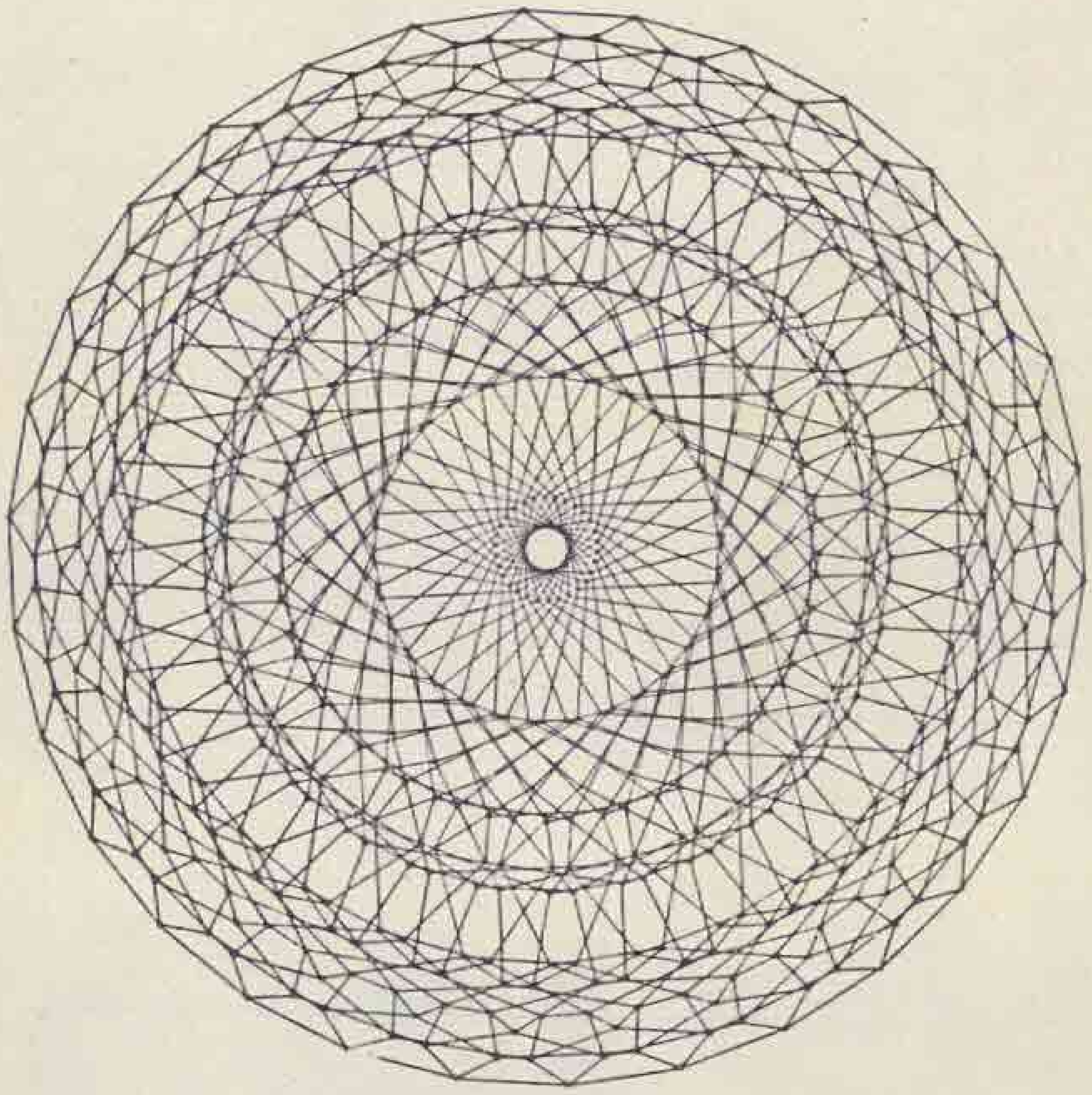
# גליונות
# מתמטיקה
## לנוער הלומד ולחובבים



כרך 2 רחובות, כסלו תשכ"ה, נובמבר 1964 מס' 7

יוצא לאור בחסות
ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. גילים

## דבר המערכת

הגליון הזה הוא הראשון מאז העברת המערכת ואנחנו רוצים לנצל את ההזדמנות הזאת להביע את תודתנו ואת הוקרתנו לעורך הקודם, אשר הצליח על ידי צרוף נדיר של כשרון ומסירות, להעלות את הגליונות האלה לרמתם הנוכחית. אנו תקוה כי נצליח לשמור על רמה זו. הצלחתנו במשימה הקשה הזאת תהיה תלויה במידה גדולה בהשתתפות צבור הקוראים, תלמידים ואחרים.

קשים טכניים הקשורים בהעברת העריכה מתל-אביב לרחובות גרמו לעכוב מצער בהוצאת הגליון. אנו מבקשים את סליחת הקוראים ונשתדל לכפר על האיחור הזה על-ידי הוצאת הגליון הבא אחרי תקופה קצרה יחסית.

אנחנו פונים שוב לקוראינו, כי יושיטו לנו אותה מידה של שתוף פעולה, שאיפשרה לעורך הקודם את הצלחתו המזהירה. שתוף פעולה יכולה להתבטא במאמרים, בהצעת שאלות, בפתרון שאלות, וכו׳. נשתדל לכלול בכל גליון מאמרים, ארוכים או קצרים, כתובים ע"י תלמידי בתי-ספר, מאחר ואנחנו רואים כתפקיד מרכזי העידוד שנוכל לתת לתלמידים שיתענינו במתמטיקה לשמה, ואפילו במתמטיקה שהיא מחוץ למסגרת הרגילה של לימודיהם.

## ב ע י ה

איש יצא במכונית בשעה עשר בבקר ונסע במהירות קבועה מתל-אביב עד חיפה. למחרת יצא מחיפה בשעה עשר וחזר באותה דרך לתל-אביב, גם הפעם במהירות קבועה אבל לאו דוקא באותה מהירות כמו אתמול.

האם מוכרחה להיות נקודה אשר בה עבר בשני הימים באותה שעה?

על איזה מתוך תנאי הבעיה אפשר לוותר בלי לפגוע בתשובה?

# תכנון ליניארי - חלק ראשון

יוסף גילים וחנה ליפסון

בניהול של חברה מודרנית מורכבת מתעורר לא פעם הצורך להכריע בין הרבה פתרונות שונים של אותה הבעיה, כך שהפתרון יהיה היעיל ביותר. שיטת התכנון הליניארי, שמקורה בעבודה תיאורטית אשר נעשתה לפני כ-40 שנה מראה דרך מתמטית לפתרון סוג חשוב של בעיות כאלה.

תחילה נראה מספר בעיות שניתן לפתרן בעזרת תכנון ליניארי. המספרים המופיעים בדוגמאות אלו אינם בהכרח מציאותיים: הם נבחרו כדי להדגים ולהבליט את שיטת הפתרון.

<u>בעיה א</u> לקבוץ שטח שברצונו לנצל למספוא. הוא מחליט לגדל תירס וסלק מספוא. לכל דונם תירס דרושים 20 ק"ג דשנים, 70 מ"ק מים ושלשה ימי עבודה. לסלק-מספוא דרושים 18 ק"ג דשנים, 50 מ"ק מים ו-4 ימי עבודה לדונם.

לרשות הקבוץ עומדים למספוא לא יותר מ-39 טון דשנים, לא יותר מ-116,500 מ"ק מים ולא יותר מ-6,000 ימי עבודה. הרווח המצופה מדונם אחד של תירס הוא -.35 ל"י, והרווח המצופה מדונם אחד של סלק-מספוא הוא -.25 ל"י. כיצד יש לחלק את האדמה בין שני הגידולים, כדי שהרווח המצופה יהיה גדול ככל האפשר?

<u>בעיה ב</u> משק רוצה להאכיל את העופות הרבים שברשותו בצורה חסכונית ככל האפשר. לתרנגולות דרושים, בכל 100 גר' של מזון, לפחות 210 קלוריות, לפחות 17 גר' חלבון ולפחות $1\frac{1}{2}$ גר' זרחן. אם הם מקבלים יותר מכמות מינימלית זאת לא נגרם להם נזק, אך ההוצאות עלולות לגדול. ניתן להשיג שלשה מיני מזון: המין הראשון קמח דגים, מחירו 0.34 ל"י לק"ג וכל ק"ג מכיל 1800 קלוריות, 600 גר' חלבון ו-30 גר' זרחן; המין השני כוספת סויה, מחירה 0.20 ל"י לק"ג, וכל ק"ג מכיל 1,200 קלוריות, 400 גר' חלבון ו-20 גר' זרחן; המין השלישי, תירס, מחירו 0.18 ל"י הק"ג, וכל ק"ג מכיל 2,400 קלוריות, 90 גר' חלבון ו-10 גר' זרחן.

איזו כמות מכל מין כדאי לתת לעופות, כדי שיקבלו לפחות את המזון המינימלי הדרוש להם, וזה במחיר הקטן ביותר?

<u>בעיה ג</u> לארץ מסויימת הנמצאת במצב מלחמה יש ארבעה בסיסי אויר; $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. בשלב מסויים של המלחמה הוחלט להטריד שלש מטרות; $M_1$, $M_2$, $M_3$ . משקל הפצצות שאוירון יכול להעביר מבסיס מסויים לאחת המטרות תלוי הן בבסיס והן במטרה. אם נסמן ב- $t_{ik}$ את מספר הטונות שיכול אוירון להעביר מבסיס $B_i$ למטרה $M_k$, אפשר לתת את המספרים $t_{ik}$ בטבלה הבאה:

| k \ i | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 1 |

אי אפשר לצאת יותר מ-50 פעם ביום מכל אחד מהבסיסים ומאידך דורש המטכ"ל להפציץ כל אחת מהמטרות לפחות 60 פעם ביום.
כיצד יש לחלק בין הבסיסים את ההתקפות למטרות השונות כך שהמספר הכללי של הפצצות הנזרקות יהיה גדול ככל האפשר?

הקוראים מצאו בודאי קווים משותפים לבעיות הנ"ל, בשלב מאוחר יותר ננסח ביתר דיוק מהו המשותף הזה ונבהיר לעצמנו את מהותו של התכנון הליניארי. אך מקודם ננתח ונפתור את הבעיה הראשונה, מכוון שנתוח מתמטי מדויק של השאלה יתן לנו מושג על הבעיה הכללית.

<u>פתרון בעיה א</u>.

נניח, כי הקבוץ החליט לגדל $x$ דונם תירס ו-$y$ דונם סלק-מספוא. יש למצא את המשתנים $x$ ו-$y$ כך שלא יעברו את ההגבלות שנזכרו בבעיה וכך שהרווח הצפוי יהיה גדול ככל האפשר. נקרא לפתרון כזה בשם <u>"פתרון אופטימלי"</u>.

