השויונות: $x_i = x_j$, וזו סתירה, כיון שבמקרה הכללי אין שני פתרונות החייבים להזדהות.

קבלנו, אם כן, שמשואה כללית הגבוהה מהמעלה הראשונה חייבת להכיל שרשים.

נבחר מן הנוסחה הכללית (שאותה אנו מניחים כקיימת). את השורש הפנימי ביותר, כלומר, את השורש שבתוכו כל האברים ללא סימני שרשים,

אם יש כמה ביטויים כאלה נבחר באחד מהם, $\sqrt[r]{A}$ כאשר A ביטוי ללא שרשים. נכנה אחד הפתרונות של $\sqrt[n]{A}$ (ה-r ערכי) ב y

$y = \sqrt[r]{A}$. A הוא ביטוי סימטרי ב $x_1,\dots,x_n$ כיון שהוא מורכב מביטויים ב $e_1,\dots e_n$, שעליהם מבוצעות 4 הפעולות היסודיות ־לבד "השומרות" על סימטריות הביטוי; שורש אינו מופיע ב A לפי הדרישה הנ"ל. נוכיח עם זאת ש y אינו סימטרי.

נניח שהוא סימטרי, אזי לפי המשפט היסודי של פולינומים סימטריים, יכולנו לבטאו כמנת פולינומים בפונקציות הסימטריות היסודיות, דהיינו במקדמים $e_1,\dots,e_n$ ולכן היינו יכולים לותר על סימן השורש, אך במקרה זה הינו חוזרים למצב שבו הנוסחה לא תכיל שורשים כלל, וזה כבר הוכח כבלתי אפשרי.

לכן y אינו סימטרי לגבי $x_1,\dots,x_n$, כלומר: ישנו זוג אחד לפחות, x_1,x_2 למשל, שע"י החלפתם משנה y את צורתו.

כיון שכל ערכי y קשורים ביניהם בנוסחה $y^r=A$, אזי, לפי משפט ידוע, מתקבלים כל ערכי y ע"י אחד מהם המוכפל בשרשי היחידה $\sqrt[r]{1}$ (ה-r ערכי). (לדוגמא: $\sqrt[2]{4}$, אחד הערכים הוא 2. שרשיו יתקבלו ע"י מכפלה ב- $\sqrt[2]{1}$ השוה ל-1, ול -1, ולכן השרשים הם $2 = 2 \times 1$, $-2 = 2 \times -1$).

יסומן אחד משרשי היחידה $\sqrt[r]{1}$ ב α. y היא פונקציה של $x_1,\dots,x_n$. נסמן: $y = f(x_1,\dots,x_n)$ ונניח ש y משנה את ערכו ע"י החלפת x_1 ב x_2 דוקא.

אזי לפי המשפט הקודם $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha f(x_2,x_1,\dots,x_n)$, כיון שזוהי זהות (כלומר נכון לכל ערך הנקבע ל $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, נוכל לבצע אותה פעולה בשני האגפים, ובמקום x_1 לשים x_2, ובמקום x_2 לשים x_1 . נקבל את השויון הבא:

$$f(x_2,x_1,\dots,x_n) = \alpha f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

נכפיל את שני השויוויות:

$$f(x_1,\dots x_n)\cdot f(x_2,\dots x_n)=\alpha^2 f(x_1,\dots x_n) f(x_2,\dots x_n).$$

$f(x_1,\dots,x_n)$ ולכן $f(x_2,x_1,\dots x_n)$ שונים מאפס, לכן
נוכל לצמצם ונקבל: $\alpha^2=1$ ולכן $\alpha=+1$, $\alpha=-1$, אך $\alpha=+1$
אינו משנה את ערך y; בניגוד להנחה, ולכן נותר $\alpha=-1$. מכאן,
דרך אגב, נוכל להסיק ש r הוא זוגי. כן נוכל להניח ש r ראשוני,
כי אחרת, במקרה שהמעריך מספר פריק, נוכל ע"י הוצאות חוזרות
של שורש להפכו לשורשים בעלי מעריכים ראשוניים. (לדוגמא:
$\sqrt[6]{A}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{A}}$).

כיון ש r זוגי וראשוני, הוא חייב להיות 2. מכאן נסיק
שבנוסחה הכללית לפתרון משואה אלגבראית ממעלה הגדולה מהראשונה,
חייב להופיע שורש ריבועי.

אנו רואים שע"י החלפת x_1 ב x_2 משנה y את סימנו,
כיון שבמקום x_1, x_2 יכולים להביא כל x_j,x_i $i\neq j$ רצוניים
(ע"י החלפת מקומם במשואה $x^n-(x_1+x_2+\dots+x_n)x^{n-1}+\dots$

$$\dots\pm x_1x_2\dots x_n=0$$

מתקבלת המסקנה הבאה: כל החלפה של x_i ב x_j
$i\neq j$ משנה את סימנו של y.

מקרה פרטי של החלפת סדר היא ההחלפה הנקראת תמורה ציקלית.
תמורה ציקלית של $x_1,x_2,\dots,x_n$ מוגדרת כהחלפת x_1 ב x_2,
x_2 ב x_3; x_{n-1} ב x_n, x_n ב x_1. נסמן זאת:

$$x_1,x_2,\dots x_n\longrightarrow x_2,x_3,\dots,x_n,x_1$$

תמורה ציקלית תקרא זוגית, אם מוחלף מספר זוגי של אברים
$x_1,\dots,x_{2p}$, ואי-זוגית אם מספר אברי התמורה אי־זוגי $x_1\dots x_{2p+1}$.

<u>משפט</u>: y נשאר קבוע בביצוע תמורה ציקלית אי-זוגית של
איברים מתוך $x_1,\dots,x_n$.

<u>הוכחה</u>: כל צורה ציקלית אי-זוגית כרוכה במספר זוגי של
החלפות סדר של שני אברים. לדוגמא: תמורה ציקלית של $x_1x_2x_3$ תבוצע
בעזרת שתי החלפות סדר: $x_1x_2x_3\longrightarrow x_2x_1x_3$ ו $x_2x_1x_3\longrightarrow x_2x_3x_1$

נניח שיש לנו $2p+1$ איברים, אזי התמורה הציקלית תבוצע

ע"י חילוף האבר הראשון עם כל הנותרים, דהיינו: $2p$ חילופין.

כיון שכל חילוף גורר שינוי סימון y, נקבל שע"י תמורה ציקלית אי-זוגית משתנה הסימן מספר זוגי של פעמים, כלומר, נשאר קבוע.

לכן y אינו משנה את צורתו ע"י תמורה ציקלית אי-זוגית. נמשיך לבדוק את אברי הנוסחה הכללית של משואה ממעלה n-ית; הם יכילו אברים דוגמת y שרשים מהם וכן את הפעולות היסודיות (חיבור, חיסור, כפל וחילוק).

נבדוק האם כולם מקיימים את התכונה שמקיים y, כלומר, אי-שינוי הצורה ע"י תמורה ציקלית אי-זוגית.

טענה: אם מעלת המשואה הכללית גבוהה מהמעלה הריבועית, לא יתכן שנוסחת הפתרון תכיל רק ביטויים מצורת y.

הוכחה: נניח שאכן יש נוסחה כזאת, אזי, לנוסחה תהיה התכונה שלא תשנה את צורתה ע"י תמורה ציקלית אי-זוגית. נניח כי פתרון אחד הוא x_1:

$$x_1 = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

לפי ההנחה אין תמורה ציקלית אי-זוגית משנה את האגף הימני, במיוחד התמורה הציקלית של x_1, x_2, x_3. האגף השמאלי יעבור עם זאת ל x_2. $x_2 = f(x_2, x_3, x_1, x_4 \dots x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$

לכן נקבל $x_1 = x_2$ וזו סתירה, כי אין כך הדבר במקרה הכללי.

הגענו למסקנה שקיים לפחות איבר אחד בנוסחה שאינו מקיים את התכונה הנ"ל. הוא חייב להיות מהצורה $\sqrt[r]{B}$, כאשר B עדיין בעל התכונה שתמורה ציקלית אי-זוגית שומרת על צורתו והוא יכול להכיל גם שרשים דוגמת y. סימן שורש חייב להופיע כיון ששאר הפעולות היסודיות, כפי שקל לראות, ישמרו על התכונה הנ"ל. יסמן Z את אחד מערכי $\sqrt[r]{B}$. כיון ש Z פונקצית מקדמי המשואה, נקבל: $Z = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$. נבצע תמורה ציקלית על x_1, x_2, x_3. כל ערכי Z קשורים ביניהם ע"י הנוסחה $Z^r = B$.

בדיוק כמקודם, אחרי התמורה ישתנה ערך Z ע"י כפולה באחד משרשי היחידה $\sqrt[r]{1}$ שיסומן כמקודם, ב-α.

$$f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=\alpha f(x_2,x_3,x_1,\dots,x_n)$$

כיון שזו זהות, נוכל לבצע אותן הפעולות בשני האגפים. נחליף x_1 ב x_2 , x_2 ב x_3 , ו x_3 ב x_1 ⟵ ונקבל:

$$f(x_2,x_3,x_1,\dots x_n)=\alpha f(x_3,x_1,x_2,\dots x_n)$$

נבצע פעם נוספת אותה פעולה על המשואה השניה ונקבל:

$$f(x_3,x_1,x_2,\dots x_n)=\alpha f(x_1,x_2,x_3,\dots x_n)$$

נכפיל את שלוש המשואות אחת בשניה ואחרי הצמצום נקבל $\alpha^3=1$

מכאן נוכל להסיק באופן דומה לנ"ל ש $r=3$, כלומר: בנוסחה למשואה כללית ממעלה שלישית ומעלה, אם היא קיימת, חייב להופיע שורש שלישי; ולכן $\alpha=\sqrt[3]{1}$,

כלומר $\omega_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\omega_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$; $\alpha=\omega_1$ או $\alpha=\omega_2$

קל לאשר זאת ע"י העלאת ω_1 או ω_2 לחזקה שלישית, $\alpha=1$ לא בא כאן בחשבון, כיון שאז Z לא היה משנה את ערכו, בניגוד להנחה.

אם המשואה הכללית ממעלה חמישית או ממעלה גבוהה יותר, נוכל לבצע תמורה ציקלית של 5 אברים. נסתכל מה קורה ל Z;

ישנן 2 אפשרויות: א) Z נשאר קבוע אחרי התמורה הציקלית של 5. ב) Z ישתנה.

נדון באפשרות השניה תחילה: נבדוק כיצד Z יכול להשתנות ע"י תמורה ציקלית של 5 משרשי המשואה. $Z^3=B$, B נשאר קבוע אחרי התמורה, ולכן Z חייב להשתנות או ע"י הכפלה ב ω_1 או ע"י הכפלה ב ω_2. נבחר במקרה הראשון:

$$f(x_1\dots x_5\dots x_n)=\omega_1 f(x_2\dots x_5 x_1,\dots x_n)$$

זו זהות ונוכל לבצע אותן פעולות בשני האגפים 4 פעמים נוספות. באופן דומה למקרים הקודמים נקבל 5 משואות שע"י הכפלתן נקבל $\omega_1^5=1$ וזוהי סתירה, כי ע"י העלאה בחזקה חמישית של ω_1 לא נקבל 1. לגבי ω_2 נקבל באותו אופן ש $\omega_2^5=1$ ואף זה לא יתכן.

ולכן סתרנו את אפשרות ב). ראינו שכל שינוי Z הנגרם

ע"י תמורה ציקלית של 5 משרשי המשואה, גורר אחריו סתירה. נדון באפשרות א), כלומר: Z חייב להשאר קבוע ע"י כל תמורה ציקלית של 5 אברים, ולהשתנות ע"י כל תמורה ציקלית של 3 אברים. נוכח שגם אפשרות זו לא תתכן.

<u>טענה</u>: כל תמורה ציקלית של 3 אברים ניתנת לביצוע ע"י 2 תמורות ציקליות בסדר של 5 אברים. כלומר ביצוע 2 התמורות אחת לאחר השניה.

נראה 2 דוגמאות לכך: נבצע תמורה ציקלית של $x_1\ x_2\ x_3$ ע"י שתי התמורות הציקליות העוקבות הבאות:

$$(x_1x_4x_3x_5x_2) \longleftarrow (x_1x_5x_3x_2x_4)$$

נבדוק: x_1 עובר ל x_5 ע"י תמורה ראשונה, ואילו ע"י השניה x_5 עובר ל x_2 .

סה"כ: x_1 עובר ל x_2. באופן דומה נראה ש x_2 עובר ל x_3, x_3 ל x_1, ואילו x_4, x_5 עוברים לעצמם. ולכן סה"כ בצענו תמורה ציקלית של $x_1x_2x_3$.

נבצע את התמורה הציקלית של $x_3x_2x_1$ ע"י 2 התמורות הבאות: $(x_1x_2x_3x_4x_5) \longleftarrow (x_5x_4x_3x_1x_2)$.
באופן דומה נראה ש x_3 עובר ל x_2, x_2 ל x_1 , x_1 ל x_3 ואילו x_4, x_5 עוברים לעצמם, ולכן סה"כ בצענו תמורה ציקלית של $x_3\ x_2\ x_1$.

