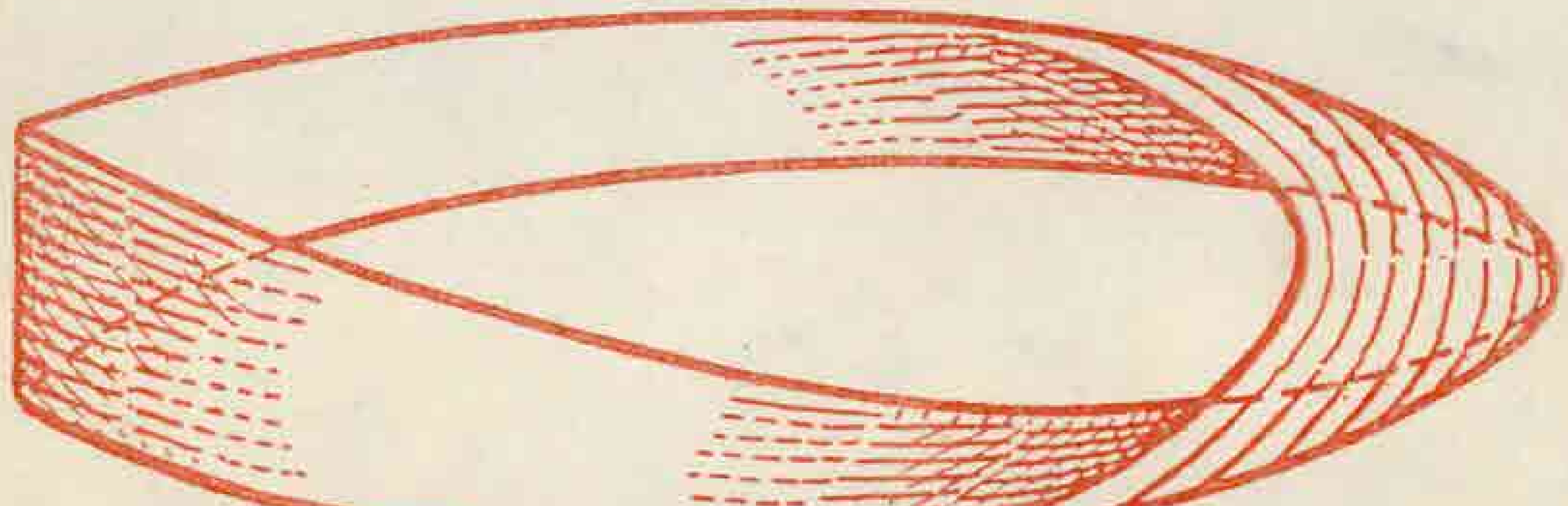
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 2 — רחובות, אדר ב׳ תשכ"ה, מרץ 1965 — מס 8

יוצא לאור בחסות

ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. גילים

דבר המערכת

תודתנו העמוקה נתונה לכל קוראינו ובעיקר לאלה הלוקחים חלק פעיל ע"י השתתפות בתחרות, הצעת בעיות, וגם כתיבת מאמרים. אנחנו שמחים במיוחד לקבל מאמרים מהקוראים ואל יתאכזבו מחבריהם אם לא נוכל לפרסם את פרי עבודתם כבר עם קבלתו. שקולי תקציב מגבילים אותנו למסגרת קטנה למדי, אבל כל מאמר נבדק יפה ובמידה שיתאים עורכים אותו לדפוס, ובמרוצת הזמן יופיע.

תפוצת הגליונות וההשתתפות בתחרות הולכות שתיהן ומתרחבות. תופעה זו מעודדת את העוסקים במלאכה ונשתדל להצדיקה.

מועדון זת - חוג תל-אביבי לנוער שוחרי מתמטיקה

נתבקשנו להודיע על קיומו של החוג הנ"ל הנפגש פעם בשבועיים בימי שלישי בשעה 18.00 בחדר 204, אגף לפיסיקה של בניני שנקר, אוניברסיטת תל-אביב, רמת-אביב. בין המרצים השנה היו:

פרופ' ל.נ. פוזנר	על	"מבוא לתורת ההסתברות".
" ש. אברבנל	על	"כמה דוגמאות לניצול שיטות מתמטיות בפיסיקה".
מר ד. שמיר	על	"החרת משוואות אלגבריות ממעלה n".
פרופ' י. גילים	על	"מבוא לתורת האינפורמציה".
מר נ. אליוסף	על	"בעיות בגיאומטריה לא אויקלידית".