אנו יודעים, כי כמות הדשנים בק"ג הדרושים ל-$x$ דונם תירס ול-$y$ דונם סלק היא:

$$20x + 18y$$

כמות זו אינה יכולה לעלות על כמות הדשנים הכללית שעומדת לרשות המספוא, כלומר:

$$(1) \quad 20x + 18y \leq 39000$$

באופן דומה נקל לראות, כי ההגבלה על כמות המים יכולה להכתב

בצורה של אי שויון:

$$(2)\quad 70x + 50y \le 116{,}500$$

וכן מתבטאת ההגבלה על מספר ימי העבודה באי שויון

$$(3)\quad 3x + 4y \le 6000$$

מלבד זאת אל לנו לשכוח, כי $x$ ו-$y$ אשר מבטאים מספרי דונם, המוקצבים לגידולים השונים, אינם יכולים להיות גדלים שליליים; כלומר

$$(4)\quad x \ge 0 \quad ; \quad y \ge 0$$

הרווח המצופה יהיה

$$(5)\quad R = 35x + 25y$$

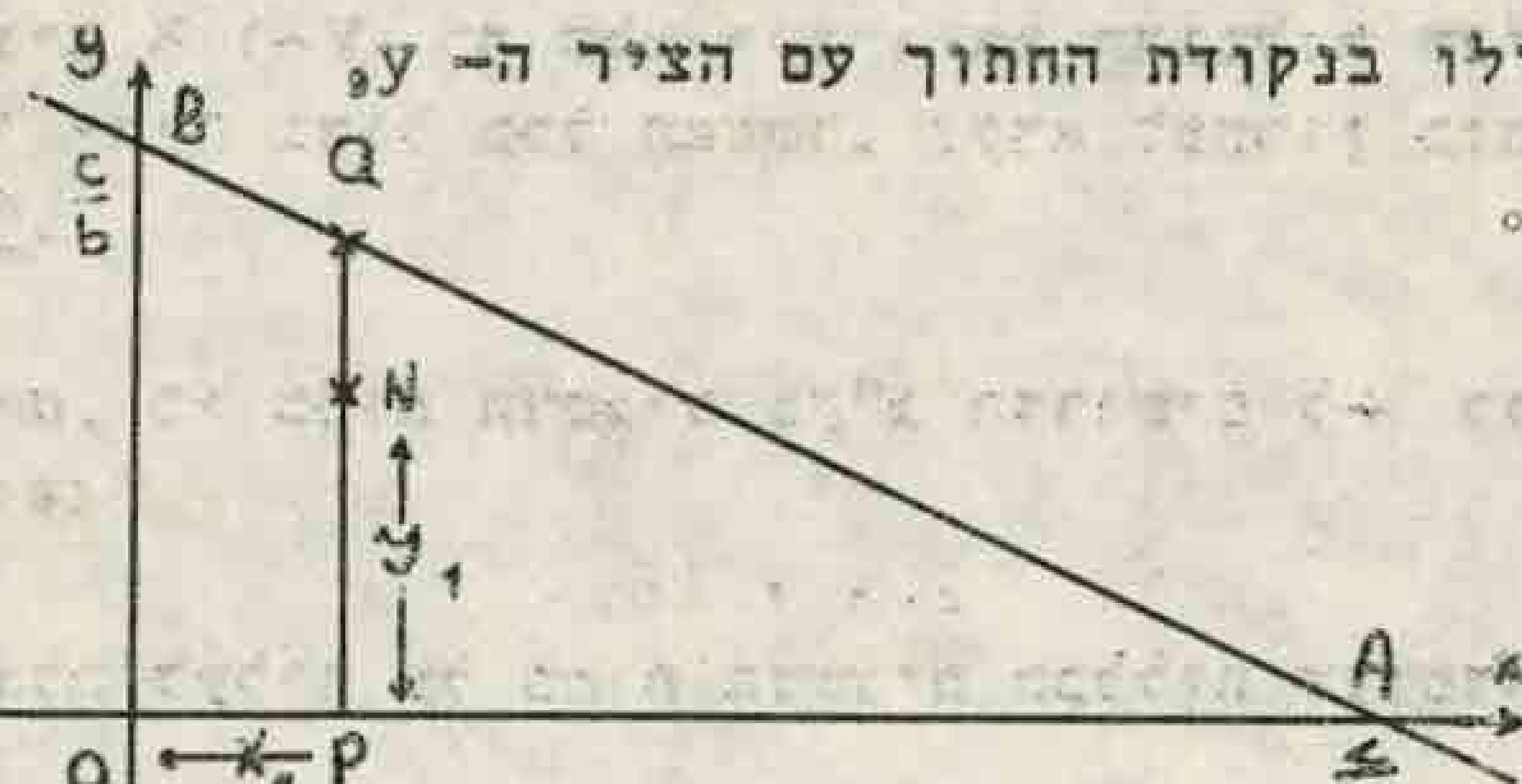
תפקידנו הוא למצא בין כל הזוגות $(x,y)$ הממלאים את התנאים (1), (2), (3), (4) את אותו הזוג שעבורו יהיה $R$ גדול ביותר.

בשלב הראשון נפתח שיטה גרפית לפתרון הבעיה.

נתחיל בשאלה, היכן יימצאו כל הנקודות $(x,y)$ המקיימות את אי השויון (1)? לשם כך נמצא תחילה את כל הנקודות $(x,y)$ המקיימות את המשואה

$$(6)\quad ax + by = c$$

(אנחנו מניחים בשלב זה, כי $a,b,c$ מספרים חיוביים). בודאי ידוע לקורא, כי נקודות $(x,y)$ אלו נמצאות על קו ישר החותך את ציר ה-$x$ בנקודה $A$ שעבורה $x = \frac{c}{a}$ ואת ציר ה-$y$ בנקודה $B$ שעבורה $y = \frac{c}{b}$. (נקודת החתוך עם ציר ה-$x$ הנה הנקודה שבה $y = 0$ ולכן $x = \frac{c}{a}$, ואילו בנקודת החתוך עם הציר ה-$y$, הרי $x = 0$).




ציור 1

והיכן נמצאות כל הנקודות $(x,y)$ המקיימות גם את אי-השויון

$$(7)\quad ax + by < c$$

וגם את התנאי (4)? בגלל התנאי האחרון חייבות נקודות אלו להמצא ברביע הראשון המוגדר ע"י שתי הקרניים $x \geq 0$ ; $y \geq 0$. נתבונן עתה בנקודה כלשהי N הנמצאת <u>בתוך</u> המשולש OAB. יהי $NP=y_1$ , $OP=x_1$. תהי Q נקודת החתוך של NP עם AB ו- $PQ=y'_1$. כוון ש- Q נמצאת על הישר AB, הרי

$$ax_1 + by'_1 = c$$

ולכן

$$ax_1 + by_1 < c$$

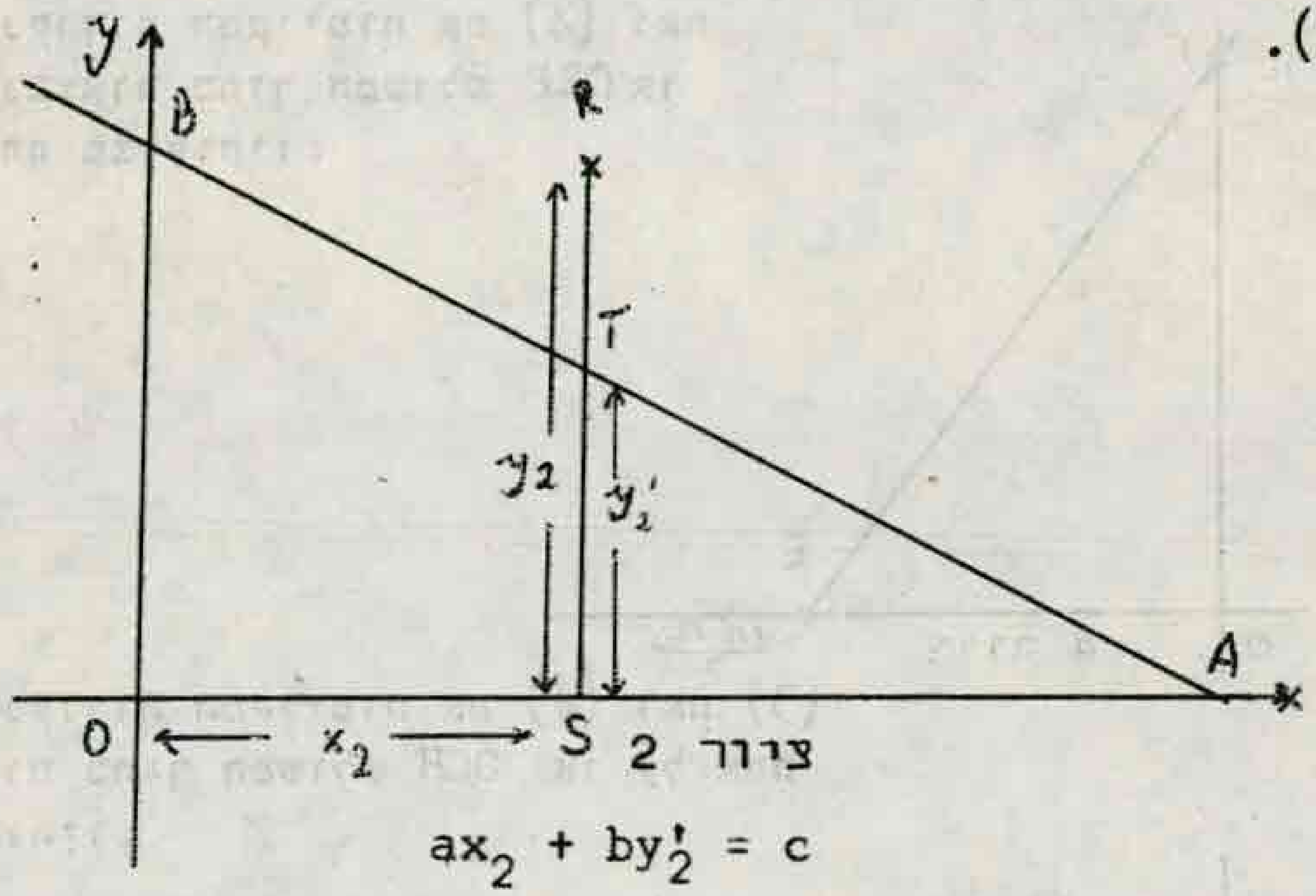
מכוון ש-

$$y_1 < y'_1$$

יוצא, כי עבור כל הנקודות שבתוך המשולש OAB קיים

$$ax + by < c$$

נתבונן עתה בנקודות הרביע הראשון שהן מחוץ למשולש OAB (כלומר "מעבר" לקטע AB). תהי R אחת הנקודות האלה בעלת השעורים $OS = x_2$ ו- $RS = y_2$. תהי T נקודת החתוך של RS ו-AB ותהי $ST = y'_2$ (ראה ציור 2).