שתי דוגמאות אלה מספיקות להוכיח שטענתנו נכונה לגבי כל 3 איברים, למשל: תמורה של $x_2\ x_1\ x_3$ אקויולנטית לתמורה של $x_1\ x_2x_3$ כיון ש x_1 עובר ל x_2 וכו'.

כיון שכל תמורה ציקלית של 5 משרשי המשואה לא תשנה את ערך ה Z, הרי שגם שתי תמורות עוקבות לא תשנינה את Z, ובמיוחד שתי התמורות הציקליות הגוררות אחריהן תמורה ציקלית של 3 אברים. ולכן גם התמורה הציקלית של 3 משרשי המשואה לא היתה משנה את הערך של Z בניגוד להנחה. ולכן הגענו לידי סתירה גם לגבי אפשרות א).

קבלנו, אם כן, את המשפט היסודי הבא: לא תתכן נוסחה כללית סופית למשואה אלגבראית מסדר n-י $n \geq 5$, המכילה רק את 4 הפעולות האלגבריות היסודיות והוצאת שורשים.

<u>הערה:</u> ברור שע"י הרחבת הפעולות המותרות (למשל, פעולה הפותרת את המשואה $(x^n+ax+b = 0)$ ניתן להגיע לנוסחאות כלליות עבור $n \geq 5$ (כזכור, הוצאת שורש היא פעולה הפותרת את המשואה $x^n + a = 0$).

על גופים קמורים (במשור)

לפי הספר "CONVEX FIGURES" - YAGLOM

רפפורט מרדכי

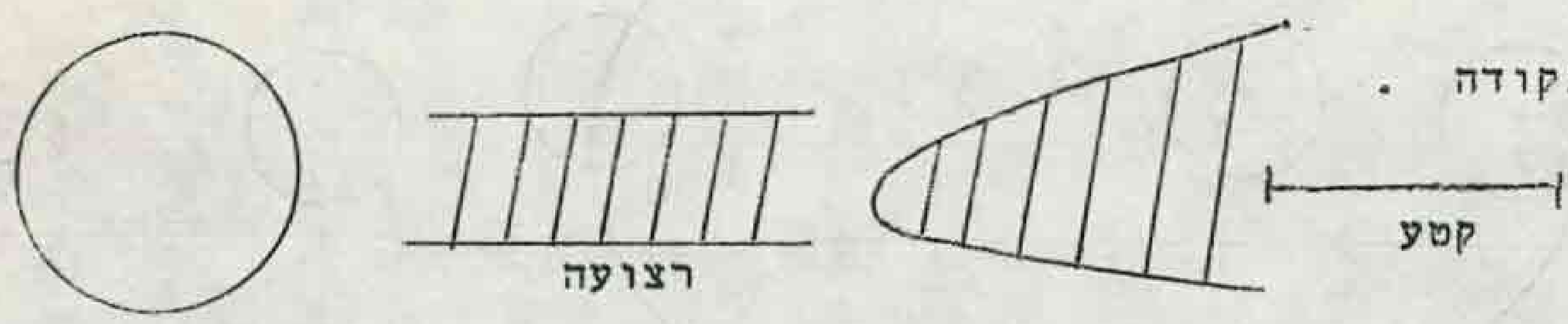
פרק א <u>מושגים יסודיים</u>

<u>צורה קמורה</u> (גוף קמור). צורה גיאומטרית מישורית נקראת קמורה,אם היא מכילה יחד עם כל שתי נקודות שלה את הקטע המחבר שתי נקודות אלו. באותו אופן מגדירים גם גוף מרחבי קמור.

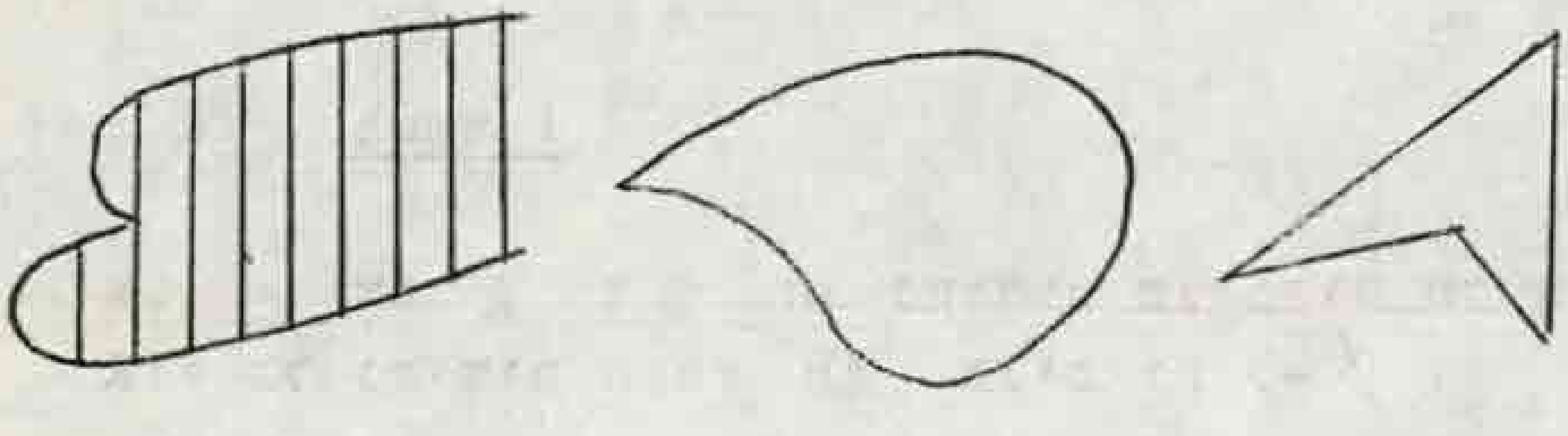
<u>צורה חסומה.</u> צורה מישורית נקראת חסומה אם קיים מעגל המכיל את הצורה.

דוגמאות: מקבילית, משולש - הן צורות חסומות.
ישר, רצועה (strip) - הן צורות לא חסומות.

דוגמאות לצורות קמורות:



דוגמאות לצורות שאינן קמורות:



<u>החתוך של שני גופים</u> הוא הגוף המורכב מהנקודות המשותפות לשני הגופים.

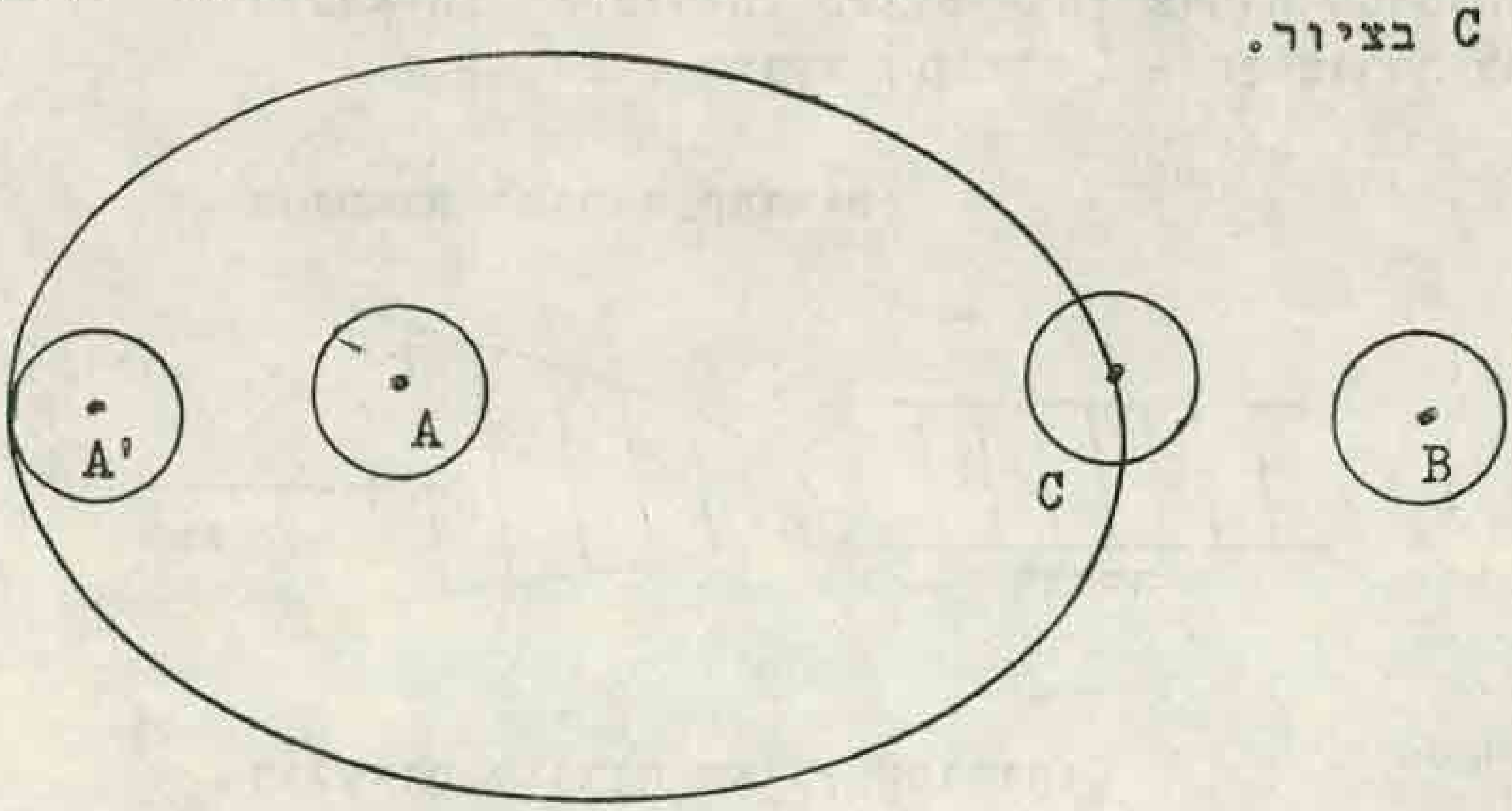
החתוך של שתי צורות קמורות אף הוא קמור. ובאמת יהיו $\emptyset_1$ ו- $\emptyset_2$ גופים קמורים ו- $\emptyset$ חתוכם. יהיו A ו B שתי נקודות השייכות לחתוך. לפי הגדרת החתוך של שני גופים, הנקודות A ו B שייכות גם ל- $\emptyset_1$ וגם ל- $\emptyset_2$, ומאחר ש- $\emptyset_1$ קמור כל נקודות הקטע AB שייכות ל- $\emptyset_1$, ובגלל קמירות $\emptyset_2$ הן שייכות גם ל $\emptyset_2$, לכן הקטע AB כולו שייך ל- $\emptyset$.
מ.ש.ל.

נחלק את כל הנקודות במישור לשלושה סוגים ביחס לצורה במישור: נקודות פנימיות, נקודות חיצוניות ונקודות שפה.

<u>נקודה נקראת פנימית</u> אם קיים עגול שמרכזו בנקודה ואשר <u>כולו</u> שייך לצורה. דוגמא: הנקודות A ו 'A בציור הבא.

<u>נקודה נקראת חיצונית</u> אם קיים עגול שמרכזו הנקודה, ושאינו מכיל אף נקודה מהגוף הנתון. דוגמא: נקודה B בציור.

<u>נקודה נקראת נקודת שפה</u> אם <u>כל</u> עגול בנקודה מכיל תמיד גם נקודות השייכות לצורה וגם נקודות שאינן שייכות לצורה. דוגמא: נקודה C בציור.



כל נקודות השפה מהוות ביחד את השפה של הגוף.