תלמידים המעונינים להצטרף מתבקשים לשלוח פרטים על כתובתם, ביה"ס, והכיתה בה הם לומדים, לפי הכתובת:

מזכירות המחלקה למתמטיקה שמושית, אוניברסיטת ת"א, רמת-אביב.

תכנון ליניארי - המשך

יוסף גיליס וחנה ליפסון

הקדמה

בחלק הראשון של מאמר זה הצגנו כמה בעיות, כדי להדגים את מהותו של תכנון ליניארי. הראינו איך לנסח את הבעיות האלה באופן אלגברי וגם נתנו שיטה גראפית לפתרון הבעיה הראשונה. ראינו כי אין לצפות כי שיטה זו תועיל כשמספר המשתנים עולה על שנים והבטחנו לספק שיטה אלגברית הניתנת לשמוש יותר כללי. בחלק זה של המאמר נתאר גישה אלגברית כללית ונפתור על ידה את הבעיה הראשונה עם שנוי קל. אחרי הטפול בבעיה בצורתה החדשה נחזור לבעיה המקורית ונראה איך מאפשרת השיטה האלגברית להשיג הבנה עמוקה יותר אפילו בבעיה הזאת הנראית כטריביאלית.

I. נסוח הבעיה

נתחיל בנסוח האלגברי. מתוך כל הזוגות (x, y) המקיימים את התנאים: -

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \qquad (1.1)$$

$$20x + 18y \leq 39{,}000 \qquad (1.2)$$

$$70x + 50y \leq 116{,}500 \qquad (1.3)$$

$$3x + 4y \leq 6{,}000 \qquad (1.4)$$

חפשנו את הזוג אשר עבורו

$$R = 35x + 25y \qquad (1.5)$$

יהיה גדול ביותר. מסיבות אשר תהיינה מובנות אח"כ נכניס עכשיו את השנוי שעליו דברנו. במקום הבעיה המקורית הנ"ל נחפש את הערך הגדול ביותר של

$$P = 35x + 30y \qquad (1.6)$$

כשהתנאים $(1.1) \ldots (1.4)$ נשארים ללא שנוי

II. פתרון סביר ראשון

הצעד הראשון הוא להחליף את אי-השויונות (1.2) ... (1.4) במשואות. זאת נעשה ע"י התחבולה הפשוטה של הכנסת משתנים נוספים המכונים בשם "משתני עודף". ובכך נכתוב

$$20x + 18y + r = 39,000 \quad (2.1)$$

$$70x + 50y + s = 116,500 \quad (2.2)$$

$$3x + 4y + t = 6,000 \quad (2.3)$$

עם התנאי שהמשתנים x, y, r, s, t לא יוכלו להיות שליליים.

מהמשואות (2.1) - (2.3) רואים כי עבור כל זוג (x, y) מייצג r את כמות הדשן אשר לא נוצל, s את כמות המים הבלתי מנוצלים, ו- t את כח האדם שלא נוצל. ועוד נשים לב לעובדה כי r, s ו- t אינם מופיעים בנוסחה של P מאחר שאין לצפות לרווח ממקורות אשר לא נוצלו!

לפנינו עתה שלש משואות בשישה נעלמים, ועל כן יש למערכת המשואות מספר אין-סופי של פתרונות. מטרתנו היא למצא את האופטימלי מבין כל הפתרונות ועל כן לא ייפלא אם לא נלך בדרך המוכרת לכם לפתרון מערכת משואות ליניאריות, אם כי נבחר בדרך שתוביל אותנו במספר סופי של צעדים אל הפתרון המבוקש.