ציור 2

אזי

$$ax_2 + by'_2 = c$$

כוון ש- T על הישר AB. ו-

$$ax_2 + by_2 > c$$

מאחר ש-

$$y_2 > y'_2$$

מכאן, כי כל הנקודות ברביע הראשון שהן מחוץ למשולש OAB מקיימות

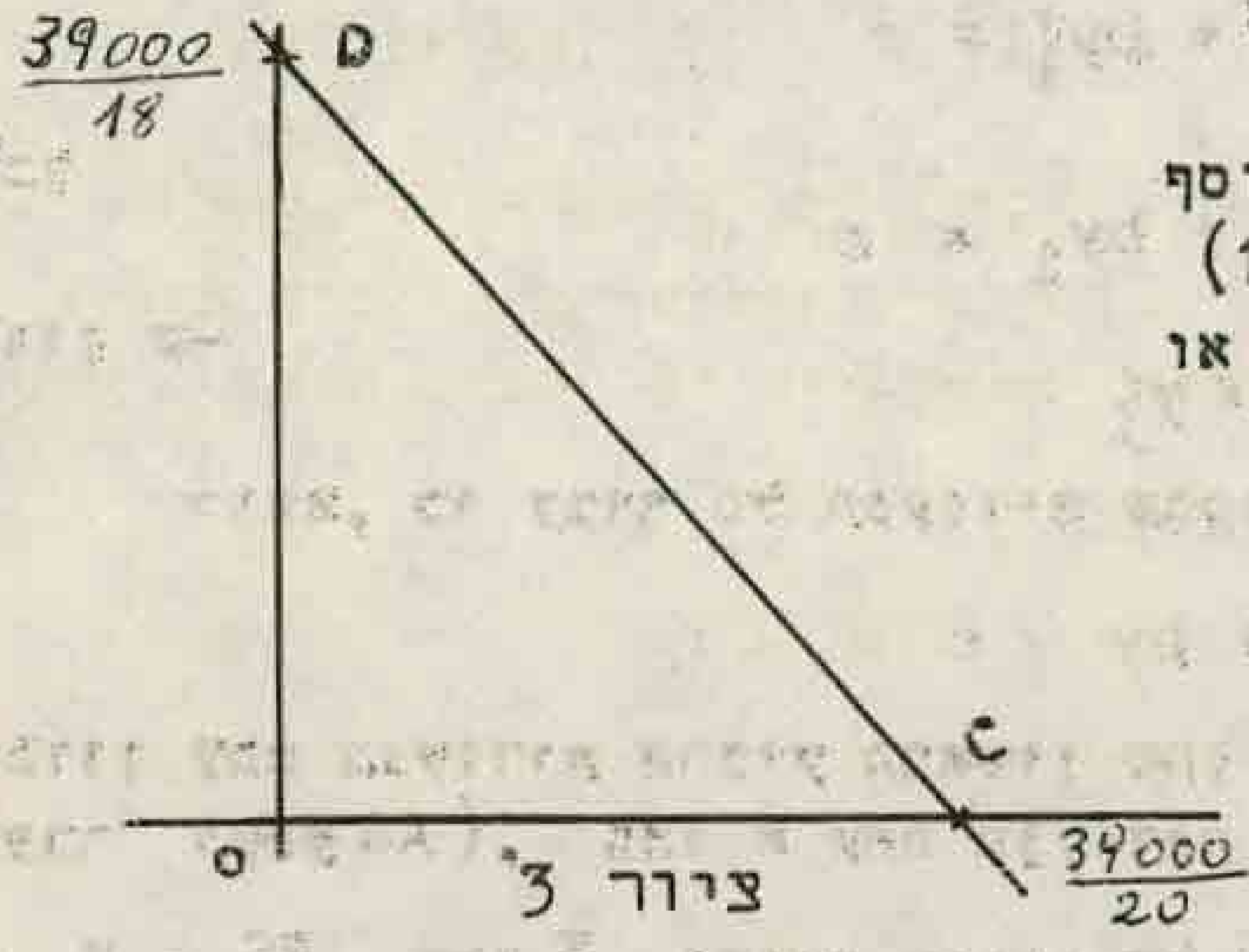
$$ax + by > c$$

ולכן נמצאות כל הנקודות המקיימות את אי השויון

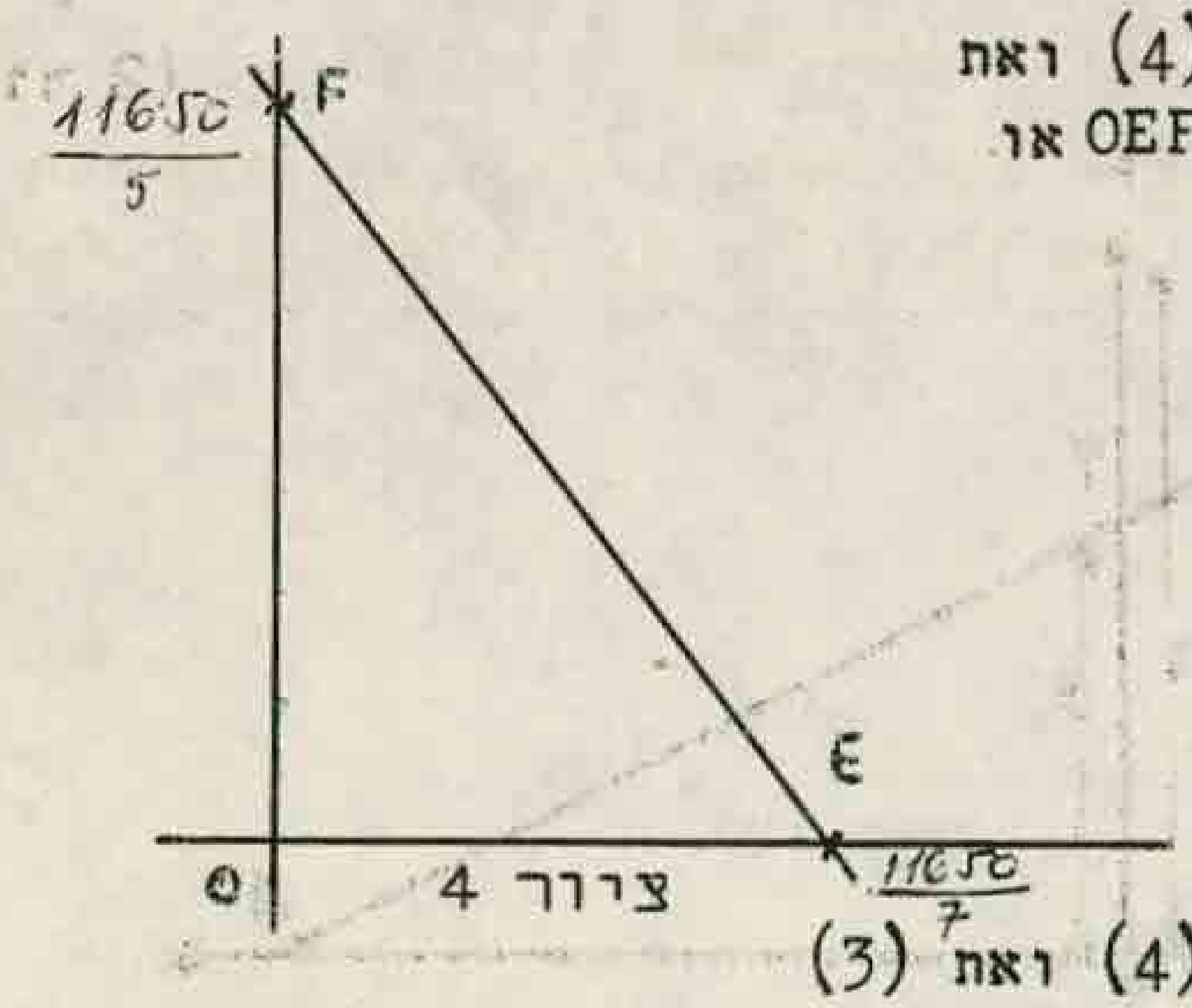
$$(8) \qquad ax + by \leq c$$

בתוך המשולש OAB , או על הישר AB . ולהיפך: כל נקודה הנמצאת בתחום זה מקיימת את אי השויון (8). מאחר ש (1), (2) ו-(3) הם מקרים פרטיים של (8), יתקבל:

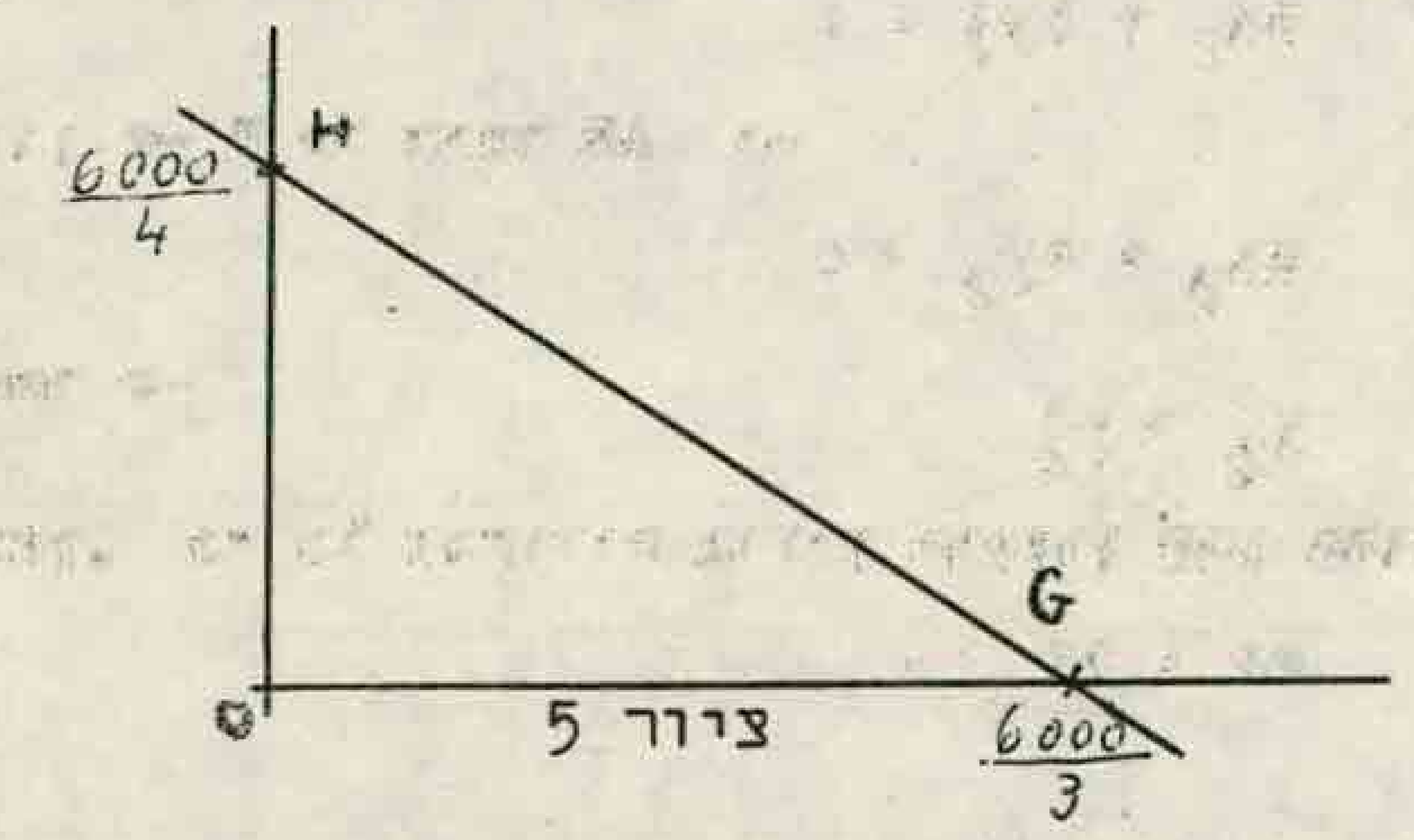
א. כל הנקודות המקיימות בנוסף לאי השויון (4) גם את (1) נמצאות בתוך המשולש OCD או על אחת מצלעותיו.




ב. כל הנקודות המקיימות את (4) ואת (2) נמצאות בתוך המשולש OEF או על אחת מצלעותיו:




ג. כל הנקודות המקיימות את (4) ואת (3) נמצאות בתוך המשולש OGH או על אחת מצלעותיו.



מכאן, כי הנקודות המקיימות את כל אי השויונות (1) - (4) גם יחד חייבות להמצא בתוך תחום T שהוא המצולע OEMH כשהשעורים של M הם $(1276\frac{12}{13}, 542\frac{4}{13})$.

עתה עלינו למצא מבין נקודות התחום הזה את זאת, שעבורו יהיה הרווח R גדול ביותר.