<u>משפט 1.</u>

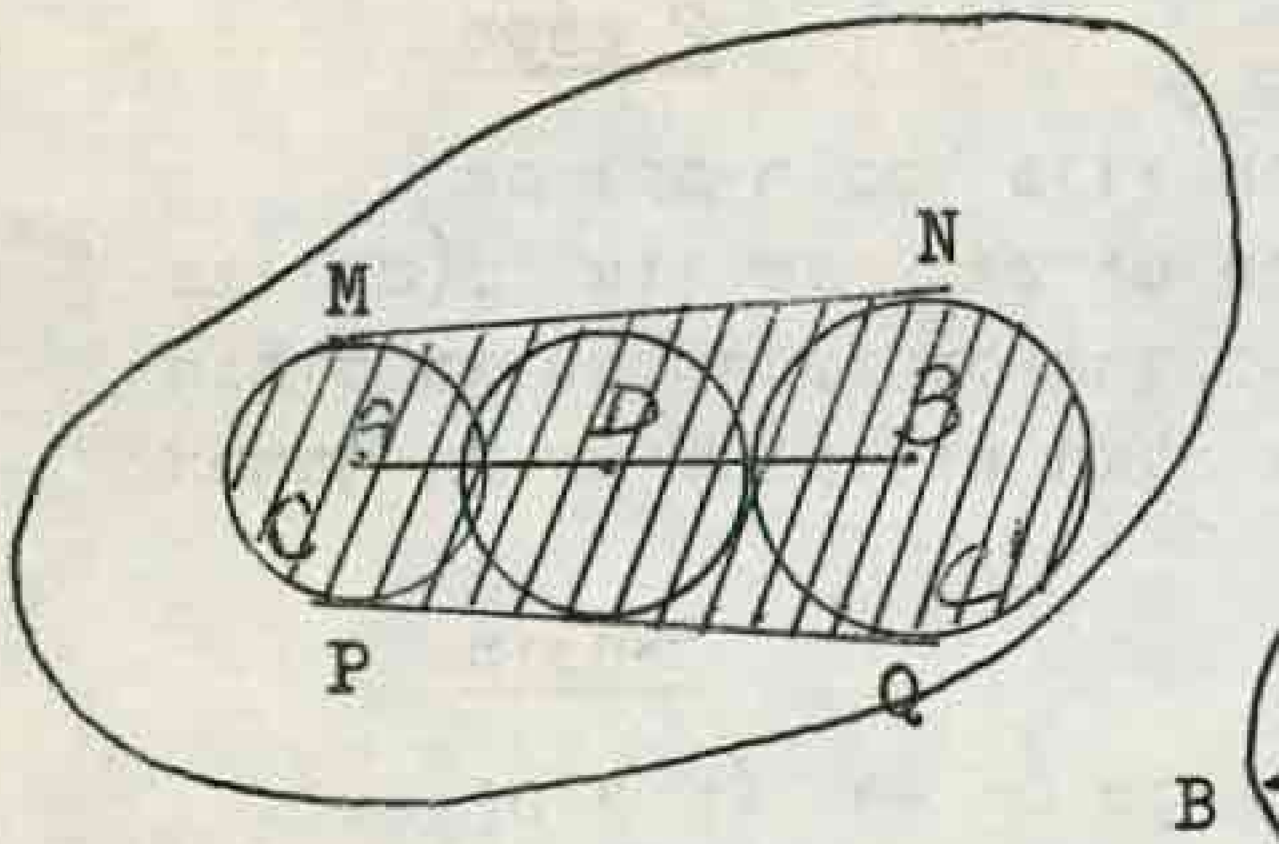
א. אם A ו B הן נקודות פנימיות של צורה קמורה $\emptyset$ אזי כל נקודות הקטע AB פנימיות ל- $\emptyset$.

ב. אם A נקודה פנימית ו- B נקודת שפה של צורה קמורה $\emptyset$, אזי, כל נקודות AB חוץ מ- B הן נקודות פנימיות ל- $\emptyset$.

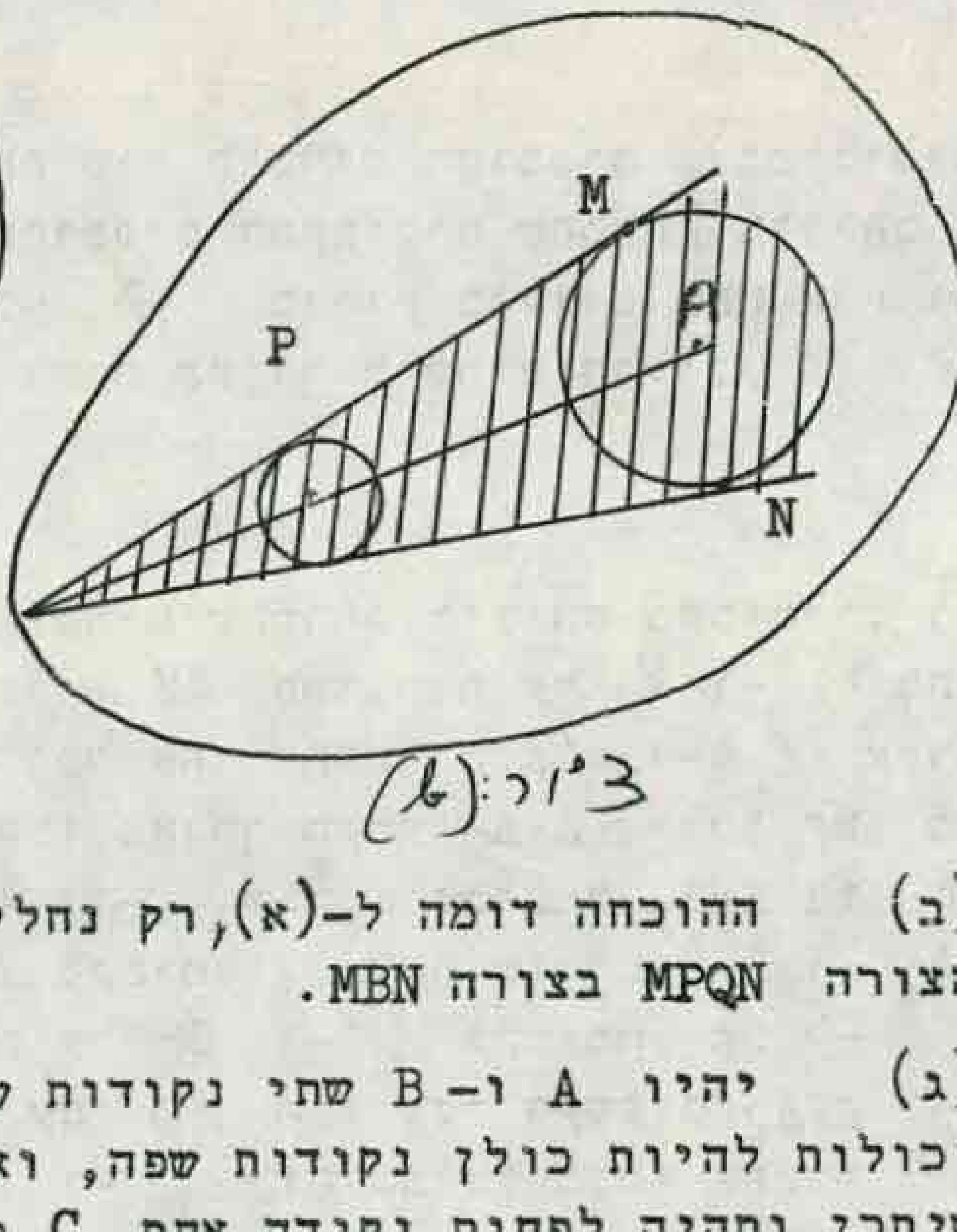
ג. אם A ו B הן נקודות שפה של צורה קמורה $\emptyset$, אזי או שכל הנקודות של הקטע AB הן נקודות שפה של $\emptyset$, או כל הנקודות של AB פרט ל- A ו- B הן נקודות פנימיות.

הוכחה

(א) יהיו A ו- B שתי נקודות פנימיות של $\emptyset$, מהגדרתה של נקודה פנימית נובע, כי ישנם שני עגולים C ו-C' שמרכזיהם בנקודות A ו- B בהתאמה ושכל נקודותיהם שייכות ל- $\emptyset$, יהיו MN ו PQ המשיקים החיצוניים המשותפים של המעגלים C ו- C'. מאחר ש- $\emptyset$ קמורה, כל הצורה MPQN בציור, שייכת ל- $\emptyset$. כתוצאה מכך כל נקודה D של הקטע AB יכולה לשמש כמרכז של מעגל מסויים שכל נקודותיו שייכות ל $\emptyset$.



ציור (a)



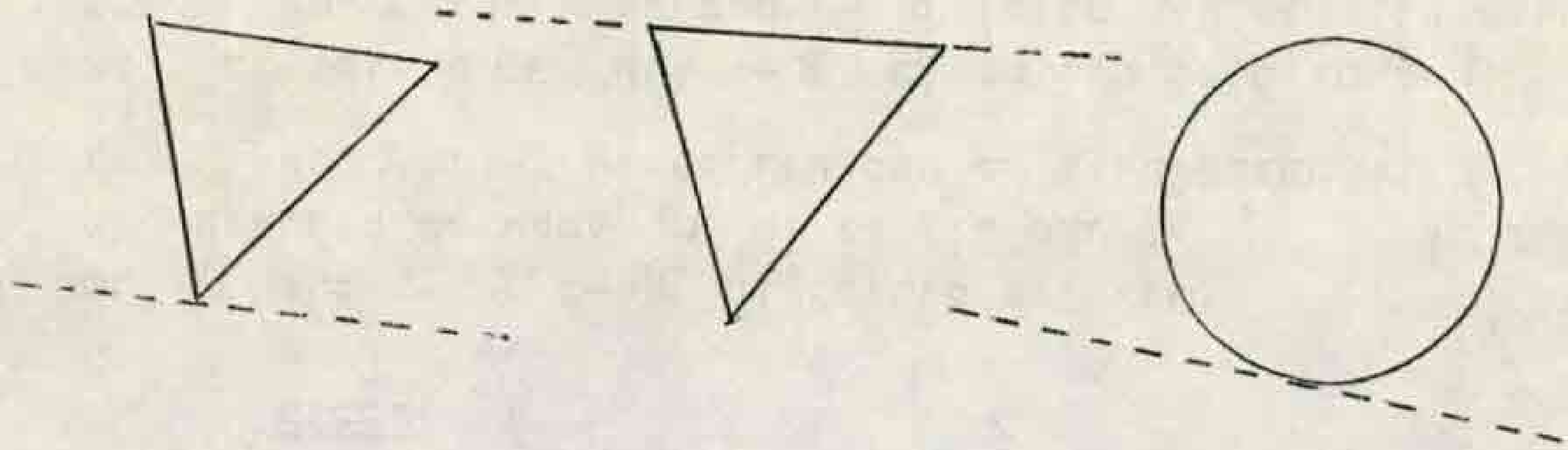
ציור: (b)

(ב) ההוכחה דומה ל-(א), רק נחליף את המעגל C' בנקודה B ואת הצורה MPQN בצורה MBN.

(ג) יהיו A ו- B שתי נקודות שפה של $\emptyset$. נקודות הקטע AB יכולות להיות כולן נקודות שפה, ואז מתקיים המקרה הראשון, או שיתכן ותהיה לפחות נקודה אחת C בקטע AB שאינה נקודת שפה, אלא נקודה פנימית. אזי לפי (ב) כל הנקודות של CA ושל CB, מלבד A ו- B הן נקודות פנימיות ל- $\emptyset$. מש"ל.

נגדיר כעת מושג חדש:

<u>ישר תומך</u> של צורה קמורה הוא ישר המכיל נקודות שפה ואינו מכיל נקודות פנימיות של הצורה. ראה דוגמאות בציור בעמוד 18.



נוכל לראות, כי בכל כוון אפשר להעביר בדיוק שני ישרים תומכים לצורה חסומה קמורה, (שהם יהיו מקבילים ביניהם).

נותר על הוכחות הטענה הזאת, שהיא אינה קשה ביותר, ונעבור למשפט הבא:

<u>משפט 2</u>

אם נעביר בכל כוון את שני הישרים התומכים (המקבילים ביניהם), אזי שני הישרים התומכים המקבילים שהמרחק ביניהם הוא הגדול ביותר, יגעו כל אחד ב- $\emptyset$ בדיוק בנקודת שפה אחת והקטע המחבר את שתי הנקודות האלה יהיה מאונך לישרים הללו.