נפתח בקביעת פתרון אפשרי ע"י כך שנאפס שניים מתוך המשתנים ונפתור בשביל שלושה הנותרים. ונתחיל דוקא בהצבה

$$x = y = 0$$

יוצא כי

$$r = 39,000 \ ; \ \ s = 116,500 \ ; \ \ t = 6,000$$

אזי $P = 0$. פרוש הדבר: אם נשאיר את כל הדשנים, את כל המים, ואת כל כוח האדם בלתי מנוצלים, ז.א. אם לא נעבד את הקרקע כלל, כי אז אין לצפות לכל רווח! במילים אחרות, מי שאינו עובד את אדמתו מאין ישבע לחם?

פתרון כלשהו של (2.1) - (2.3) אשר בו כל המשתנים הם בלתי-שליליים ומספר המשתנים השונים מאפס זהה עם מספר המשואות (במקרה שלנו: שלש) ייקרא <u>פתרון סביר</u>; המשתנים השונים מאפס יהוו את <u>הבסיס</u> של הפתרון הסביר. במקרה שלפנינו יהיה הבסיס של הפתרון הסביר הראשון (r,s,t).

דרך הפתרון תהיה ליצור שיטה להחלפתו של כל פתרון סביר ע"י פתרון סביר אחר אשר עבורו P גדול יותר - כל עוד אפשרי הדבר. כשנגיע למצב שאין למצא עוד החלפה כזאת נדע כי מצאנו את הפתרון הסביר האופטימלי.

נזכיר כאן - בלי הוכחה - את המשפט כי הפתרון האופטימלי - או אחד הפתרונות האופטימליים כשיש יותר מאחד - נמצא תמיד בין הפתרונות הסבירים. מהמשפט הכללי הזה נובע כי הפתרון הסביר האופטימלי יתן את הפתרון לבעית התכנון הליניארי.

נחזור עתה לבעיתנו המיוחדת. התחלנו בפתרון הסביר: -

$$(x; y; r; s; t) = (0; 0; 39{,}000; 116{,}500; 6{,}000)$$

אבל ברור כי אין זה פתרון אופטימלי מאחר שכל עיבוד של קרקע יכניס רווח צפוי כל שהוא; לכן עלינו לחפש פתרון סביר אחר, ז.א. להוציא מהבסיס אחד מבין המשתנים r, s ו-t ולהחליפו ב- x או y. נראה שיטה איך לקבוע את המשתנה אשר החלפתו תביא הגדלת רווח גדולה ככל האפשר.

III. שיפור הפתרון הסביר

מ- (1.5) רואים כי הוספת יחידה ל-x תגדיל את P ב- 35, בזמן שהוספת יחידה ל-y תגדיל את P רק ב- 30. לכן תהיה זאת עיסקה טובה יותר אם נתן ל-x ליהפך חיובי ונאפס אחד מבין המשתנים r, s ו-t. מ- (2.1) נובע כי עבור כל פתרון סביר יתקיים

$$20x = 39{,}000 - 18y - r \leqslant 39{,}000$$

ולכן

$$x \leqslant \frac{39{,}000}{20} \qquad (3.1)$$

כמו כן נובע מ- (2.2) כי

$$x \leqslant \frac{116{,}500}{70} \qquad (3.2)$$

ומ- (2.3) כי

$$x \leqslant \frac{6{,}000}{3} \qquad (3.3)$$

כדי לקיים את כל שלש ההגבלות האלה מספיק לדאג לחמורה מביניהן. יוצא מזה כי הערך הגדול ביותר האפשרי עבור x הוא זה שנקבע ע"י (3.2), ז.א. $x = \frac{11{,}650}{7}$. ניתן איפוא ל-x את הערך הזה; מ- (2.2) נובע אז כי $y = s = 0$.

הבסיס של פתרוננו הסביר החדש הוא (x,r,t) עם

$$x = \frac{11,650}{7}$$

ערכו החדש של P הוא 58,250 – התקדמות ניכרת לעומת הערך הקודם!

כדאי להבהיר את המשמעות האמיתית של מה שעשינו. החלפנו את הפתרון הסביר הראשון (ז.א. לא לעבד בכלל את השטח) בפתרון אחר והוא לנצל את כל המים לשם גידול תירס. מה שבררנו ב- (3.1) ו- (3.3) הוא כי הדשנים וכוח האדם העומדים לרשותנו מספיקים לאפשר פעולה זו. אבל עוד טרם בדקנו אם פתרון זה אופטימלי הוא. יש להתחשב באפשרות כי ע"י הטיית חלק מהמים לגידול סלק מספוא, ואולי ע"י ניצול יתר של הדשנים ושל כוח האדם, נוכל להשיג שיפור נוסף.