נשרטט את הישרים $R=70,000$ ו- $R=105,000$ הם ישרים מקבילים אשר שניהם אינם עוברים דרך התחום T. בציור 6 הם מסומנים ע"י $GQ_2$ ו-$P_1Q_1$. מזה נובע, כי אין למצא נקודה בתוך התחום T אשר עבורה

$$35x + 25y = 70,000$$

או

$$35x + 25y = 105,000$$

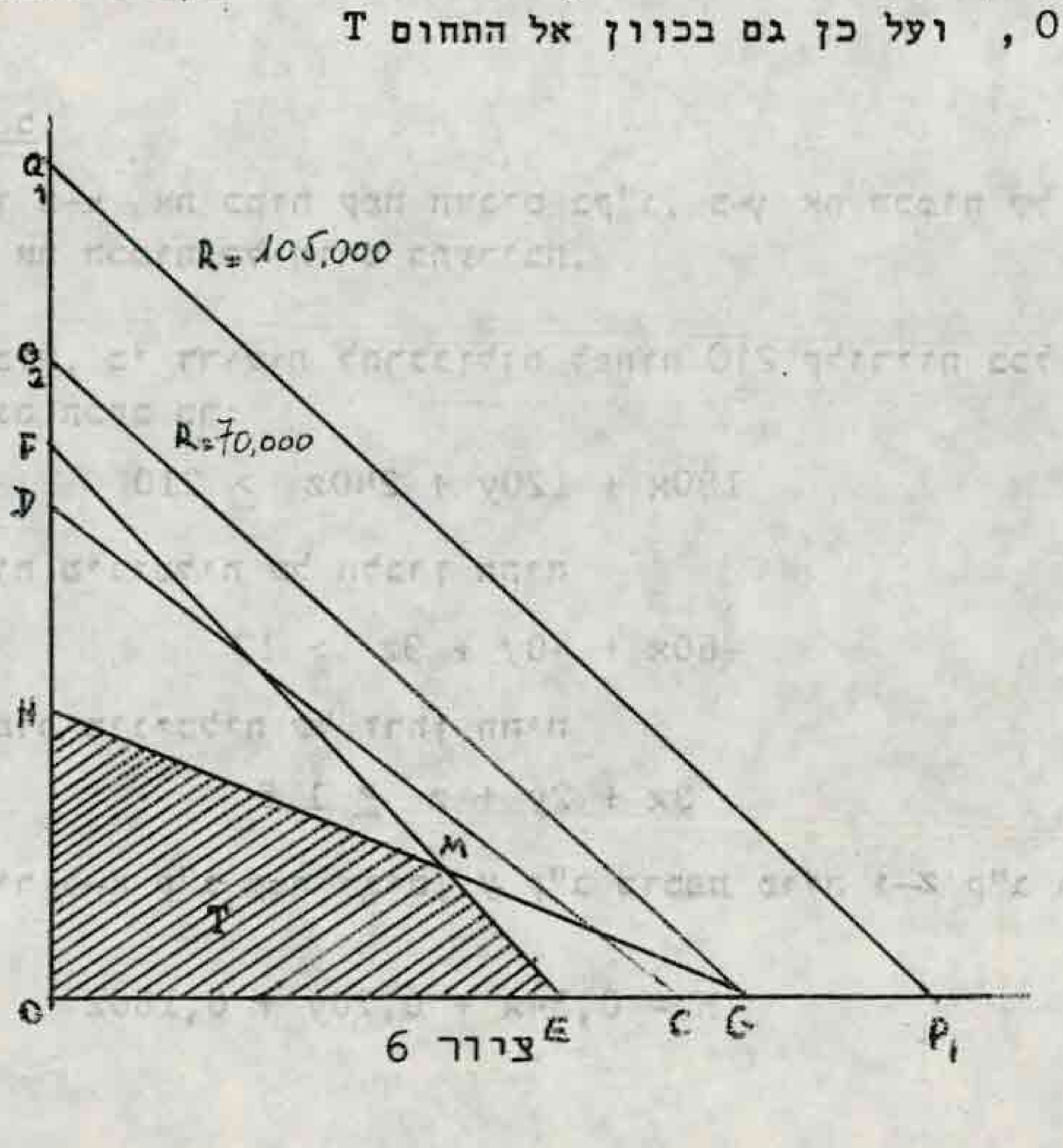
פרוש הדבר כי עבור כל זוג $(x,y)$ המקיים את אי השויונות (1) - (4) יהיה

$$35x + 25y < 70,000$$

וכן

$$35x + 25y < 105,000$$

אך אם נקטין את R יזוז הישר $R = 35x + 25y$ מקביל לעצמו בכוון אל הראשית O, ועל כן גם בכוון אל התחום T




ציור 6

אפשר להווכח מציור 6, כי הערך הכי גדול של R אשר עבורו ייפגש הישר $35x + 25y = R$ עם התחום T יהיה כשתהיה הפגישה בנקודה M. אבל M הוא נקודת המפגש של שני הקווים הישרים

$$7x + 5y = 11,650$$

ו-
$$10x + 9y = 19,500$$

פתרון משוואות אלה נותן את שעורי M כ-$(542\frac{4}{13}, 1276\frac{12}{13})$.
הערך של R שיתאים לעובדה כי נקודה זו נמצאת על

$$35x + 25y = R$$

יהיה איפוא $35x(1276\frac{12}{13}) + 25x(542\frac{4}{13})$, ז.א. 58,250
במלים אחרות: הרווח יהיה גדול ביותר, כאשר מקציבים $1276\frac{12}{13}$ דונם לתירס ו- $542\frac{4}{13}$ דונם לסלק מספוא ובמקרה זה יהיה הרווח -.58,250 לירות.

נתבונן עתה בשתי הבעיותהאחרות שהזכרנו לעיל וננסה למצא גם להן נסוח אלגברי.

<u>פתרון בעיה ב.</u>

נסמן ב-x את כמות קמח הדגים בק"ג, ב-y את הכמות של כוספת סויה, וב-z את הכמות של תירס בתערובת.

ההגבלה, כי דרושות לתרנגולות לפחות 210 קלוריות בכל 100 גר' של מזונם תכתב כך:

$$180x + 120y + 240z \geq 210$$

הדרישה לכמות מינימלית של חלבון תהיה

$$60x + 40y + 9z \geq 17$$

והדרישה לכמות מינימלית של זרחן תהיה

$$3x + 2y + z \geq 1,5$$

המחיר ל-x ק"ג קמח דגים, y ק"ג כוספת סויה ו-z ק"ג תירס יהיה

$$M = 0,34x + 0,20y + 0,180z$$

יש למצא את ערכי המשתנים $x$, $y$ ו-$z$ שעבורם יהיה $M$ קטן ככל האפשר.

בודאי שמתם לב, כי אי השויונות המבטאים את ההגבלות בבעיה ב׳ הפוכים לאלה שמצאנו בבעיה א׳, כמו כן המטרה כאן למצא ערך קטן ביותר ל-$M$ לעומת הערך הגדול ביותר של $R$ שאליו שאפנו בבעיה א׳. בהמשך נראה, כי שיטות הפתרון לבעיות מסוג א׳ (ההגבלה: "לא גדול מ-" והמטרה מקסימום) ומסוג ב׳ (ההגבלה "לא קטן מ-" והמטרה מינימום) זהות הן וקל לעבור מאחת לשניה.

<u>פתרון בעיה ג.</u>

המשתנים בבעיה זו יהיו: מספר הפעמים שיש לצאת מבסיס $B_i$ למטרה $M_k$ ונסמן את המשתנים - שמספרם 12 - ב- $X_{ik}$

$$(i = 1,\dots,4 \quad ; \quad k = 1,2,3)$$

תנאי ההגבלה יהיו כאן:

התנאים ביחס ליציאות מאותו בסיס:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 50$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 50$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 50$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} \leq 50$$

והתנאים ביחס למספר המינימלי של הפצצות ביום לכל מטרה:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \geq 60$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \geq 60$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \geq 60$$

אי שויונות אלו יכולים להכתב בצורה תמציתית יותר:

$$X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} \leq 50 \qquad (i = 1,\dots,4)$$

$$X_{1k} + X_{2k} + X_{3k} + X_{4k} \geq 60 \qquad (k = 1,2,3)$$

עבור אלה מבינכם המכירים את סימן הסכום $\Sigma$ נוכל לכתוב

אי-שויונות אלו בצורה עוד יותר תמציתית

$$\sum_{k=1}^{3} X_{ik} \leq 50 \qquad (i = 1,\ldots,4)$$

$$\sum_{k=1}^{4} X_{ik} \geq 60 \qquad (k = 1,2,3)$$

התנאי שמספר הפצצות שנזרק יהיה גדול ככל האפשר יכתב בצורה:

$$t_{11}x_{11} + t_{12}x_{12} + \ldots + t_{43}x_{43} = \max$$

(או, שוב בעזרת סימן ה- $\Sigma$

$$( \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{3} t_{ik}x_{ik} = \max$$

את שתי הבעיות שנסחנו עתה אי-אפשר לפתור בשיטה גרפית באותה הקלות שבה פתרנו את הבעיה הראשונה: בבעיה השניה שלשה משתנים במקום שניים, ועל כן היה צורך לעבוד במרחב של שלשה מימדים ובגיאומטריה של מרחב זה, כדי להגיע לפתרון. אין זה נוח, אך עדיין יכולנו לתאר לעצמנו את שיטת העבודה. עבור הבעיה השלישית לעומת זאת היה מספר המימדים הנדרש כה גדול שיהיה צורך להחליף את המושגים הגיאומטריים המוחשיים במשואות אלגבראיות. ועל כן מוטב לבחור מראש בשיטת פתרון אלגברית. בשיטה זו נדון בהמשך המאמר הזה שיופיע בחוברת הבאה.

מהנסוח האלגברי של שלש הבעיות גם יחד נוכל להוציא כמה מסקנות באשר למשותף לשלש הבעיות:

שלשתן עוסקות בחפוש אחרי פתרון אופטימלי (מקסימלי או מינימלי). אולם הבעיות שונות מ"בעיות מקסימום - מינימום" שהכירו אלה מביניכם שלמדו חשבון דיפרנציאלי, בעיקר בכך שנוסף לתנאי המקסימום (או המינימום) יש למלא עוד תנאי אי שויון מסויימים.

ועוד משותפת לבעיות שהזכרנו כאן היא העובדה שכל המשתנים מופיעים בחזקה הראשונה בלבד. מכאן, אגב, השם תכנון ליניארי (ליניארי, פרושו קוי), כי הרי הקו הישר הוא התאור הגרפי של פונקציה אשר בה מופיעים x ו-y רק בחזקה הראשונה.

## מספרי פיבונצ'י (Fibonacci)

שמעון רייך, י"א הריאלי העברי בחיפה

א. נסמן את אברי הסדרה באות U. הסדרה תהיה

$U_1, U_2, U_3 \ldots\ldots U_n$

הגדרת סדרת פיבונצ'י היא:

$U_1 = 1 \quad ; \quad U_2 = 1$

$U_n = U_{n-2} + U_{n-1}$

נרשום באופן מפורש את תחילת הסדרה:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

ב. ננסה למצא כעת את $U_n$ על-פי n בלבד ולא על סמך האברים הקודמים.