<u>הוכחה</u>

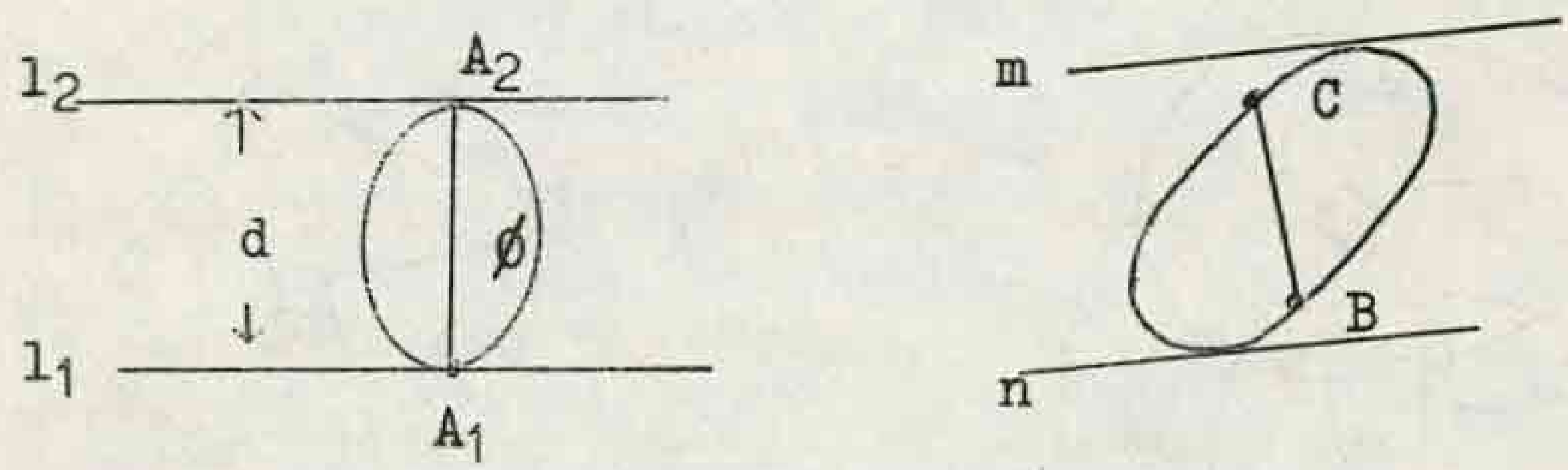
יהיו ℓ_1 ו- ℓ_2 שני ישרים שהמרחק ביניהם מקסימלי, ויהיו A_1 ו-A_2 שתי נקודות שפה של $\emptyset$ המונחות על ℓ_1 ו- ℓ_2 בהתאמה. נראה, כי הקטע A_1A_2 מאונך לכל אחד מהישרים ℓ_1 ו- ℓ_2, אחרת יהיה המרחק בין ℓ_1 ו-ℓ_2 קטן מאורך הקטע A_1A_2 ולכן קטן מהמרחק בין שני הישרים התומכים ℓ_1 ו- ℓ_2 המאונכים ל-A_1A_2 וזו סתירה להנחה שהמרחק בין ℓ_1 ו- ℓ_2 מקסימלי, (ראה ציור). A_1 ו- A_2 הן שתי נקודות שפה רצוניות הנמצאות על ℓ_1 ו- ℓ_2 בהתאמה, אם ל- ℓ_1 למשל תהיה עוד נקודה A'_1 משותפת עם $\emptyset$, הרי שני הקטעים A_1A_2 וA'_1A_2 יצטרכו להיות מאונכים ל-ℓ_1 ו- ℓ_2, זה כמובן בלתי אפשרי, כך שלכל אחד מהישרים ℓ_1 ו ℓ_2 יש בדיוק נקודה משותפת אחת עם $\emptyset$. מש"ל.

<u>משפט 3</u>

המרחק הגדול ביותר בין שתי נקודות של צורה קמורה מזדהה עם המרחק הגדול ביותר בין שני ישרים תומכים מקבילים מסויימים.

הוכחה

תהי $\varnothing$ צורה קמורה, ℓ_2, ℓ_1 הישרים התומכים שהמרחק ביניהם d הוא הגדול ביותר מכל המרחקים שבין זוגות ישרים תומכים מקבילים, תהיינה A_1 ו A_2 שתי הנקודות המשותפות ל- $\varnothing$ ול - ℓ_1 ו ℓ_2 בהתאמה, מאחר והקטע A_1A_2 מאונך ל- ℓ_1 ו- ℓ_2 (לפי משפט 2) נובע שאורך הקטע A_1A_2 שוה ל- d, לכן נותר לנו להוכיח שהמרחק בין כל שתי נקודות של $\varnothing$ אינו גדול מ- d.



אבל אם B ו- C הן שתי נקודות כלשהן של $\varnothing$, ואם m ו- n הם הישרים התומכים המאונכים ל- BC, הרי אורך הקטע BC אינו גדול מהמרחק בין m ו- n, וזה האחרון אינו גדול מ- d, לפי הגדרת d. לכן אורך BC אינו גדול מ- d.

לאור המשפט הזה נגדיר:

קוטר הצורה הוא המרחק המקסימלי האפשרי בין זוג נקודות של $\varnothing$.

לפי משפט 3 הקוטר של צורה קמורה מתלכד עם המרחק המקסימלי בין שני ישרים תומכים מקבילים.

פרק ב. משפט HELLY ושמושיו

משפט 4

תהינה נתונות ארבע צורות קמורות במישור, כך, שלכל שלוש מהן יש נקודה משותפת, אזי גם לכל ארבעתן תהיה לפחות נקודה משותפת אחת.

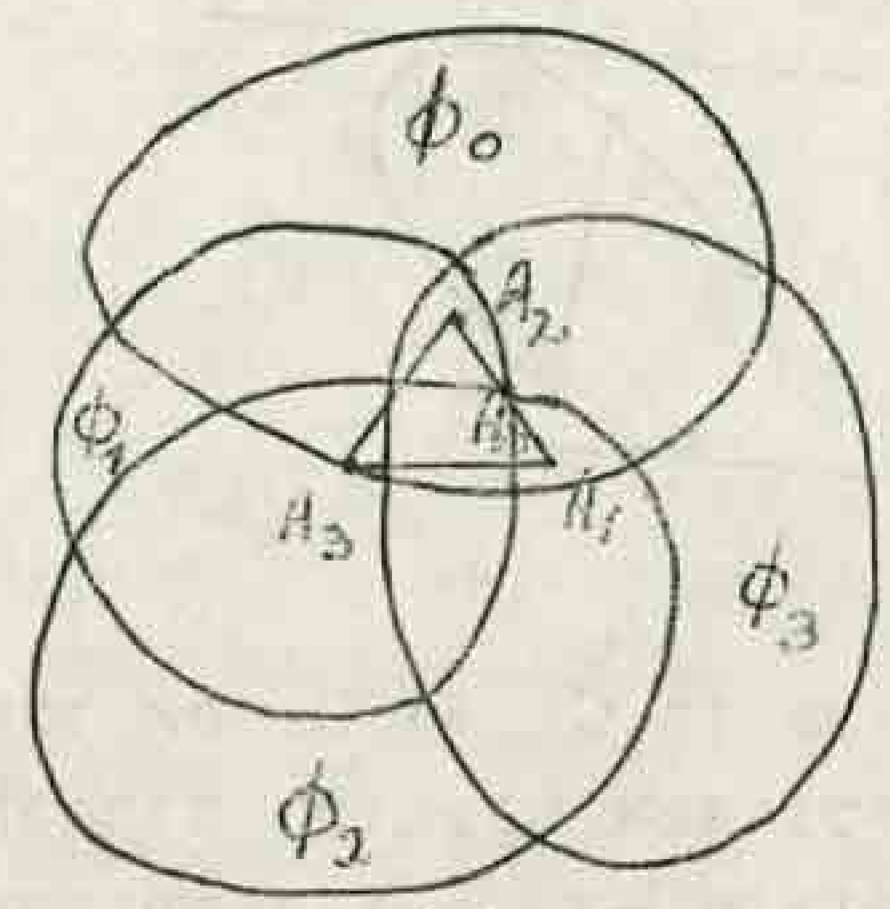
הוכחה

נסמן את ארבע הצורות הקמורות ב- $\varnothing_0, \varnothing_1, \varnothing_2, \varnothing_3$
ותהינה: A_0 הנקודה המשותפת ל- $\varnothing_1, \varnothing_2, \varnothing_3$; A_1 המשותפת ל- $\varnothing_0, \varnothing_2, \varnothing_3$; A_2 ל- $\varnothing_0, \varnothing_1, \varnothing_3$; A_3 ל- $\varnothing_0, \varnothing_1, \varnothing_2$

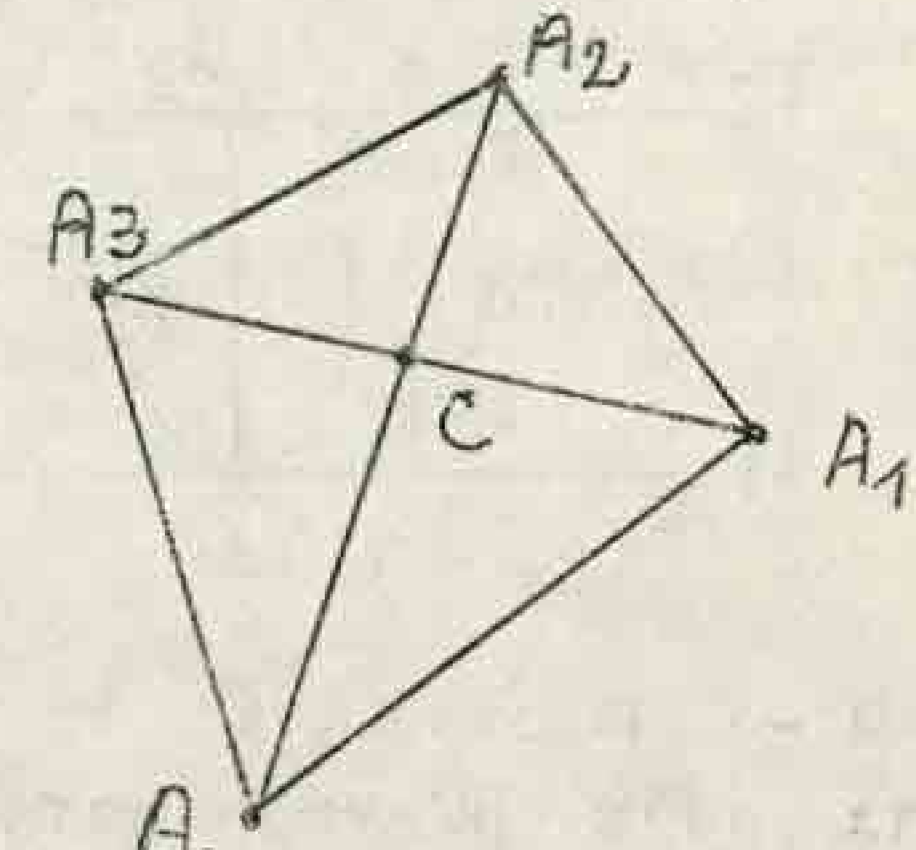
מאחר והנקודות $A_0\ A_1A_2$ שייכות ל- $\emptyset_3$, כל המשולש $A_0A_1A_2$ מוכל ב- $\emptyset_3$. בצורה דומה המשולש $A_0A_1A_3$ מוכל ב- $\emptyset_2$; המשולש $A_0A_2A_3$ - ב - $\emptyset_1$, והמשולש $A_1A_2A_3$ ב - $\emptyset_0$.

קיימות שתי אפשרויות:

(1) אחת מהנקודות A_0,A_1,A_2,A_3 נמצאת בפנים (או על צלע) המשולש הנוצר ע"י שלוש הנקודות האחרות. נניח, למשל, ש- A_0 נמצאת בתוך המשולש $A_1A_2A_3$. אזי A_0 שייכת לכל ארבע הצורות. הטענה הזאת מתקיימת גם במקרה שהמשולש הופך לקטע (לדוגמא: A_2 נמצאת על A_1A_3).



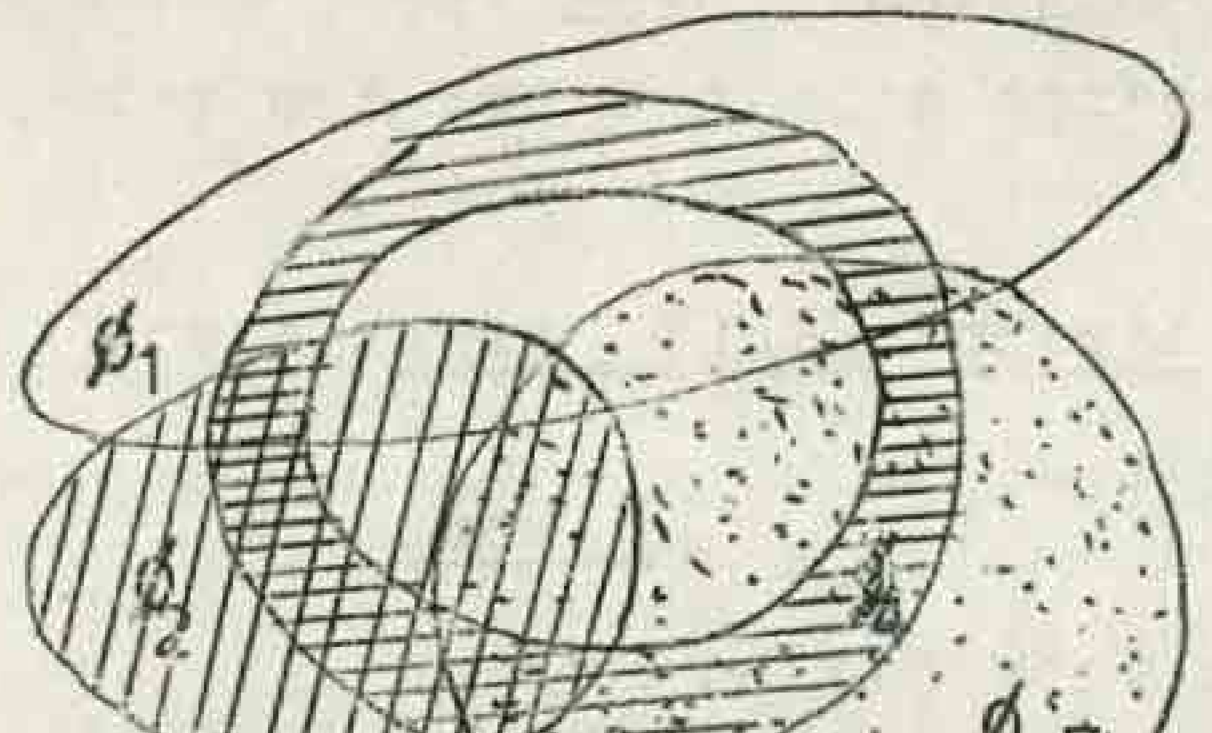
(a)