IV. שיפור נוסף וסופי

נתבונן עכשיו ב- (2.2), המשואה אשר ממנה קבענו את ערכו האחרון של x, ונכתוב אותה בצורה:

$$x = \frac{11,650}{7} - \frac{5}{7}y - \frac{1}{70}s \qquad (4.0)$$

נציב את ה- x הזה ב- (2.1) וב- (2.3). הראשון נותן

$$20\left(\frac{11,650}{7} - \frac{5}{7}y - \frac{1}{70}s\right) + 18y + r = 39,000$$

ז.א.

$$26y + 7r - 2s = 40,000 \qquad (4.1)$$

כמו כן נובע מ- (2.3) כי

$$130y - 3s + 70t = 70,500 \qquad (4.2)$$

והרווח הצפוי עובר ל-

$$P = 35\left(\frac{11,650}{7} - \frac{5}{7}y - \frac{1}{70}s\right) + 30y$$

$$= 58,250 + \left(30 - \frac{35x5}{7}\right)y - \frac{1}{2}s$$

$$= 58,250 + 5y - \frac{1}{2}s \qquad (4.3)$$

מזה מתעוררת המחשבה כי ניתן להגדיל את P ע"י הפיכת y לחיובי בתנאי כי נוכל לעשות זאת בלי להחזיר את s לבסיס.

בקיצור עלינו להוציא או את r או את t מהבסיס ולהחליפו ב- y. לשם זה נצטרך לבחור בין r ו- t.

מאחר ונגזר על s שיישאר אפס רואים אנחנו מ- (4.1) כי

$$26y \leqslant 40{,}000 \qquad (4.4)$$

ומ- (4.2) כי

$$130y \leqslant 70{,}500 \qquad (4.5)$$

נוכל לקיים גם את (4.4) וגם את (4.5) ע"י הצבת

$$\begin{aligned} y &= \frac{70{,}500}{130} \\ &= \frac{7050}{13} \qquad (4.6) \end{aligned}$$

$$t = s = 0 \qquad (4.7)$$

אם נציב את הערכים האלה ב- (4.0) נראה כי

$$\begin{aligned} x &= \frac{11{,}650}{7} - \frac{35{,}250}{91} \\ &= \frac{16{,}600}{13} \qquad (4.8) \end{aligned}$$

ובכן

$$\begin{aligned} P &= 35x + 30y \\ &= 60{,}961\frac{7}{13} \qquad (4.9) \end{aligned}$$

שוב, כפי שרואים, התקדמות לעומת הערך הקודם! הפתרון החדש הוא איפוא

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{16{,}600}{13} \\ y &= \frac{7{,}050}{13} \\ r &= 3700 \\ s &= t = 0 \\ P &= 60{,}961\frac{7}{13} \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

פתרון זה מנצל את כל המים ואת כל כוח האדם אבל משאיר חלק קטן מהדשנים בלתי מנוצל. לעומת הפתרון הקודם נוסף עתה סלק מספוא ואילו שטח התירס קטן. אם נחלץ את y מבין (4.2), (4.3) נקבל

$$P = 60{,}961\frac{7}{13} - \frac{5}{13}s - \frac{35}{13}t \qquad (4.11)$$

ומזה ברור כי הערך שהשגנו עבור P הוא אופטימלי וכי הוא יתקבל אך

ורק כש-

$$s = t = 0$$

ז.א. כי הפתרון הוא אופטימלי וגם חד-ערכי. פתרנו אם כן את הבעיה.