נעיין באין-סוף הסדרות המקיימות:

$U_n = U_{n-2} + U_{n-1}$

אם הסדרה $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ מקיימת תכונה זו הרי גם $ca_1, ca_2, ca_3, \ldots\ldots\ldots, ca_n$ (כאשר c הוא מספר כלשהו) תקיים תכונה זו. כי אם

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

הרי גם

$ca_n = ca_{n-2} + ca_{n-1}$

אם גם $a'_1, a'_2, \ldots\ldots, a'_n$ מקיימת תכונה זו הרי הסדרה

$(a_1 + a_1'), (a_2 + a_2'), \ldots\ldots, (a_n + a'_n)$

תקיים תכונה זו, כי אם

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

ו-

$a'_n = a'_{n-1} + a'_{n-2}$

הרי (אם נחבר)

$(a_n + a'_n) = (a_{n-1} + a'_{n-1}) + (a_{n-2} + a'_{n-2})$

כעת, נוכיח שאם הסדרות $a_1, a_2, a_n$ ; $a'_1, a'_2 \ldots a'_n$

אינן פרופורציוניות, הרי $\frac{a_1}{a'_1} \neq \frac{a_2}{a'_2}$ ואמנם אם השויון היה קיים

הרי:

$$\frac{a_3}{a'_3} = \frac{a_1 + a_2}{a'_1 + a'_2} = \frac{a_2}{a'_2}$$

ובאינדוקציה נקבל ש- $\frac{a_3}{a'_3} = \frac{a_4}{a'_4} = \frac{a_n}{a'_n}$ – מה שסותר את

ההנחה ש-2 הסדרות אינן פרופורציוניות. כעת, נניח שיש לנו סדרה שלישית המקיימת

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

והיא

$$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$$

נמצא $c_1$ , $c_2$ שיקיימו:

$$c_1 a_1 + c_2 a'_1 = A_1$$

$$c_1 a_2 + c_2 a'_2 = A_2$$

מקבלים:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & a'_1 \\ A_2 & a'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a'_1 \\ a_2 & a'_2 \end{vmatrix}} = \frac{A_1 a'_2 - A_2 a'_1}{a_1 a'_2 - a_2 a'_1}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & A_1 \\ a_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a'_1 \\ a_2 & a'_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 A_2 - a_2 A_1}{a_1 a'_2 - a_2 a'_1}$$

(נקבל תמיד את $c_2$ ; $c_1$ כי הרי 2 הסדרות אינן פרופורציוניות

והוכחנו שאז $a_1a'_2 - a_2a'_1 \neq 0$ כלומר המכנה לא ישוה ל-0).

לפי מה שהוכחנו קודם, מכיון שגם

$a_1, a_2 \dots a_n$ $\quad$ $a'_1, a'_2 \dots a'_n$

הן סדרות המקיימות $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$, גם $c_1a_1, c_1a_2 \dots c_1a_n$

וגם $c_2a'_1\ c_2a'_2 \dots c_2a'_n$ מקיימות את התכונה הנ"ל.

מכאן, שוב לפי מה שהוכחנו, שגם

$$(c_1a_1 + c_2a'_1),\ (c_1a_2 + c_2a'_2) \dots (c_1a_n + c_2a'_n) \qquad (2)$$

היא סדרה המקיימת את התכונה. אבל

$$c_1a_1 + c_2a'_1 = A_1$$

$$c_1a_2 + c_2a'_2 = A_2$$

והרי אם $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ היא סדרה המקיימת את התכונה, 2 האברים הראשונים קובעים את יתר האברים.

כלומר, סדרה (2) מזדהה עם סדרה $A_1, A_2 \dots A_n$. מכאן יוצא, שאם ישנן 2 סדרות לא-פרופורציוניות $a_1, a_2, \dots a_n$ ו- $a'_1, a'_2, \dots a'_n$ המקיימות את התכונה של $U_n = U_{n-2} + U_{n-1}$, הרי כל סדרה אחרת המקיימת תכונה זו, האבר ה-n שלה יהיה בצורה של $c_1a_n + c_2a'_n$, כאשר $c_1, c_2$ הם קבועים.

נשתמש בעובדה זו לגבי סדרת פיבונצ'י. ראשית נמצא 2 סדרות לא פרופורציוניות.

נקח את הסדרה הגיאומטרית (מנתה $q$-)

$$1, q, q^2 \dots q^{n-1}$$

כדי שסדרה זו תשמש כסדרה המקיימת את התכונה, דרוש שיתקיים

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$$

ולאחר חלוק ב- $q^{n-2} \neq 0$.

$$q^2 = q + 1$$

שרשי משואה רבועית זו עבור $q$ הם:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

הסדרות (הלא-פרופורציוניות, משום שה-$q$ שלהם שונים) שקבלנו הן:

$$1, \alpha, \alpha^2 \ldots \alpha^{n-1}$$

$$1, \beta, \beta^2 \ldots \beta^{n-1}$$

לפי מה שהוכחנו, כל סדרה אחרת המקיימת את התכונה יכולה להיות מתארת ע"י

$$(c_1 + c_2), (c_1\alpha + c_2\beta), (c_1\alpha^2 + c_2\beta^2) \ldots$$

הדבר אמור גם לגבי סדרת פיבונצ'י. נמצא את $c_1$, $c_2$ על-פי 2 האברים הראשונים הקובעים אותה.

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1\alpha + c_2\beta = 1$$

מקבלים:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}} = \frac{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{-\sqrt{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

מכאן, ($U_n$ הוא האבר הכללי של סדרת פיבונצ׳י):

$$U_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} .$$

זוהי הנוסחה המבוקשת.

ג. נמצא את סכום $n$ האברים הראשונים של סדרת פיבונצ׳י כפונקציה של $n$.

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

נרשום

$$U_1 = U_3 - U_2$$
$$U_2 = U_4 - U_3$$
$$U_3 = U_5 - U_4$$
$$\vdots$$
$$U_n = U_{n+2} - U_{n+1}$$

כשנחבר, נקבל:

$$S_n = -U_2 + U_{n+2}$$

מאחר ושאר האברים מתבטלים, ולפי הנוסחה לאבר ה- $n$, מקבלים: ($U_2 = 1$)

$$S_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} - 1$$

ד. נוכיח כעת את המשפט הבא:

האבר ה-$n$ של סדרת פיבונצ׳י ($U_n$) הוא המספר השלם הקרוב

ביותר לאבר ה- n $(a_n)$ של הסדרה הגיאומטרית שאברה הראשון הוא $\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ ומנתה $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

הוכחה:

$$|U_n-a_n| = \left|\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

כעת, $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ לכן $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n < 1$

מצד שני $\sqrt{5} > 2$

לכן $\frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$

כלומר ההפרש בין $U_n$ ל $a_n$ קטן בערכו המוחלט מ-$\frac{1}{2}$ – וזה בדיוק מה שטוען המשפט!

נסמן את ההפרש הזה ב- $\delta_n$ מתקבל ש-

$$U_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \delta_n$$

($|\delta|$ הוא ערכו המוחלט של הפרש זה).

לכן נוכל לכתב:

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5} + \delta_{n+1}}{\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5} + \delta_n} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1} + \sqrt5\,\delta_{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + \sqrt5\,\delta_n} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt5}{2} + \frac{\delta_{n+1}\sqrt5}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{\delta_n \cdot \sqrt5}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}} = \frac{\frac{1+\sqrt5}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt5}{2}$$

( $\sqrt5\ \delta_{n+1}$ $\sqrt5\ \delta_n$ הם ערך קבוע, בסביבות 2. לעומת זה, מכיון

ש- $\frac{1+\sqrt5}{2} > 1$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n = \to\infty$. כלומר $\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_{n+1}\sqrt5}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n} = 0$

ומכאן התוצאה שקבלנו). כלומר היחס שבין 2 אברי סדרת פיבונצ'י עוקבים מתקרב ל $\frac{1+\sqrt5}{2}$

דוגמאות:

$$\frac{1+\sqrt5}{2} = 1.618 +$$

$$5/3 = 1.666 +$$

$$34/21 = 1.619 +$$

ה. למספרי פיבונצ'י (אלה השיכים לסדרת פיבונצ'י) יש הרבה תכונות מעינות. נביא כמה מהן:

(1) נתונה סדרה המקיימת

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

מצא את סכום 10 האברים הראשונים כפונקציה של אבר אחד בלבד, הנמצא בין 10 אברים אלה.

בברור קיים:

$$a_1 = a_1 ; \quad a_2 = a_2 ; \quad a_3 = a_1 + a_2 ; \quad a_4 = a_1 + 2a_2 ;$$

$$a_5 = 2a_1 + 3a_2 ; \quad a_6 = 3a_1 + 5a_2 ; \quad a_7 = 5a_1 + 8a_2 ;$$

$$a_8 = 8a_1 + 13a_2 ; \quad a_9 = 13a_1 + 21a_2 ; \quad a_{10} = 21a_1 + 34a_2 .$$

(המקדמים הם סדרת פיבונצ׳י!)

$$S_{10} = 55a_1 + 88a_2$$

כשנעבור על הטבלה נמצא,

$$S_{10} = 11 \cdot a_7$$

וזה מה שחפצנו

(2) מצא את הסכום

$$S = U_1{}^2 + U_2{}^2 + \dots + U_n{}^2$$

נרשום

$$U_kU_{k+1} - U_{k-1}U_k = U_k(U_{k+1} - U_{k-1}) = U_k \cdot U_k = U_k{}^2$$

לכן,

$$U_1{}^2 = U_1U_2$$

$$U_2{}^2 = U_2U_3 - U_1U_2$$

$$U_3{}^2 = U_3U_4 - U_2U_3$$

$$\vdots$$

$$U_n{}^2 = U_nU_{n+1} - U_{n-1}U_n$$

כשנחבר, נקבל $S = U_nU_{n+1}$ ואת זה אפשר לכתב כפונקציה של n .

(3) הוכח כי

$$.U_{n+m} = U_{n-1}U_m + U_nU_{m+1}$$

נוכיח זאת באינדוקציה עבור m .

עבור $m = 1$

$$U_{n+1} = U_{n-1}U_1 + U_nU_2 = U_n + U_{n-1}$$

זה נכון.

עבור $m = 2$.

$$U_{n+2} = U_{n-1}U_2 + U_nU_3 = U_{n-1} + 2U_n = U_{n+1} + U_n = U_{n+2}$$

נניח שהנוסחה נכונה עבור $m = k$ ו- $m = k+1$ ונוכיח שדבר זה גורר את נכונות הנוסחה עבור $m = k+2$.

לפי ההנחה:

$$U_{n+k} = U_{n-1}U_k + U_nU_{k+1}$$

$$U_{n+k+1} = U_{n-1}U_{k+1} + U_nU_{k+2}$$

כשנחבר,

$$U_{n+k+2} = U_{n+k} + U_{n+k+1} =$$
$$= U_{n-1}(U_k + U_{k+1}) + U_n(U_{k+1} + U_{k+2}) =$$
$$= U_{n-1}U_{k+2} + U_nU_{k+3}$$

והרי רצינו להוכיח את זאת.

(4) יהא נתון קטע. נחלקו ל-2 קטעים a, b, כך שהיחס בין הקטע כולו ל-a יהיה כיחס בין a ל- b (חתך הזהב).

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad (=\varphi)$$

מכאן מקבלים:

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

או

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

מכאן

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(מובן שהיחס אינו יכול להיות שלילי - אלא במקרה שנקודת החלוקה היא חיצונית).

והרי 2 הערכים, החיובי והשלילי, המהוים פתרון משואה זו מופיעים בנוסחה של $U_n$ (ב) ו- $\varphi$ (החיובי) הוא הערך של היחס אליו שואפים 2 אברי סדרת פיבונצ'י עוקבים.

לחתך הזהב יש חשיבות בהנדסה (צלע המעשר והמחמש המשכללים, $2\cos36^\circ = 2\phi$).