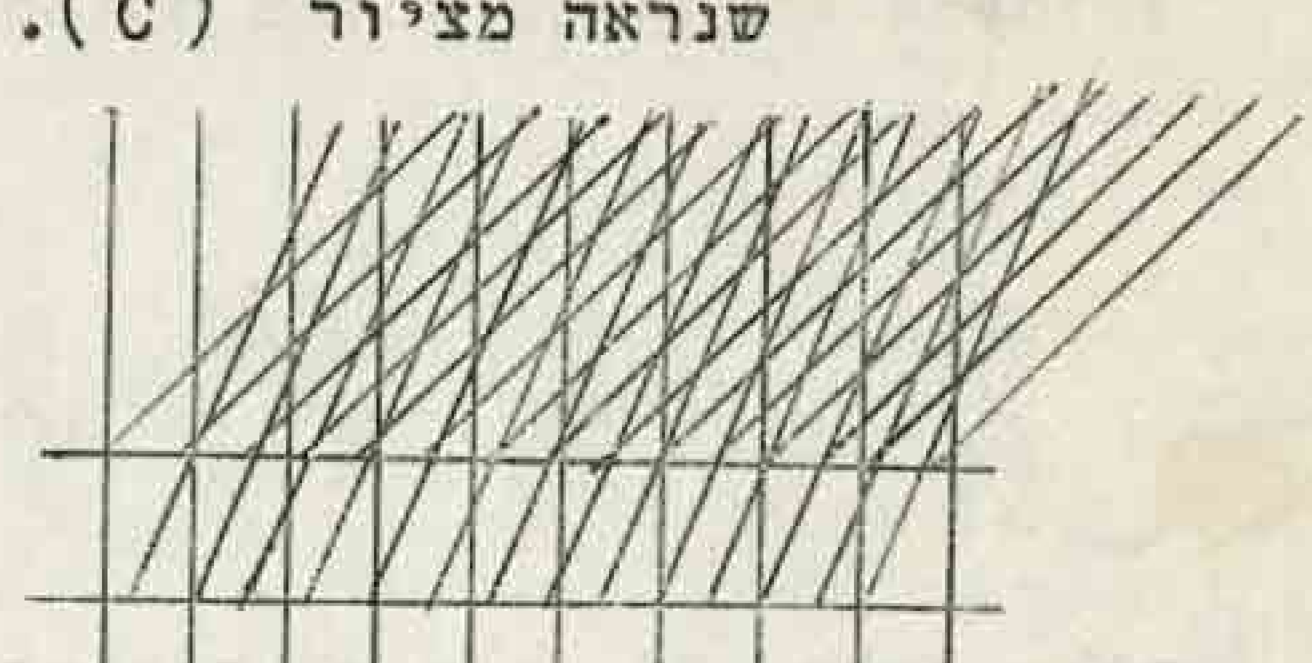
(b)

(2) אף אחת מהנקודות $A_0A_1A_2A_3$ אינה שייכת למשולש הנוצר ע"י שלוש הנקודות האחרות, כלומר $A_0A_1A_2A_3$ הן קודקודי מרובע קמור (ציור b). אזי נקודת החתוך האלכסונים של מרובע זה, שייכת לכל ארבעת המשולשים ולכן לכל ארבע הצורות $\emptyset_0,\emptyset_1,\emptyset_2,\emptyset_3$.

<u>הערה:</u> במקרה של צורות לא קמורות משפט זה אינו מתקיים כפי שנראה מציור (C).



(c)


(d)

<u>משפט 5 - (משפט HELLY)</u>

תהיינה נתונות n צורות קמורות במישור. אם לכל שלוש מהן יש נקודה משותפת, אזי לכל n הצורות יש נקודה משותפת.

<u>הוכחה</u> נשתמש באינדוקציה,

אם מספר הצורות הוא 4, אזי המשפט מתקיים לפי משפט 4.

נניח שהמשפט נכון לגבי n צורות, ונוכיח שהוא נכון גם לגבי $n+1$. תהיינה: $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}$ צורות קמורות, שלכל 3 מהן יש נקודה משותפת, נסמן את החתוך של ϕ_n ו- ϕ_{n+1} ב $\bar{\phi}_n$. אזי $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}, \bar{\phi}_n$ הן n צורות קמורות ($\bar{\phi}_n$ קמור לפי המשפט שבתחילת המאמר), ולכל שלוש מהן יש נקודה משותפת. זה נכון לגבי $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ לפי הנחת המשפט, ולגבי $\phi_k \phi_\ell \bar{\phi}_n$ יש נקודה משותפת לפי משפט 4, שמפעילים אותו לגבי הצורות $\phi_k, \phi_\ell, \phi_n, \phi_{n+1}$. (נקודה השייכת לארבע צורות אלה שייכת בודאי גם ל- $\phi_k, \phi_\ell, \bar{\phi}_n$).

קבלנו כי לכל שלוש מהצורות $\phi_1 \phi_2, \dots, \phi_{n-1}, \bar{\phi}_n$ יש נקודה משותפת, ומאחר שמספר צורות אלה הוא n, הרי לפי הנחת האינדוקציה יש נקודה משותפת לכל n צורות אלה, ולכן גם לכל הצורות $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}$. מש"ל.

<u>הערה:</u> נניח שעבור אין-סוף צורות קמורות במישור מתקיים שלכל 3 מהן יש נקודה משותפת, אזי ברור שלכל מספר סופי שלהן יש נקודה משותפת (לפי Helly). נשאלת השאלה, האם לכלן יחד יש נקודה משותפת.

נראה כי הדבר איננו מתקיים בדוגמא הבאה. (ציור d). נסתכל על כל חצאי המישורים המוגבלים מצד אחד ע"י כל הישרים האופקיים האפשריים. לכל שלושה חצאי מישורים כאלה יש נקודה משותפת (החתוך איננו ריק), אך לכל חצאי המישורים האלו יחד אין נקודה משותפת, כי החתוך "עולה תמיד מעלה", וכל נקודה במישור נמצאת מחוץ לחתוך.

לעומת זה משפט Helly מתקיים עבור אין-סוף צורות קמורות במקרה והן חסומות. נזכיר כעת שמושים אחדים למשפט Helly:

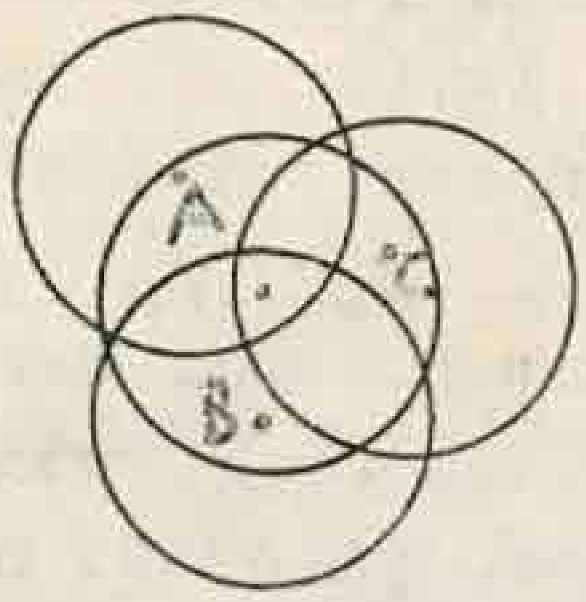
<u>משפט 6</u>

יהיו נתונות n נקודות במישור, כך שאפשר לחסום כל שלוש מהן בעגול שרדיוסו 1; אזי אפשר לחסום את כל הנקודות בעגול שרדיוסו 1.

<u>הוכחה</u>

אנו רוצים להראות שקיימת נקודה במישור (שהיא מרכז העגול המבוקש), כך שהמרחק בינה לבין כל אחת מהנקודות איננו גדול מ-1, כלומר שקיימת נקודה O השייכת לכל העגולים ברדיוס 1 שמרכזיהם הן הנקודות הנתונות.

לפי משפט Helly, מספיק להראות, שלכל שלושה מהעגולים הנ"ל יש נקודה משותפת, ואז תהיה גם נקודה משותפת לכולם.



לפי הנחות המשפט,
כל שלוש נקודות יכולות להחסם בעגול שרדיוסו 1. לכן המרכז X של העגול הזה היא נקודה השייכת לכל שלושת העגולים שמרכזיהם A,B,C ורדיוסיהם 1 (מאחר שהיא במרחק 1 לכל היותר מ-A,B,C). בזה הוכח המשפט.

<u>הערה:</u> המשפט נכון גם עבור אין-סוף נקודות במישור.

<u>משפט 7 - (משפט Jung)</u>

יהיו נתונים n נקודות במישור, כך, שהמרחק בין כל שתיים מהן הוא לכל היותר 1, אזי אפשר לחסום את הנקודות האלו בעגול שרדיוסו $1/\sqrt{3}$.

<u>הוכחה</u>

מספיק להראות, שכל שלוש מהנקודות הנתונות אפשר לחסום במעגל שרדיוסו $1/\sqrt{3}$. ינבע מזה לפי משפט 6, שכל הנקודות יכולות להחסם בעגול שרדיוסו $1/\sqrt{3}$.

אף צלע של המשולש ABC, הנוצר ע"י שלוש נקודות כנ"ל, אינה גדולה מ-1. אם משולש זה הוא ישר זוית או קהה זוית, אזי הוא נכנס כולו לתוך עגול שמרכזו אמצע הצלע הגדולה ורדיוסו חצי הצלע הזאת. רדיוס העגול הזה אינו עולה על $\frac{1}{2}$, כך שהוא קטן מ $1/\sqrt{3}$.

אבל גם אם המשולש ABC הוא חד זוית, הרדיוס של המעגל החוסם אותו אינו גדול מ-$1/\sqrt{3}$. ובאמת, לפחות אחת מהזויות של המשולש, למשל $\measuredangle A$ אינה קטנה מ-60°. לכן הצלע BC בתור מיתר של קשת שאינה קטנה מ-120°, אך קטנה מ- 180, אינה קטנה מ -
$2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$, כאשר r הוא רדיוס המעגל החוסם את $\triangle ABC$.
לכן $r\sqrt{3} \le \overline{BC}$ ומכיון ש $\overline{BC} \le 1$ הרי $r\sqrt{3} \le 1$ או $r \le 1/\sqrt{3}$. מש"ל.

<u>הערה:</u> אין אפשרות לשפר את תוצאת Jung, כי במקרה של משולש שוה צלעות שאורך צלעו 1, הרדיוס של המעגל החוסם הוא בדיוק $1/\sqrt{3}$.

משפט Jung מתקיים גם במקרה של אין-סוף נקודות ולכן נוכל לנסחו בצורה הבאה.

<u>משפט Jung :</u> כל צורה מישורית בעלת קוטר 1 יכולה להחסם במעגל שרדיוסו $1/\sqrt{3}$.

תקונים למאמר "איך להעביר מקביל ?" מחוברת מס. 5

תקונים לחלק הראשון של המאמר.

עמוד 19: שמות המחברים הם: דב ומשה ירדן (תקון דומה ב"דבר המערכת" בעמוד 1 ובתכן הענינים על העטיפה).
בציור צ"ל: B' (במקום: B,).

עמוד 20: בהערה לבניה א, צ"ל: יתרונות הבניה הזאת הם: 1) היא הסתכלותית... 2) היא מבוצעת במחוגה בלבד.
בציור לבניה ב, צ"ל: B' (במקום: B,).
בבניה ב, צ"ל: 1) סביב נקודה כלשהי O שאיננה על האנך ל a העובר דרך A.

עמוד 21: ציור המעגל צריך להיות בלי הקטר.

עמוד 22: בציור לבניה ה : האות C צריכה להיות מוזזה שמאלה ליד חתוך הקשת עם הישר a .

המשך המאמר בחוברת הבאה.

פתרון הבעיה מעמוד 1

M חייב להיות 1, O אפס או 1, הואיל ו- M כבר 1, לכן O=0. S הוא 8 או 9.

$N = E + 1$, לכן R-8 או 9 (S חייב להיות 9 ו- R 8, מדוע?).

נבדוק את האפשרויות לגבי D ו- E :

E	D	
7	5	E=7 גורר N=8 אחריו, לא יתכן.
7	6	
5	7	E=6 גורר N=7 אחריו, אבל
6	7	גם D=7, לא יתכן.