לפי מה שהוכחנו ב-ד., הרי אם ניקח 2 רבועים בעלי צלע 1 כל אחד, נצמיד אליהם רבוע בעל צלע 2, נצמיד אל המלבן המתקבל רבוע בעל צלע 3, אח"כ רבוע בעל צלע 5, 8 וכו' - המלבנים שיתקבלו, היחס בין ארכם לרחבם ישאף ל-$\phi$.

(5) סדרת פיבונצ'י מופיעה גם במקומות אחרים שאינם מצופים מראש.

כידוע לזכר הדבורים אין אב (הוא נולד מביצה בלתי מופרית). מענין לראות שמספר "אבותיו" בכל דור הוא מספר פיבונצ'י. כי הרי הוא עצמו הוא דור א' (1); "אמו" דור ב' (1); ל"אמו" כבר היו גם "אב" וגם "אם" (2); לאם שוב היו 2 "הורים" ולאב רק אחד (ביחד 3); ל-2 ה"אמהות" מבין ה-3 היו ביחד 4 הורים ול"אב" רק אחד (5)... וכך הלאה וכך הלאה.

סדרת פיבונצ'י מופיעה גם בפרחים. אפשר לציין את סדור הנצנים והעלים לאורך הגבעול ואת מספר עלי הכותרת. בהרבה קבוצות ומשפחות, מספר עלי הכותרת הממוצע בפרח הוא מספר פיבונצ'י (כמו; 34, 21, 13). מצאו עשב מסויים שיש לו 2 עלי גביע גדולים, 3 קטנים יותר, 5 עלי כותרת ו-8 אבקנים.

מענין לציין שלסדרת פיבונצ'י יש גם קשר למוסיקה. לסולם הכרומטי יש 13 צלילים, לסולם המג'ורי המקבל יש 8 ולסולם הפנטטוני הקדום יש 5 צלילים. והרי 13, 8, 5 הם מספרי פיבונצ'י.

(המשך מאמר זה בחוברת הבאה.)

## צ'יאנשידזי, משחק סיני

משחק זה פשוט ביותר. משתתפים בו שני משחקים, אשר לפניהם מונחים על השלחן שתי ערימות של, למשל, גפרורים. המשחקים הולכים לפי תור וכל אחד, כשמגיע תורו, מוריד כמה גפרורים שהוא רוצה מערימה אחת, לפי בחירתו, או מספר שוה משתי הערימות. יש לו חופש מלא להחליט כמה הוא רוצה לקחת ואם רק מערימה אחת או שהוא רוצה לקחת מספרים שוים משתיהן. המשתתף הלוקח את הגפרור האחרון הוא המנצח.

התיאוריה של המשחק היפה הזה היא פשוטה למדי. אנחנו יכולים להגדיר כל מצב על ידי שני מספרים טבעיים, למשל $(\ell,m)$, המציינים את מספרי הגפרורים שבשתי הערימות. מובן כי אין כל חשיבות לסדר מאחר ו-$(\ell,m)$ שוה ערך ל-$(m,\ell)$ בכל הנוגע למשחק. נגדיר סדרה של <u>מצבים מיוחדים</u> ונוכיח את המשפטים הבאים:-

<u>משפט 1</u>. משתתף המוצא לפניו מצב מיוחד, לא יוכל להמנע מלהפוך אותו למצב בלתי מיוחד על ידי מהלך כלשהו במשחק.

<u>משפט 2</u>. לכל מצב בלתי מיוחד, (נקרא לזה "<u>מצב רגיל</u>") אפשר למצוא מהלך מתאים שיהפוך אותו למיוחד.

<u>משפט 3</u>. סדרת המצבים המיוחדים כוללת $(0,0)$.

לפי המשפטים האלה נוכל לראות, כי משחק היודע את התיאוריה צריך לדאוג להשאיר ליריבו מצב מיוחד. היריב, לפי משפט 1, יקלקל את המיוחד והמומחה יוכל אז, בהגיע תורו, להחזיר את המצב המיוחד לפי משפט 2. זה ימשיך עד שיעמיד את יריבו בפני המצב המיוחד ביותר, $(0,0)$, ז.א. שלקח את הגפרור האחרון.

ראשית נגדיר את המצבים המיוחדים. הם הסדרה

$$(c_0,d_0)\ ,\ (c_1,d_1)\ ,\ (c_2,d_2),\ldots$$

המוגדרים על ידי התנאים דלקמן:-

1) $c_0 = d_0 = 0$

2) אם הוגדרו כבר $(c_0,d_0)$, ..... , $(c_{n-1},d_{n-1})$, אז מגדירים $c_n$ כמספר הטבעי הכי קטן בין אלה אשר לא הופיעו ב- $(c_r,d_r)$ $(n-1,\ldots,1,0 = r)$.

3) $d_n = c_n + n$

לפי התנאים האלה הרי משפט 3 הוא רק נסוח מחדש של 1).
עכשיו עלינו להוכיח משפטים 1 ו־2. לשם זה נוכיח:-

<u>משפט עזר</u>. כל מספר טבעי יופיע כמרכיב של <u>אחד ורק אחד</u> של המצבים המיוחדים.

כי $c_n$ לא יכול להתלכד עם אף אחד מ־$c_r$ או $d_r$ עבור $r < n$ לפי תנאי 2). המצב ביחס ל־$d_n$ רק קצת יותר מסובך אבל עדיין קל. נניח כי $n > k$ מאחר ו־$c_n$ הוא תמיד הכי קטן בין המספרים שלא נוצלו כבר, ברור כי $c_n > c_k$ ובכן

$$d_n = c_n + n$$

$$> c_k + k$$

$$= d_k$$

ז.א. ש־$d_n$ יותר גדול מכל $d_k$ קודם, ועל אחת כמה וכמה מכל $c_r$ קודם. ובכן משפט העזר מוכח.

<u>משפט 1</u>. אם מורידים מספרים שווים משתי הערימות אז משאירים $d_n - c_n$ קבוע. אבל ברור מההגדרה כי יש רק מצב מיוחד אחד עם ההפרש הזה. אם מורידים רק מערימה אחת אז לא משנים את המרכיב השני של המצב המיוחד. אבל לפי משפט העזר לא יוכל המרכיב השני הזה של מצב מיוחד להופיע במצב מיוחד אחר.

<u>משפט 2</u>. (I) כשנתון המצב $(a, a)$ נוכל תמיד להפוך אותו למצב המיוחד $(0,0)$ על ידי לקיחת $a$ גפרורים מכל אחת הערימות. נסתכל עכשיו במצב כשמרכיבי המצב אינם שווים, נניח $(a,v)$ עם $a < v$.

(II) במקרה $a=c_k$, $v > c_k + k = d_k$ נוכל לקחת $v - d_k$ גפרורים מהערימה הגדולה.

(III) $a=c_k$ $v < c_k + k = d_k$ במקרה זה יהיה $h = v - a$ ואז $v - c_k = v - a = h < k$. אם נוריד $c_k - c_h$ גפרורים משתי הערימות נגיע למצב $(c_h, v - c_k + c_h)$ ז.א. $(c_h, c_h + h)$ שהוא מצב מיוחד.

(IV) $a = d_k$. נוריד $v - d_k$ מהערימה השניה ונגיע למצב $(d_k, c_k)$, ז.א. $(c_k, d_k)$.

קל למדי לחשב את המצבים המיוחדים עד לכל סדר שעלול להיות בעל משמעות בשביל משחק מעשי. אבל עם זה נשארת הבעיה התיאורטית למצוא נוסחה אנליטית עבור המספרים $(c_k, d_k)$. מערכת העתון תשמח לקבל הערות על הבעיה הזאת.

## בעיות חדשות

הבעיות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' ו-י' בלבד (אין פרוש הדבר שהן קלות). את הפתרונות יש להגיש למערכת עד 1.1.65.

ת.211* (2 נקודות) פתור את המשואה:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

ת.212 (4 נקודות) אם $a,b,c$ הם צלעות של משולש, הוכח כי

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc$$

וכי שויון קיים אך ורק במקרה $a=b=c$.

ת.213* (3 נקודות) נסמן את המספרים הראשוניים לפי הסדר על ידי

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots$$

הוכח כי $(P_1P_2P_3\ldots P_n)+1$ לא יהיה רבוע שלם עבור כל $n$.

ת.214* (4 נקודות) שני תלמידי השביעית הורשו להשתתף בתחרות שחמט של תלמידי השמינית. כל מתחרה שחק פעם אחת נגד כל מתחרה אחר. כל תלמיד מהשמינית צבר מספר נקודות שוה לזה שצבר כל אחד מחבריו לכתה. שני תלמידי השביעית צברו יחד שמונה נקודות. כל שחקן קבל נקודה אחת עבור נצחון ומחצית הנקודה עבור תיקו. כמה תלמידי שמינית השתתפו בתחרות?

ת.215 (2 נקודות) כמה שרשים ממשיים יש למשואה $\sin x=\frac{x}{100}$?

ת.216* (3 נקודות) פתור את המשואה:-

$$\sin^3 3x+\sin^3 2x=\sin^3 x\,(\sin 3x+\sin 2x)$$

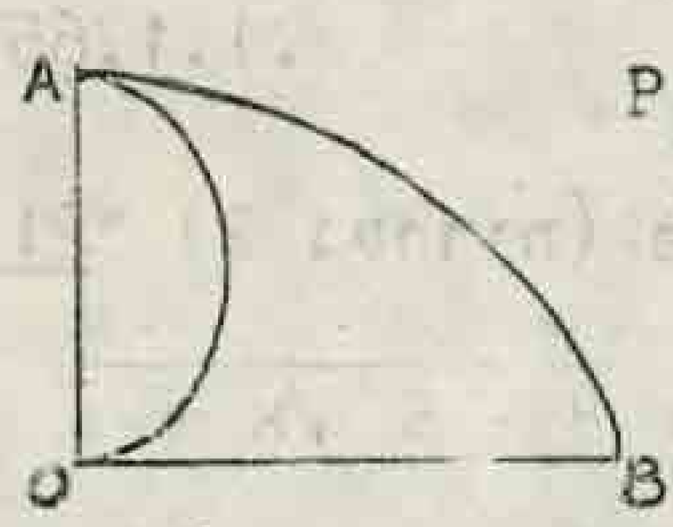
ת.217* (3 נקודות) א) מה הן שתי הספרות האחרונות של $7^{9999}$?
ב) מה היא השארית כשמחלקים $5^{999999}$ ב-7?

ת.218* (2 נקודות) $AA'$, $BB'$ הם שני קוטרים נצבים של מעגל ו-$P$ היא נקודה כלשהי על המעגל. הישרים $PA$, $PA'$ חותכים את $BB'$ בנקודות $C$, $D$ בהתאמה. המשיק למעגל ב-$P$ חותך את $BB'$ ב-$E$. הוכח כי $E$ היא נקודת האמצע של $CD$.

ת.219* (4 נקודות) במשולש ABC יהיו $P_1, P_2, P_3$ הנצבים מ- A,B,C לצלעות AB, CA, BC בהתאמה. r הוא הרדיוס של המעגל החסום במשולש ABC. הוכח כי

א. $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} = \frac{1}{r}$

ב. $P_1P_2P_3 \geq 27r^3$




ת.220* (3 נקודות) בנה מעגל שישיק לקו OB, לחצי המעגל AO, ולרבע המעגל AB.

ת.221 (3 נקודות) נתון מרובע קמור ABCD ונתון כי המעגלים החסומים במשולשים ABC ו- ACD נוגעים באלכסון AC באותה נקודה. הוכח שגם המעגלים החסומים במשולשים ABD ו-DBC נוגעים באותה נקודה של האלכסון BD.

ת.222 (3 נקודות) חשב את הסכום

$$C_n^0 - 2^2C_n^2 + 2^4C_n^4 - 2^6C_n^6 + \dots$$

כש- $C_n^r$ מסמן $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

ת.223* (5 נקודות) עבור כל A,B,C הוכח כי קיים

$$\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}} + \frac{\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{C+A}{2}} + \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} + \frac{\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}} = 0$$

ת.224* (3 נקודות) $q_n, p_n$ (n = 1,2,...) הם שתי סדרות של מספרים שלמים ו- $a_n$ (n = 1,2,...) סדרה של מספרים ראציונליים. קיימות הנוסחאות:-

$$\left.\begin{aligned} p_{n+1} &= a_n p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} &= a_n q_n + q_{n-1} \end{aligned}\right\} \; n = 1,2,\dots$$

וגם נתון כי $q_1=0$ , $p_1=q_2=1$. הוכח כי לזוג $p_n, q_n$ אין גורם משותף.

ת.225 (4 נקודות) נתון הבסיס BC של משולש ABC וגם הגובה h מ- A ל- BC. הוכח כי AB + AC יהיה מינימלי כשהמשולש הוא שווה-שוקיים, AB=AC.

## פתרון הבעיות ת. 181 - 195

ת.181 יהיה O קדקד הפירמידה, P מרכז הכדור התחתון ו-'P זה של העליון, R הרדיוס של התחתון ו-'R של העליון, ויהיה α הזוית בין OP ובין הישר מ-O לאמצע של אחת מצלעות הבסיס.

קיים

$$R = OP \sin\alpha$$

$$= (h-R)\sin\alpha$$

לכן

$$R = \frac{h\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

כמו כן

$$R' = OP'\sin\alpha$$

$$= (h-2R-R')\sin\alpha$$

ומזה

$$(1+\sin\alpha)R' = (h-2R)\sin\alpha$$

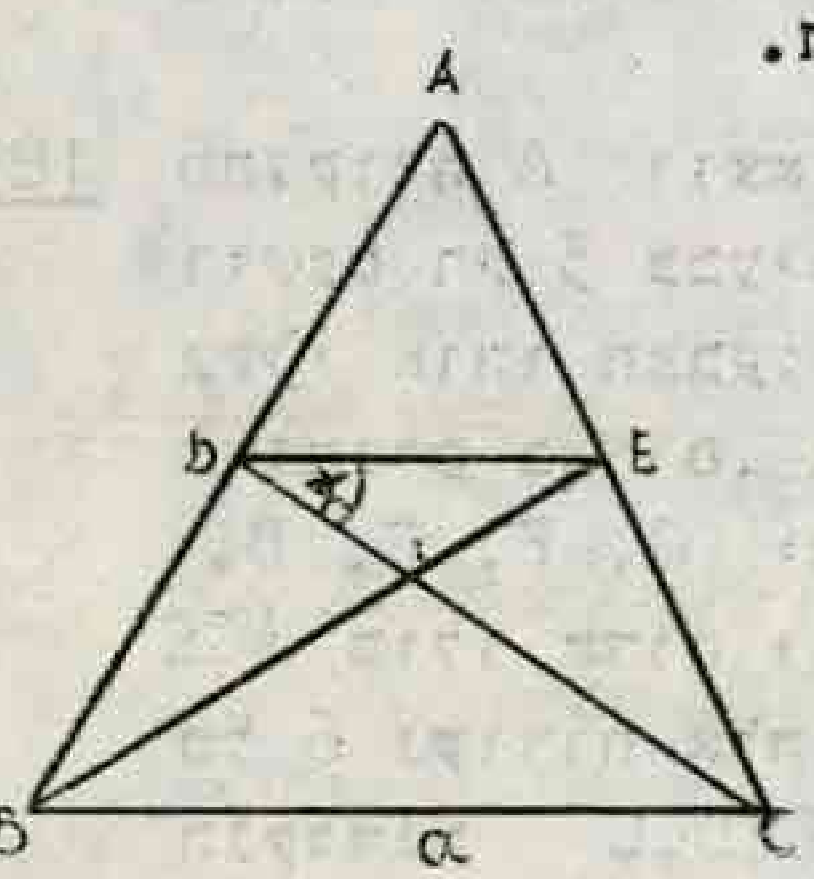
$$= \frac{h(1-\sin\alpha)\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

$$= (1-\sin\alpha)R$$

היחס של הנפחים ניתן ע"י

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^3 = \left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)^3$$

ת.182 על כל מקצוע יש לכל היותר $2\times\frac{1}{3}$ קדקד. לכן יש לכל היותר $\frac{14}{3}$ קדקדים בפאון "משובע". מספר הקדקדים הקטן בגוף מרחבי הוא 4 וזה הטטראדר בעל 6 המקצועות.




ת.183 הוכחה:

יהיה $\sphericalangle CDE = \alpha$

קיים $\sphericalangle BEC = 50°$

ולכן $BC = CE$

$\sphericalangle BDC = 40°$

ולכן $$\frac{CD}{BC} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$= 2\cos 40^\circ$$

$$= 2\sin 50^\circ \qquad (1)$$

$$\measuredangle DEC = 160^\circ - \alpha$$

ולכן $$\frac{CD}{BC} = \frac{CD}{CE} = \frac{\sin (160^\circ\ \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin (20^\circ+\alpha)}{\sin \alpha} \qquad (2)$$

מתוך (1) ו-(2) יש לנו

$$\frac{\sin (20^\circ+\alpha)}{\sin \alpha} = 2\sin 50^\circ$$

$$= \frac{\sin (20^\circ+30^\circ)}{\sin 30^\circ}$$

ומזה $$\alpha = 30^\circ$$

<u>ת.184</u> $$\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{n(n+1)\ (n+2)}{24}\ .$$

מכפלת שלשה מספרים עוקבים מוכרחה להתחלק ב-3, מאחר ש-n זוגי, יהיה גם $(n+2)$ זוגי ואחד מתוך n, n+2 יתחלק ב-4. יוצא כי $n(n+2)$ מתחלק ב-8.

<u>ת.185</u> מהנקודה A יוצאים 16 ישרים לשאר נקודות הקבוצה. מאחר וישנם רק 3 צבעים מוכרחים לפחות 6 מהישרים האלה להיות בעלי אותו הצבע; נניח כי AB, AC, AD, AE, AF ו- AG מסומנים באדום. אם אחד הקוים המחברים בין שנים מתוך B, C, D, E, F, G, יהיה גם הוא אדום, למשל CE אז יהיה המשלש ACE כולו אדום וגמרנו. אחרת לא יופיע אדום בין החבורים של 6 נקודות אלה. נסתכל בישרים המחברים את B לשאר חמש הנקודות C,D,E,F,G. עבור 5 הקוים האלה נשארו עכשיו

רק 2 צבעים ולכן יהיו לפחות שלשה מהם בעלי אותו צבע; נניח כי BC, BD, BE הם כולם, למשל, צהובים. אם אחד מתוך הישרים CD, CE, DE גם כן צהוב, אז יש לנו משלש צהוב. אחרת יהיו שלשתם כחולים והמשלש CDE כולו כחול.

ת.186 נציב $y = x^{\log x}$ ואז

$$y^2 - 4y + P = 0$$

$$y = 2 \pm \sqrt{4-P}$$

$$\log y = (\log x)^2 \geq 0$$

ולכן $y \geq 1$

האפשרויות השונות:

א. $P > 4$ ברור כי אין פתרון ולכן $N = 0$.

ב. $P = 4$ קיים פתרון אחד עבור $y$, $y=2$. במקרה זה יש לנו

$$\log x = \pm 1$$

ובכן $N = 2$.

ג. $3<P<4$ קיימים שני שרשים עבור $y$, שניהם גדולים מ-1 לכן $N = 4$.

ד. $P=3$. $y=1,3$; $\log y=0,\log 3$; $\log x=0,\pm\sqrt{\log 3}$; $N=3$.

ה. $P<3$ שני שרשים ממשיים עבור $y$ אבל רק אחד מהם גדול מ-1. $N=2$.

ת.187 לפי המשפט של הממוצעים החשבוניים וההנדסיים, יש לנו

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}\right) > \left(\frac{a_1}{a_2}\,\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

אפשר גם להוכיח את האי-שויון ע"י אינדוקציה: נניח כי

המשפט נכון עבור n ונסתכל בסדרה $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$

מאחר והנוסחה אינה תלויה באיזה איבר מתחילים, נניח כי $a_{n+1}$ גדול מ- $a_n$ וגם מ- $a_1$. (פרוש הדבר לבחור כאיבר האחרון אחד שהוא גדול משני שכניו, מה שתמיד אפשרי אם אין כל האיברים שווים).

$$\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)-\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)-1$$

$$=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}+\frac{a_n}{a_1}-1=\frac{1}{a_1a_{n+1}}(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_n)>0$$

ז.א.

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\ldots+\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)>\left(\frac{a_1}{a_2}\ldots+\frac{a_n}{a_1}\right)+1$$

ומזה האנדוקציה.

ת.188 העשב שהיה בשדה + הגידול של 24 ימים מספיק ל-1680 פרות ביום
" " + " " 60 " " ל-1800 " "
ומזה כי הגידול של 36 ימים מספיק ל-120 פרות ביום, ולכן העשב שהיה בשדה + הגידול של 96 ימים יספיק ל-(1800+120) פרות ליום, זאת אומרת ל-20 פרות במשך 96 ימים.

ת.189

$$a^7-a=a(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$$

מתוך כל זוג של מספרים עוקבים יהיה אחד זוגי ומתוך כל שלישיה יתחלק אחד ב-3. ובכן $(a-1)a(a+1)$ מתחלק ב-6.
עכשיו נניח כי השארית כשמחלקים $a$ ב-7 הוא $m$.

במקרים $m=0,1,6$

יתחלק ב-7 $a,\ a-1,\ a+1$ בהתאמה.

נבדוק את שאר האפשרויות:

א. $m=2$ אז ישאיר $a^2+a+1$ את השארית $1+2+4$, במלים אחרות יתחלק $a^2+a+1$ ב-7.

ב. $m=3$ $7=m^2-m+1$

ג. $m = 4$ $\quad 21 = m^2 + m + 1$ ולכן יתחלק a ב-7.

ד. $m = 5$ $\quad a^2 - a + 1$ יתחלק ב-7.

ת.190 היום הפרש הגילים הוא פי 3/2 מגיל הבת ולפני 6 שנים היה אותו הפרש פי 3 מגיל הבת דאז, כלומר גיל הבת הוכפל פי 2 במשך 6 שנים ולכן היתה אז בת 6 ועכשיו היא בת 12.

ת.191 נניח כי פתרונות המשואה הם רציונליים ונראה כי a,b,c לא יוכלו להיות כולם מספרים אי-זוגיים. ביתר דיוק, נראה כי אם הפתרונות רציונליים ו- b אי-זוגי אז לפחות אחד מבין a,c יצטרך להיות זוגי. נציב

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Delta^2 = b^2 - 4ac$$

ובכן $\Delta$ הוא אי-זוגי. נציב $b = 2m+1$ , $\Delta = 2n+1$ כש- m ו- n שלמים

$$4ac = b^2 - \Delta^2 = (b-\Delta)(b+\Delta)$$

$$= 4(n-m)(n+m+1)$$

$$ac = (n-m)(n+m+1)$$

אם m,n הם שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים, אז m-n זוגי. אם אחד זוגי והשני אי-זוגי אז $n + m + 1$ זוגי. לכן בשני המקרים ac זוגי ולא יוכלו גם a וגם c להיות אי-זוגיים.