נשארת האפשרות היחידה: D=7 , E=5 לכן N=6, Y=2:

$$\begin{array}{r} 9567 \\ \underline{1085} \\ 10652 \end{array}$$

הוא הפתרון.

התחרות מתמדת להתרת בעירת

תוצאות המחזור השלישי של התחרות המתמדת להתרת הבעיות 121 - 180 הן:

1. פרידלנד שמואל, יב' ריאלי, חיפה 182 נ.
2. סתוי יונתן, יא' ג הרצליה, ת"א 178 נ.
3. זלטקין מיכאל, יב' ריאלי, חיפה $174\frac{1}{2}$ נ.
4. איזנמן מיכאל, יב' תיכון ירושלים 128 נ.
5. פרויד בועז, יב' ביה"ס המקצועי, חיפה 126 נ.

חמשת המצטיינים בין תלמידי הכתות ט-י

1. בוסל יצחק, י' ריאלי, חיפה 109 נ.
2. ירושלמי זלמן, י' ריאלי, חיפה $93\frac{1}{2}$ נ.
3. עמיר אליהו, י' תיכון, בני-ברק 70 נ.
4. סורין אנדרי, ט' ביה"ס המקצועי, חיפה $38\frac{1}{2}$ נ.
5. רייך שמואל, י' ריאלי, חיפה 35 נ.

השניים הראשונים בכל קבוצה יקבלו פרסי ספרים שישלחו להם לפי כתובותיהם הפרטיות.

שאר חמשת המצטיינים יקבלו בתור פרס חתימה שנתית ל"גליונות מתמטיקה".

בעיות חדשות

הבעיות המצויינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' ו-י' בלבד (אין פרוש הדבר שהן קלות). את הפתרונות יש להגיש למערכת עד 1.8.64.

ת.196* (2 נקודות) הספרה האחרונה של מספר בעל שש ספרות היא 1. מעבירים את ה-1 מסוף המספר להתחלתו. מתקבל ע"י כך מספר חדש שהוא שליש מהמספר המקורי. מהו המספר ?

ת.197* (4 נקודות) מספר בעל 8 ספרות הוא מספר רבועי, ארבע הספרות הראשונות וארבע הספרות האחרונות יוצרות שני מספרים עוקבים, כ"א בעל 4 ספרות. מהו המספר?

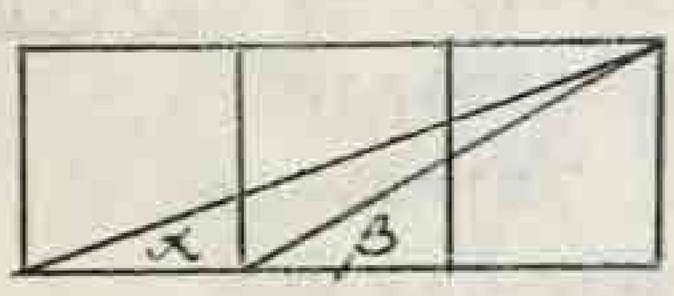
ת.198* (3 נקודות) יש להכין שלוש ערוגות, כ"א ל 9 פרחים. בערוגה הראשונה ימצאו על כל אחד מ-8 ישרים 3 פרחים, בערוגה השניה על כ"א מ-9 ישרים 3 פרחים, ובערוגה השלישית על כ"א מ-10 ישרים 3 פרחים, כיצד שתלו את הפרחים על שלוש הערוגות.

ת.199 (4 נקודות) בנה משולש ע"פ תיכון, גובה וחוצה זוית, כולם יוצאים מאותו הקדקד (הוצע ע"י אריאל איש-שלום וקלמן הרץ).

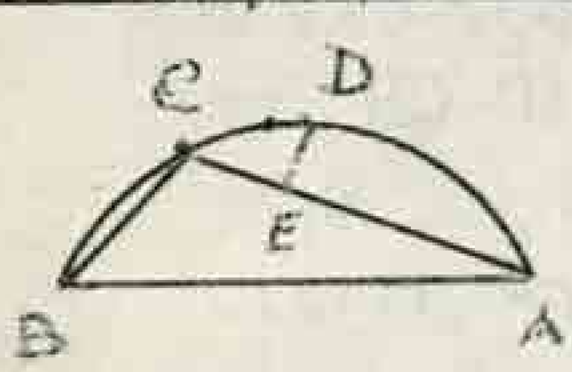
ת.200 (4 נקודות) בנה מרובע חסום במעגל ע"פ 4 הצלעות.

ת.201* (3 נקודות) נתונים מעגל עם קוטר ונקודה. הורד אנך מן הנקודה לקוטר בעזרת סרגל בלבד. הבחן בין המקרים השונים כשהנקודה הנתונה מחוץ למעגל, על המעגל ובפנים המעגל. (הוצע ע"י צבי קדרון).

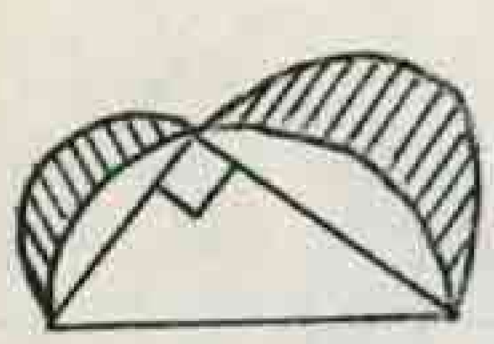
ת.202 (4 נקודות) נתון מלבן המורכב משלושה רבועים (ראה שרטוט). הוכח ש $\alpha+\beta = 45^\circ$ (בעזרת טריגונומטריה - רק 2 נקודות.



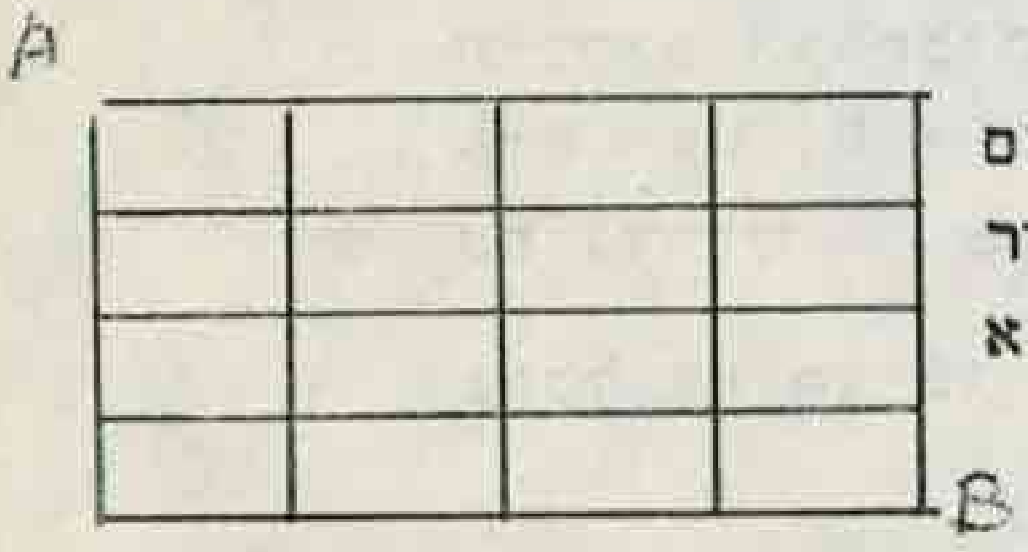
ת.203 (3 נקודות) נתונה קשת מעגל AB ונקודה C עליה (ראה שרטוט). מאמצע הקשת D מורידים אנך DE על AC. הוכח כי $\overline{AE} = \overline{EC} + \overline{CB}$.



ת.204* (3 נקודות) במשולש ישר זוית בנויים חצאי מעגלים על הצלעות כקטרים (ראה שרטוט). הוכח שסכום שטחי שני הסהרים הנוצרים שוה לשטח המשולש (סהרי היפוקריט).



ת.205 (4 נקודות) הקוים בשרטוט המצורף הם רשת רחובות. בכמה דרכים שונות אפשר להגיע מ A ל B, בתנאי שכל דרך היא הקצרה ביותר.



ת.206 (5 נקודות) בכמה אופנים שונים ניתן לבחור r מספרים מתוך n מספרים טבעיים עוקבים, כך שבין המספרים שנבחרו לא יהיו מספרים עוקבים? (הוצע ע"י עקיבא סקידל).

ת.207* (5 נקודות) נתונים 4 ישרים במישור אחד, אין שני מקבילים ביניהם ואין שלושה מהם נחתכים בנקודה אחת. על כל ישר נעה נקודה במהירות קצובה. הנקודה הראשונה נפגשת עם השניה, עם השלישית ועם הרביעית, הנקודה השניה נפגשת עם השלישית ועם הרביעית. הוכח שגם הנקודה השלישית תפגוש את הרביעית.
(לפגוש, פרוש הדבר: לעבור באותו הזמן דרך נקודת החתוך של הישרים).

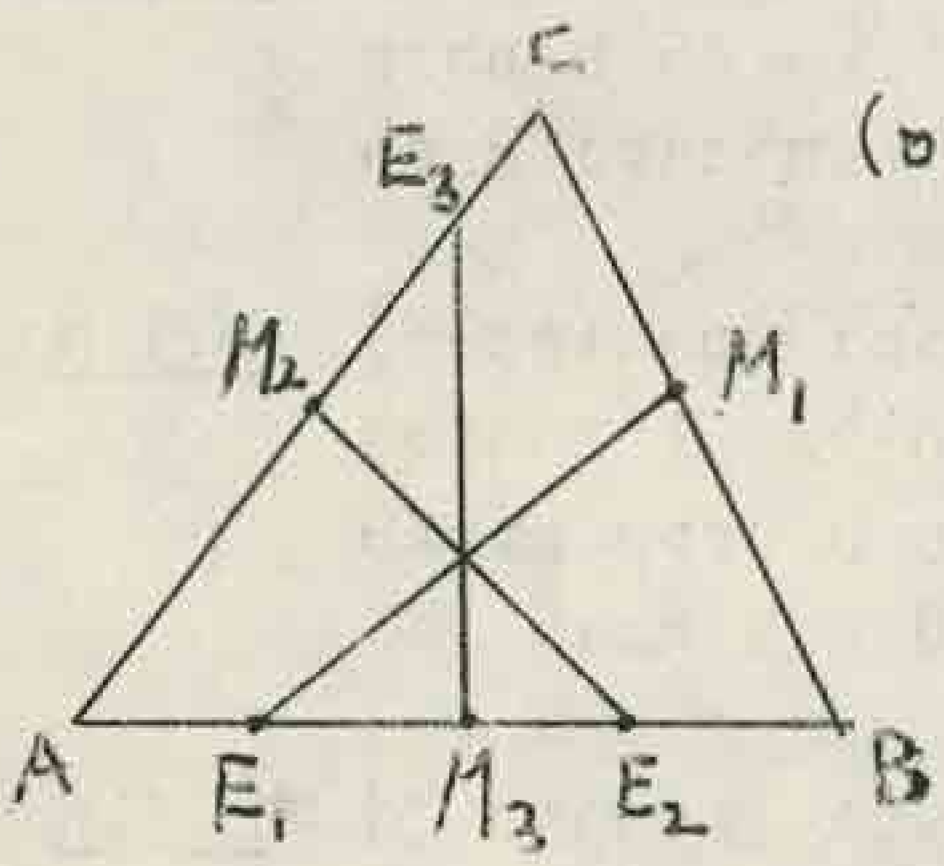
ת.208 (5 נקודות) קיימים פי שנים דרכים מ A ל B (לרבות אלה דרך C) מאשר דרכים מ A ל C (לרבות אלה דרך B). קיימים פי שניים דרכים מ B ל C מאשר מ A ל B. כמה דרכים ישירות קיימות בין כל שתי נקודות.

ת.209 (4 נקודות) התר את מערכת המשואות:

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad xy = z^2$$

כאשר a ו b נתונים. מהם התנאים לגבי a ו b בכדי ש- x,y, z יהיו כולם חיובים ושונים זה מזה ?

ת.210 (5 נקודות) במשולש ABC (ראה שרטוט) הנקודות M_1, M_2, M_3 הן אמצעי הצלעות, E_1 חוצה את סכום הצלעות CA+AB, E_2 חוצה את AB+BC ו E_3 את AC+CB. הוכח ששלושת הקוים E_1M_1, E_2M_2 ו E_3M_3 נחתכים בנקודה אחת.