ת.192 יהיה R הרדיוס של המעגל הנתון ו-O מרכזו. יהיה $\ell$ הישר הנתון ו- A הנקודה הנתונה עליו.

<u>בניה:</u> יהיה AB ניצב ל-$\ell$ מהצד הרחוק מהמעגל הנתון ו- P נקודה על המשיך BA כך ש-

$$\sphericalangle POB = \sphericalangle PBA$$

P יהיה מרכזו של המעגל המבוקש. ההוכחה פשוטה.

ת.193 נקח שלש מהנקודות A, B, C ונסתכל במעגל העובר דרכם ואשר הרדיוס שלו, לפי ההנחה, = 1. מרכזו O הוא החתוך של האנכים האמצעיים של AC, AB. עכשיו נתבונן בנקודה רביעית, D, של הקבוצה. למעגל BCD יש מרכז O' שהוא החתוך של האנכים האמצעיים של CD, BC כדי שגם BCD יהיה בעל רדיוס 1 דרוש כי $O'C = OC$ , זאת אומרת ש- D יהיה על המעגל ABC.

ת.194 תהיה $b_1, b_2, \ldots$ סדרת השאריות כשמחלקים את איברי הסדרה $a_1, a_2, \ldots$ ב-7, נוכל לכתוב

$$b_r = a_r - 7m_r$$

כש- $m_r$ הם מספרים שלמים. מזה יוצא כי

$$b_r - b_{r-1}b_{r-2} = a_r - 7m_r - (a_{r-1} - 7m_{r-1})(a_{r-2} - 7m_{r-2})$$
$$= 7(m_{r-1}a_{r-2} + m_{r-2}a_{r-1} - m_{r-1}m_{r-2} - m_r)$$

ובכן מחלק ב-7. יש לנו איפוא, $b_o = 1$, $b_1 = 2$,
$b_r - b_{r-1}b_{r-2}$, מחלק ב-7 וגם $0 \leq b_r < 7$
נוכל ליצר סדרת ה-$b_r$.

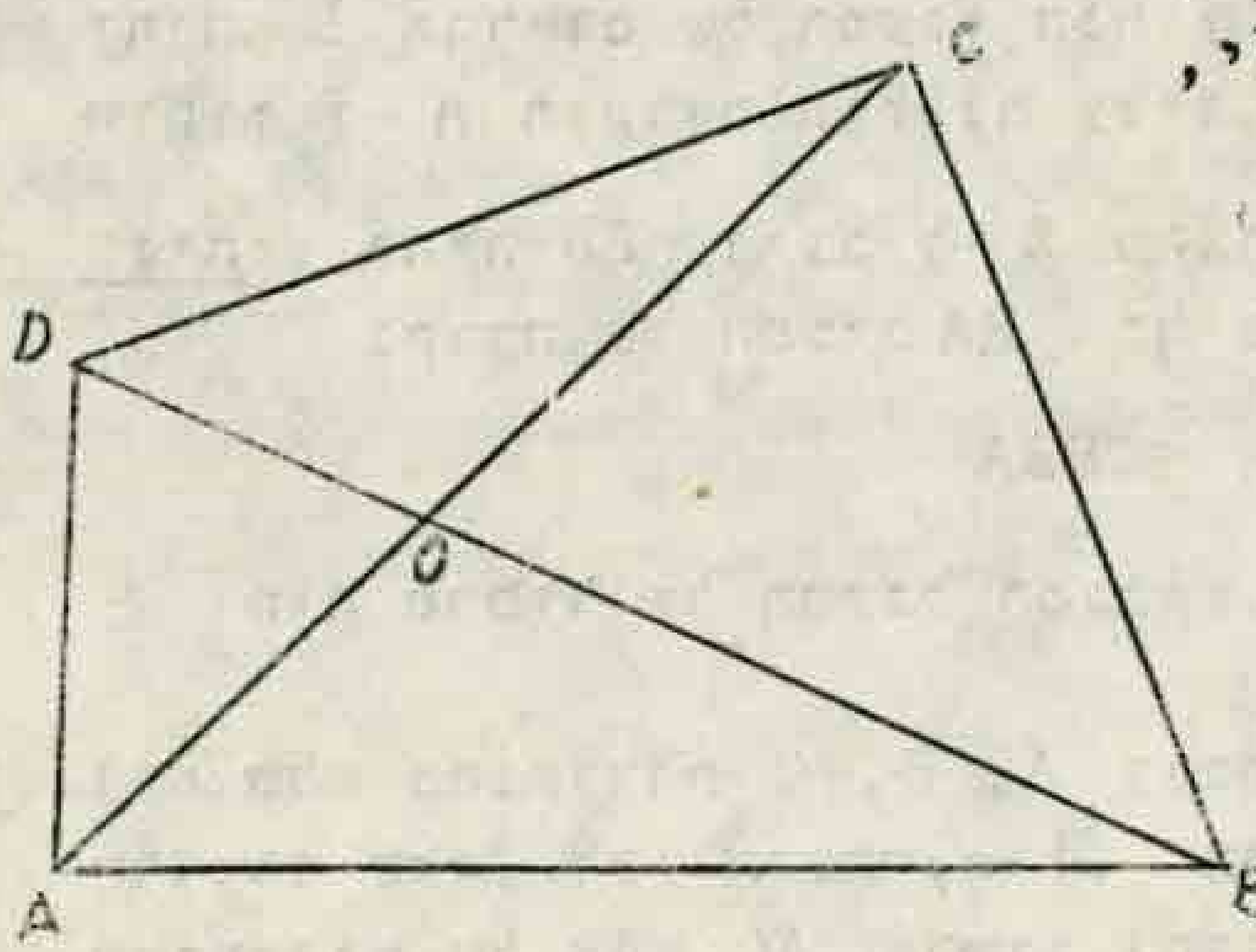
$b_o = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $b_4 = 1$, $b_5 = 4$
$b_6 = 4$, $b_7 = 2$, $b_8 = 1$, $b_9 = 2$

הסדרה תהיה איפוא,

1 ,2 ,2 ,4 ,1 ,4 ,4 ,2 ,1 ,2 ,2 ,4 ,1 ,4 ,4 ,2 ,....

זאת אומרת חזרה על המחזור (2, 4, 4, 1, 4, 2, 2, 1) שהוא בעל 8 איברים. מזה ש- $b_{366} = b_6 = 4$ וזה המספר המבוקש.

ת.195 נקודות BD הן הנקודות אשר עבורן סכום המרחקים מ-B ו-D הוא מינימלי, נקודות AC ממלאות תפקיד דומה עבור A,C לכן הנקודה שסכום מרחקיה מכל הנקודות A, B, C, D הוא מינימלי צריכה להיות הנקודה בה נפגשים שני הישרים AC, BD.



## רשימת פותרי השאלות מס. 181 - 195

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגריים ס"ה הנקודות של הפותר.

1. אברהם לאה, י תיכון, קרית מוצקין: 192,188 (5)
2. איזנמן יצחק, : 195 (4)
3. אלניה עמיר, יא תיכון חדש, ת"א : 93*,191-190,189*,186*,184-182
(21) 195
4. איש-שלום אריאל, תיכון ה', ת"א : (20) 195,193*,192-188,183
5. אלטמן בנימין, י תיכון מקצועי, חיפה: (26) 195,193*,192-188,184-182
6. אלכסנדר גד, י' תיכון עירוני י"ב,ת"א: (24) 195,192-188,184-183
7. אפלויג אלימלך, ת"א : (14) 191,189,186*,184-183
8. בוסל יצחק, יא ריאלי, חיפה : 193*,192-191,189,186*,184-182
(28) 195-194
9. בר יהושוע דוד, י מקצועי תיכון, חיפה: (22) 195,192-191,189,184-182
10. ברקוביץ מיכאל, יב ריאלי, חיפה: ( 195,192-191,189,186,184-181
11. גוטפרונד אריה, תיכון עירוני א, ת"א: (10) 192,189-188,184
12. גולדברג אלי, י תיכון ה', ת"א : (12) 195,192,189,184
13. גולדרינג מרדכי, י ריאלי, חיפה : (41) 195-187,186*,184-181
14. גולדשטיין מאיר, צ.ה.ל. ; 193*,192-191,189,186*,184
(22) 195-194
15. גרוס רוני, יא תיכון א', ת"א : (7) 189-188,84
16. דימיטריו יהודה, י תיכון מקצועי, חיפה: (9) 195,192,188
17. טליל אורי, יב ריאלי, חיפה : ,193*,191-188,186*,185-181
(43) 195-194
18. יהודאי עמירם, תיכון א', ת"א : (32) 195-194,192-188,186-184
19. מיזלס יוסי, יא גמנסיה עברית, י-ם: (20) 192-191,187,186*,184-182
20. סוריק אנדרי, מקצועי תיכון, חיפה: (20) 195,192,190-189,184-182
21. סלע מנדל, יא תיכון חדש, ת"א : 193*,192,190-188,186*,184-183
22. סתוי יונתן, יב הרצליה, ת"א: (46) 195-194,191-181
23. סתת שמואל, יא גמנסיה עברית, י-ם: 18) 195,192-191,189,186*,184
24. עמית מיכה, קרית מוצקין : ,193*,192,189,185-184,182
(24) 195-194
25. ענבל צבי, טכניון, חיפה : 193*,192-191,189,186*,185-182
(29) 195
26. קופלוביץ איתן, יב תיכון ב', ת"א: (21) 195,193*,192-189,186,184
27. קושניר ראובן, יב ריאלי, חיפה : ,193*,192*,191-188,186-181
(46) 195-194
28. קליין צבי, ט תיכון מאוחד, רחובות: (20) 195-194,192,190-188,184

29. קרבס אביאל, יא תיכון, קרית מוצקין: 187,184-183 (7)
30. קרוי משה, תיכון ה' תל-אביב : 192,186*,184 (7)
31. קריים משה, גימנסיה עברית ירושלים: 183 (3)
32. רבינוביץ לילי, תיכון, קרית מוצקין: 190 (2)
33. רזניק גבריאל, יא גמנסיה עברית י-ם: 195,192-191 (11)
34. רוקח אריה, י תיכון ב', ת"א: 195,192,184,182 (12)
35. רייך שמעון, י ריאלי, חיפה: 195,192-188,186,184-182 (29)
36. שור מיכאל, אהל שם, רמת-גן : 192-191,189,186*,184-183 (17)
37. שורץ גבריאל, תיכון א', ת"א: 192,184 (5)
38. שטיינברג אריה, תיכון א', ת"א: 194,184 (6)
39. שטיינר משה, יב' חולון : 192,189-188,186*,184-182, 193* (22)
40. שטייר שאול, תיכון ה', ת"א : 195,192,189-188,184 (16)
41. שמעונוביץ יעקב, יא, קרית מוצקין: 190,184 (4)
42. שמוקלר נח, גמנסיה עברית, ירושלים: 192,189-188,184-183, 195-194 (21)
43. שקד צבי, יא גמנסיה עברית, ירושלים: 195-194,189-188,186,184 (21)

* *

*

# התכן

דבר המערכת אל הקורא ........ 1

בעיה ........ 1

תכנון ליניארי – חלק ראשון ........ יוסף גיליס וחנה ליפסון 2

מספרי פיבונצ'י – חלק ראשון ........ שמעון רייך, י"א הריאלי 11

ציאנשידזי, משחק סיני ........ 21

בעיות חדשות ........ 23

פתרון הבעיות ת. 181 - 195 ........ 25

רשימת פותרי השאלות ש', 181 - 195 ........ 31

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בנק הדואר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.