פתרון הבעיות ת. 166 - 180

ת.166 נשים לב שבסידרה $u_1 = a + (-1)^{n+1}\, b$ האברים העוקבים הם:

$$u_1 = a + b,\quad u_2 = a - b,\quad u_3 = a + b,\quad u_4 = a-b, \dots$$

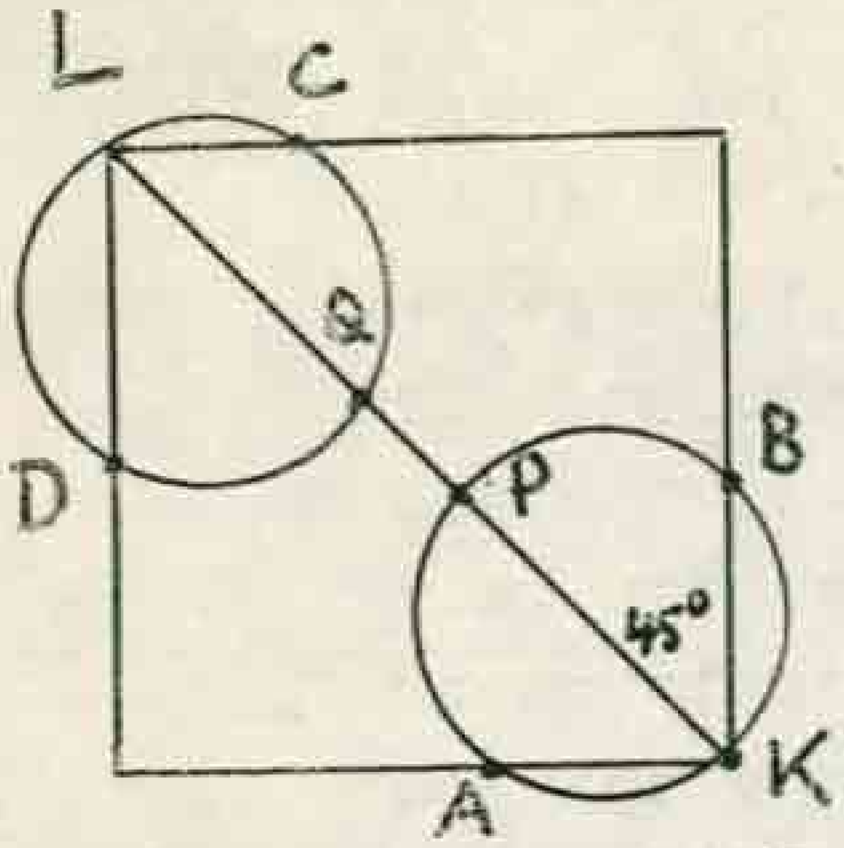
אם נדרוש $a+b = 3$ ו- $a-b = 2$ ז.א. $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$

נקבל את האיבר הכללי של הסידרה שלנו: $u_n = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\,\frac{5}{2}$

ת.167 כאן נשתמש בטריק אחר. נשים לב ש-

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{5\pi}{4} = \sin\frac{7\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha$$

לכן נוכל לרשום: $u_n = \sqrt{2}\,\sin\frac{\pi}{4}(2n-1)$



ת.168 קדקדי הרבוע K ו L נמצאים על המעגלים אשר קוטריהם $\overline{AB}$ ו $\overline{CD}$ (ראה שרטוט). הנקודות P ו Q חוצות את הקשתות $\overset{\frown}{AB}$ ו $\overset{\frown}{CD}$ (זויות הקפיות שוות 45°). נקודות החתוך של PQ עם המעגלים קובעים את קדקדי הרבוע.

ת.169 בסדרה זו מוכרחים להיות זוגות אברים סמוכים ששניהם אינם מספרים ראשוניים. ובאמת אפשר לרשום מספר כלשהו של מספרים שלמים עוקבים שאינם ראשוניים. לנו מספיקים ששה (מדוע?). למשל המספרים: $7!+7$, $7!+6$, $7!+5$, $7!+4$, $7!+3$, $7!+2$ הם ששה מספרים עוקבים שכולם אינם ראשוניים. בין אלה יש בהכרח 2 מספרים סמוכים מתוך הסדרה.

ת.170

$$\begin{matrix}\triangle ABG \sim \triangle GCE \\ \triangle ABF \sim \triangle FDE\end{matrix} \Rightarrow \frac{GE}{BG} = \frac{CD + DE}{AB} = 1 + \frac{DE}{AB} = 1 + \frac{EF}{BF}$$

מכאן:

$$\frac{BE - BG}{BG} = \frac{BE}{BG} - 1 = \frac{BE}{BF}$$

ז.א.

$$BG = \frac{BE \cdot BF}{BE + BF}$$

ת.171 נסמן $AB=a$, אזי $BF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, כעת:

$$\triangle ABE \sim \triangle BCF \Rightarrow \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{BE}{\frac{a}{2}} \Rightarrow BE = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

נוריד ניצב EG מ- E על AD.

$$\frac{DG}{a} = \frac{EF}{BF} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}, \quad DG = \frac{3}{5}a,$$

$$EG = \frac{a}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{a}{2} = \frac{4}{5}a \Rightarrow DE = \sqrt{\frac{9}{25}a^2 + \frac{16}{25}a^2} = a$$

ת.172 דרושים ששה מנעולים. כל מנהל מקבל שלושה מפתחות לפי הלוח הבא:

		המפתחות					
מנהלים	A	1	2	3			
	B	1			4	5	
	C		2			5	6
	D			3	4		6

אפשר להמחיש את הבעיה ע"י המקצועות והפאון של הארבעון. המנהלים מתוארים ע"י הפאות, והמקצועות הגובלים לכל פאה מתארים את המפתחות ברשות המנהל המתאים. כל שלוש פאות מכילות את כל ששת המקצועות. כל שתי פאות אינן מכילות את כל המקצועות.

ת.173 מספר מתחלק ב-11 אם ההפרש בין סכום הספרות שלו במקומות האיזוגיים החל מימין, לבין סכום הספרות במקומות הזוגיים מתחלק ב-11. אנו נתענין בהפרש לא שלילי בלבד (את המקרים עם הפרשים שליליים נקבל לפי סימטריה). ההפרש המכסימלי במקרה שלנו הוא $16=(1+2+3+4)-(5+6+7+8)$. ז.א. עבורנו באים בחשבון ההפרשים 0 ו- 11 בלבד. אבל את ההפרש 11 אי אפשר לקבל. ובאמת, החלפת שני מספרים כלשהם בין שתי הרביעיות מקטינה את ההפרש במספר זוגי, כך שאין אפשרות להקטינו ב- $5=11-16$. באותו אופן אי אפשר גם לקבל את ההפרש 11-. כדי לקבל את ההפרש 0 דרוש שכל אחד מהסכומים יהיה 18.

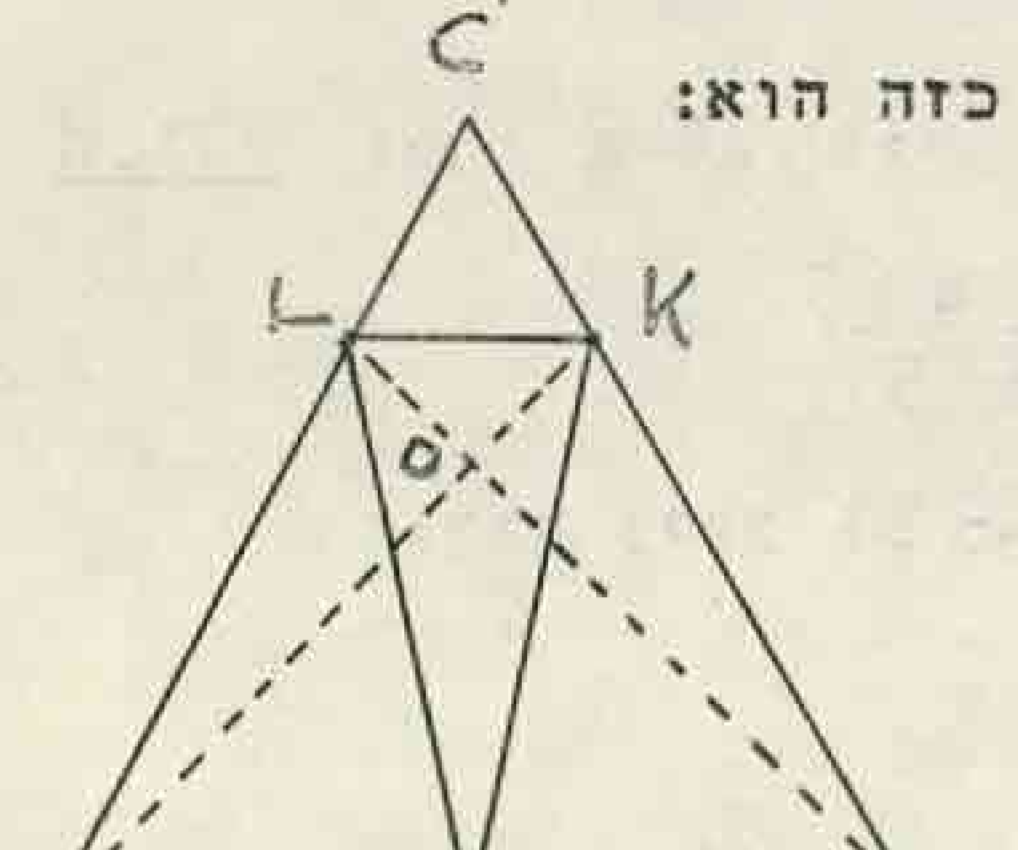
להלן 4 האפשרויות היחידות לבחור 4 מספרים מתוך $1,2,\ldots,8$ כך שסכומם יהיה 18 ובין המספרים יופיע 8:

8721 ,8631 ,8541 ,8532

כעת, המספר הכולל של מספרים שאפשר ליצור בדרך המוסברת בשאלה הוא !8. כדי שמספר יתחלק ב-11 דרוש שאחת מהרביעיות הנ"ל תופיע במקומות הזוגיים או במקומות האיזוגיים.

נניח שרביעיה מסוימת, נגיד 8721 מופיעה. במקומות הזוגיים מימין. מספר מספרים כאלה הוא !4 . !4 . מספר המספרים בהם היא מופיעה במקומות האיזוגיים הוא אותו הדבר. יש לנו 4 רביעיות, ז.א. המספר הכולל של המספרים המתחלקים ב-11 הוא $4.2.(4!)^2$ והסכוי שנקבל במספר כזה הוא:

$$\frac{8(4!)^2}{8!}=\frac{4.3.2}{7.6.5}=\frac{4}{35}$$

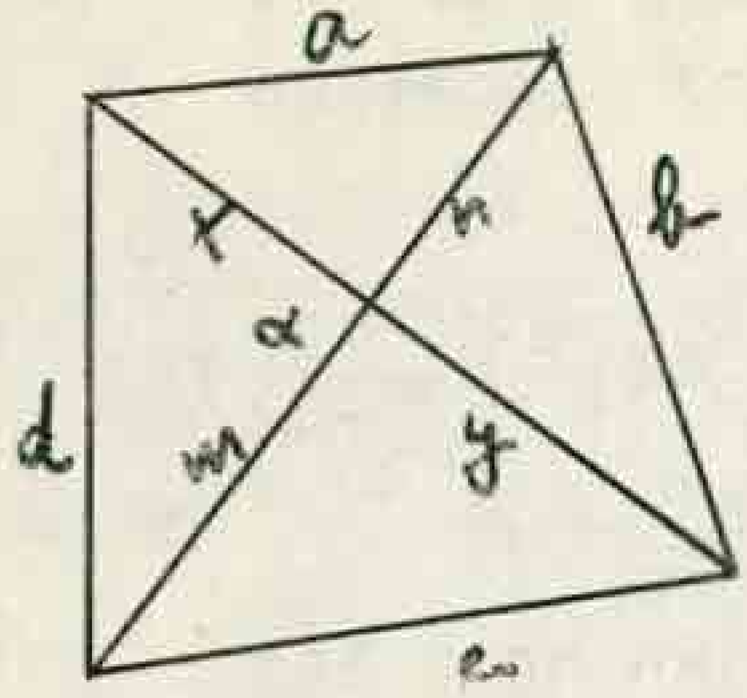


ת.174 הבניה מבוססת על כך שהגבהים AK , BL ו- CM משמשים כחוצי זויות במשולש KLM .

(בהוכחה משתמשים בעובדה שכל אחד מהמרובעים BMOK, ALON CKOL אפשר לחסום במעגל).

את הבניה עצמה מבצעים כך: בונים את המשולש KLM, בונים בו חוצי-זויות ודרך הנקודות הנתונות L, K ו- M מעבירים ישרים ניצבים על חוצי זויות אלה. צלעות המשולש מונחות על ישרים אלה וקדקדיו הם נקודות חיתוכם.

ת.175



$$a^2 = n^2 + x^2 + 2nx\cos\alpha$$
$$b^2 = y^2 + n^2 - 2yn\cos\alpha$$
$$c^2 = m^2 + y^2 + 2my\cos\alpha$$
$$d^2 = m^2 + x^2 - 2mx\cos\alpha$$

$$d^2 - c^2 + b^2 - a^2 = -2\cos\alpha(mx+my+ny+nx)$$

$$c^2 - d^2 + a^2 - b2 = 2\cos\alpha(m+n)(x+y)$$

שטח המרובע הוא: $S = \frac{1}{2}\sin\alpha\ (x+y)(m+n)$

$$\left[\frac{c^2-d^2+a^2-b^2}{2}\right]^2 + 4S^2 = (x+y)^2(m+n)^2\underbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1}$$

המחובר הראשון באגף השמאלי נתון וקבוע, לכן מכפלת האלכסונים תהיה גדולה ביותר, אם השטח גדול ביותר, כלומר במרובע חסום במעגל.

ת.176 נשתמש באינדוקציה. עבור $n = 1$ מקבלים:

$$\frac{b^2+1}{b} = b + \frac{1}{b} = \frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2} + \frac{2}{c + \ c^2-4} = \frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2} +$$

$$+\frac{2(c-\sqrt{c^2-4})}{c^2-c^2+4} = \frac{1}{2}(c+\sqrt{c^2-4}+c-\sqrt{c^2-4}) = c$$

ולפי הנתון c מספר שלם.

כעת נניח שעבור כל מספר טבעי קטן או שוה ל- n העובדה מתקיימת. נרשום:

$$\frac{b^{(2n+2)}+1}{b^{n+1}} = b^{n+1} + \frac{1}{b^{n+1}} = (b^n + \frac{1}{b^n})(b+\frac{1}{b})-(b^{n-1}+\frac{1}{b^{n-1}})$$

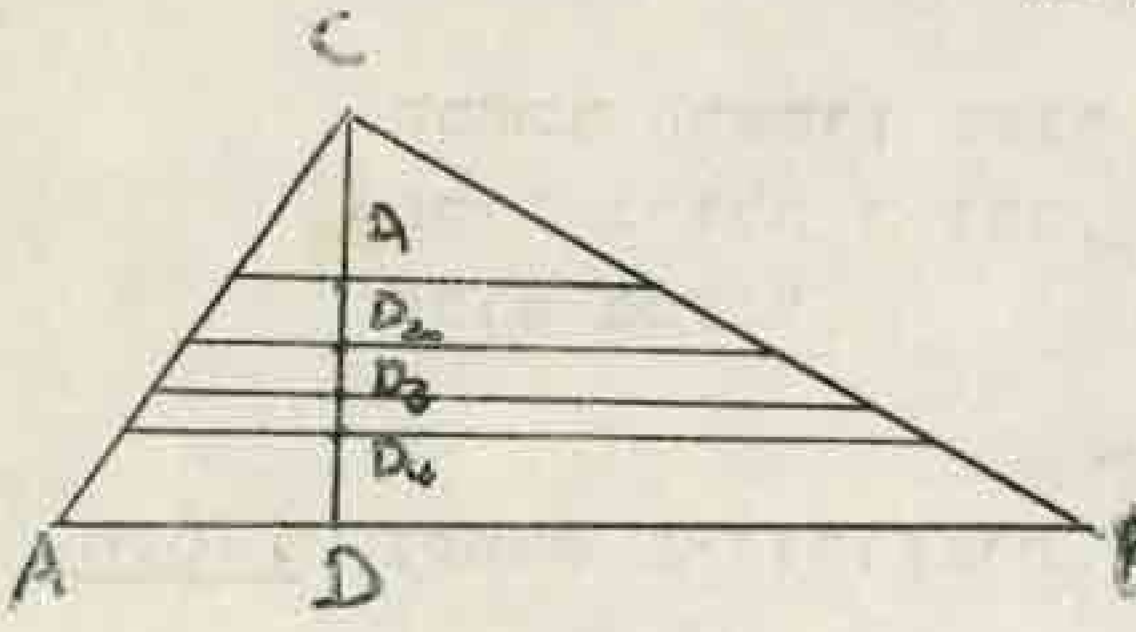
לפי הנחת האנדוקציה:

$$b^{n-1} + \frac{1}{b^{n-1}} \quad \text{ו-} \quad b^n + \frac{1}{b^n}$$

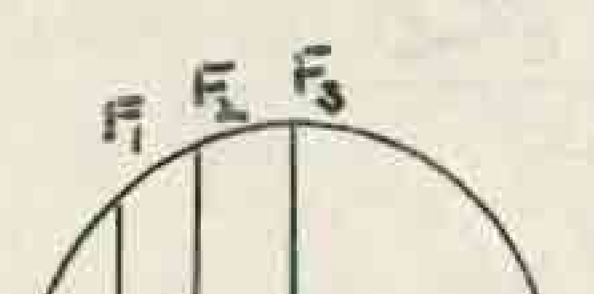
הם מספרים שלמים. $b+\frac{1}{b}$ הוא שלם כפי שראינו כבר קודם.

לכן $\frac{b^{(2n+2)+1}}{b^{n+1}}$ אף הוא מספר שלם והעובדה הנדונה נכונה עבור כל n .

<u>ת.177</u> לפי המשפט הידוע על יחס השטחים של משולשים דומים מקבלים שאת גובה המשולש (אל הצלע הנדונה ראה ציור) יש לחלק כך ש-



$$CD_1 : CD_2 : CD_3 : \dots : CD_{n-1} : CD = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}:\dots:\sqrt{n-1}:\sqrt{n}$$



אם נבנה על CD כעל קוטר חצי מעגל, נחלק את CD ל- n חלקים שוים ונעלה את הניצבים $E_1, E_2, E_3, \dots$

הרי: $CF_k^2 = CE_k \cdot CD = \frac{k}{n}CD^2 \quad (k = 1,2,\dots,n-1)$

כלומר: $CF_k : CD = \sqrt{k} : \sqrt{n}$

$$CF_1:CF_2:CF_3:\dots:CF_{n-1}:CD = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}:\dots:\sqrt{n-1} = \sqrt{n}$$

ו - $CF_k = CD_k$ עבור כל $k = 1,2,\dots,n-1$.

ת.178 הבסיס של המערכת בודאי גדול מ-3 (ב-13 מופיעה ספרה 3) וקטן מ-10 (בבסיס 10: $13 \times 13 = 169 < 202$). כעת, $3 \times 3 = 9$ (בבסיס 10) ו- $7 + 2 = 9$, לכן הבסיס הוא 7. ובאמת 13 בבסיס 7 הם $7 + 3 = 10$ בבסיס 10, 202 בבסיס 7 הם $2 \times 49 + 2 = 100$ בבסיס 10 ו- $10 \times 10 = 100$.

ת.179 הבסיס הוא לפחות 6. (מופיעה ספרה 5).
בכל בסיס כזה

$$\begin{array}{r} 21 \times 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$$

לכן $21^2 = 441$.

המספר הבא אחרי 21 הוא 22 ו-

$$\begin{array}{r} 22 \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 524 \end{array}$$

מכאן ברור שהבסיס הוא 6.

ת.180 נדרוש $a-b=p$, $a+b=q$, ז.א. $a = \frac{q+p}{2}$, $b = \frac{q-p}{2}$. אבל מהשויון $q = p^n$ נובע ש p ו- q הם בעלי אותה הזוגיות, לכן a ו- b הם מספרים טבעיים כדרוש.

שים לב: הפתרון מתאים למקרה $n>1$. עבור $n=1$ מקבלים $p=q$ ואז $b=0$ שאינו מספר טבעי. אבל עבור $n=1$ אין ברירה אחרת, כי $a-b = a+b \Rightarrow b = 0$.

הואיל וחל שבוש בפתרון של ת. 163 בחוברת הקודמת נחזור עוד פעם על הפתרון:

ת.163 יהי k המספר הטבעי הגדול ביותר אשר עבורו $3^k \leq 2n+1$ ו- p המכפלה של כל המספרים הטבעיים הזרים ל - 6 ואשר קטנים או שוים ל-2n+1. הסכום $3^{k-1}\, pS$ $\left(S=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)$ מכיל מחוברים אשר כולם מספרים שלמים, פרט לאיבר $3^{k-1}p\frac{1}{3^k}$.
לכן, לו S היה שלם, המכפלה $3^{k-1}\, pS$ היתה גם שלם, אבל הסכום אינו מספר שלם. הגענו לידי סתירה.

רשימת פותרי השאלות מס. 166 - 180

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר.

1. אלניה עמוס, יב תיכון ת"א: 180,178,175-174,171-169,166 (26 נ.)
2. אלכסנדר גד : 178,171 (5 נ.)
3. אגר דוד, יא עירוני א', ת"א: 174,173*,171-169,167-166, 178-177 (28 נ.)
4. אצרף מרדכי, יא תיכון קרית מוצקין: 177,174,171 (11 נ.)
5. אש שלום אריאל, י עירוני ה' ת"א: 180,178,172-171,166 (15 נ.)
6. אפלויג אבימלך, יב תיכון ה' ת"א: 174,172-170 ,167-166, 180 ,178-177 (28 נ.)
7. בוסל יצחק, יא ראלי חיפה: 180,178,177*,169-172,167-166 (26 נ.)
8. ברקוביץ מיכאל, יב ראלי חיפה: 177,175-173,171-170,168-166, 180 (37 נ.)
9. ברוך מנחם, י, ג' הרצליה ת"א: 171 (3 נ.)
10. בנטל בנימין, י ראלי, חיפה: 180,178,174,172-171 (16 נ.)
11. בר יהושוע, תיכון מקצועי חיפה: 177,173*,172-169,167-166 (26 נ.)
12. ברשטיין דב, יב חולון: 180,178,173,169,167-166 (13 נ.)
13. גולדשטיין מאיר, צ.ה.ל.: 177*,174-175,173*,172-171,169,166, 180,178 (33 נ.)
14. גלזר אלדד, יא עירוני ה', ת"א: 178-177,174,171 (13 נ.)
15. גרינבאום ברוך, י ראלי חיפה: 171 (3 נ.)
16. וינטראוב אורה, תיכון קרית מוצקין: 178-177,174,171-169, 180, (22 נ.)
17. זלטקין מיכאל, יב ראלי חיפה: 172*,171-169,168*,167-166, 180,178-177,173-175 (44 נ.)
18. זהבי דן, יא ראלי חיפה: 180 ,178-177,173-170,167-166 (29 נ.)
19. טליל אורי, יב ראלי חיפה: 166 (3 נ.)
20. יהודאי עמירם, תיכון א' ת"א: 178-177,174-173,171-170,166, 180 (26 נ.)
21. ירושלמי זלמן, יב ראלי חיפה: 178-177,175,171-169,167-166, 180 (29 נ.)
22. לבוביץ זאב, יב קוגל, חולון: 175*,174,173*,172-170,167-166, 180 (27 נ.)
23. לוי מלכי אלי, יב עירונית ה' ת"א: 178,177*,171-170,167, 180 (16 נ.)
24. מגלס יוסי, יב ראלי חיפה: 180,177,171-170,167-166 (18 נ.)
25. סרגו חיים, יא תיכון ז' ת"א: 177*,174,171-170 (12 נ.)
26. סלע מנדל, יב אחד העם, פ"ת: 177,175-169,167-166 (38 נ.)
27. ספרוני ישראל, יב עירונית ב': 175-173,171-169,168*,167-166, 180,178,177 (42 נ.)

28. סקידל עקיבא : 173 (3 נ.)
29. סורין אנדרי, י בי"ס מקצועי חיפה: *180,171-170,168 (11 נ.)
30. סתוי יונתן, יב הרצליה ת"א: 166-167,*168,169-175,177, 178,180 (45 נ.)
31. ענבל צבי, ראלי חיפה : 166-174,177-178,180 (42 נ.)
32. פנקלשטיין דן, י ראלי חיפה: 171,*172,174,178,180 (16 נ.)
33. פריד בועז, א טכניון : 166-167,169-171,173-174,177-178, 180 (32 נ.)
34. פרידלנד שמואל, יב ראלי חיפה: 166-167,*168,169-174, 177-178,180 (40 נ.)
35. קוק איתן, י ראלי חיפה: 171-172,174,178,180 (16 נ.)
36. קרויטורו שאול, יא עירוני ד' ת"א: 170-171,174,177 (13 נ.)
37. קפלנסקי ישראל, יב עירוני ה' ת"א: 166,170,*171,178 (9 נ.)
38. רייך שמעון, י ראלי חיפה: 166,168-174,178,180 (35 נ.)
39. רסלר יעקב, יב אחד העם פ"ת: 166-167,169,171-173,177,180 (28נ)
40. שור מיכאל, יב אוהל שם ר"ג: 166-167,170-171,174-175, *177,180 (26 נ.)
41. תוחמן יצחק, יב גמנסיה עירונית ירושלים: 166-167,*168, 169-171,174,177,180 (30 נ.)

רשימה נוספת על פותרי התרגילים מס. 151 - 165

1. אופיר דן, יב עירונית י', ת"א: 151-152,*153,154,156-157, 159,162,*164,*165 (31 נ.)
2. הרץ קלמן, יא עירונית ב', ת"א: 151,*152,153-154,156-157, *158,159,161-163,*164,*165 (37 נ.)
3. ירושלמי זלמן, י ראלי חיפה: 151,*152,153,*154,156,161-163, *165 (21 נ.)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ' ז. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בבנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.