V. הבעיה המקורית

מה היה קורה אילו הפעלנו שיטה זו על בעיתנו המקורית, במילים אחרות אילו חפשנו את הערך המכסימלי של R (ז.א. של $35x + 25y$)? קל לראות כי כל הנתוח עד ל- (4.2) ועד בכלל היה עובר ללא שנוי, אבל שבמקום (4.3) היינו מקבלים

$$R = 58{,}250 - \frac{1}{2}s \qquad (5.1)$$

מזה רואים אנחנו כי אין R יכול אף פעם להיות גדול מ- 58,250 ואת הערך הזה נשיג אם יתקיים התנאי היחידי $s=0$. ובכך השגת ערך אופטימלי עבור R תלויה בתנאי אחד על המשתנים, ז.א. כי יש עדיין מספר אינסופי של פתרונות. עכשיו שהגענו למסקנה זו מתוך נתוח אלגברי נסתכל בפתרון הגראפי בחלק הראשון של מאמר זה (בחוברת הקודמת), ונראה כי בציור הגיאומטרי הנתון שם הקווים

$$R = \text{קבוע}$$

מקבילים כולם לישר EMF; או, יותר נכון, היו מקבילים אילו דייקנו יותר בציור הגראף! יוצא כי הישר הראשון מהמשפחה אשר ייפגש עם התחום T יעשה זאת לכל אורך הקטע EM, ז.א. כי כל נקודה (x,y) של הקטע EM תתן אותו הערך האופטימלי: -

$$R = 58{,}250$$

VI. מערכת הסימפלכס

לאחר שהעברנו את רעיונות היסוד של הפתרון בפירוט רוצים אנחנו להציע מערכת חסכונית ומסודרת לכתוב את העבודה, סכימה הידועה בשם מערכת הסימפלכס. נתחיל שוב בבעיה הראשונה ונכתוב אותה בצורה: -

$$\left.\begin{aligned} 35x + 30y \phantom{{}+t} &= P \\ 20x + 18y + r &= 39{,}000 \\ 70x + 50y + s &= 116{,}500 \\ 3x + 4y + t &= 6{,}000 \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

נהוג להציג את המשואות האלה ע"י הסכימה:

	35	30	0	0	0	B
	x	y	r	s	t	
דשנים	20	18	1	0	0	39,000
מים	70	50	0	1	0	116,500
ימי עבודה	3	4	0	0	1	6,000

טבלה 1

משמעותו של טור B היא: ערך המשתנה המתאים בפתרון הסביר הנדון.

טבלה זו מכילה את כל נתוני הבעיה, אבל למטרת פתוח הפתרון נצטרך ליצור טבלה מורחבת. נתחיל בהוספת שני טורים מצד שמאל. בשמאלי ביותר נרשום את סדרת משתני הבסיס בפתרון הסביר הנדון, ומימינו את "התרומות לרווח" של כל אחד מהמשתנים האלה עם סימנים הפוכים. הצעד הבא הוא להכפיל כל מספר בשאר הטבלה ע"י ה"תרומה לרווח" שבאותה שורה ולסכם. את הסכום מכל טור וטור אנחנו רושמים למטה בשורה המסומנת ב-Z. בסוף נחשב, עבור כל טור, את המספר Z + C, כאשר C הוא המספר הרשום למעלה בשורה הראשונה.

C		35	30	0	0	0	B	B_1	
		x	y	r	s	t			
r	0	20	18	1	0	0	39,000	1950	
s	0	70	50	0	1	0	116,500	$\frac{11,650}{7}$	←R
t	0	3	4	0	0	1	6,000	2,000	
Z		0	0	0	0	0			
Z+C		35	30	0	0	0			
		↑ K							

טבלה 2

שוב משמעותו של הטור B הוא: ערך המשתנה המתאים בפתרון הסביר הנדון. בטבלה 2 הוספנו עוד טור, אחרון מצד ימין וסימנו אותו ב- B_1

בו רשמנו את ההגבלות (3.1) - (3.3) על גידול המשתנה שנבחר להחלפה.
טור זה מתקבל בדרך הבאה: מתוך שיקולים שהובהרו בהתחלת סעיף III
בוחרים בערך החיובי הגדול ביותר שבשורה Z + C (בתנאי שישנם שם
בכלל ערכים חיוביים) ומסמנים את הטור המתאים ב- $\overset{\uparrow}{K}$ (ר' טבלה 2).
הטור B_1 מתקבל ע"י חלוקת כל מספר שבטור B במספר שבאותה שורה בטור
המסומן ב- $\overset{\uparrow}{K}$. יש להדגיש כי כל התהליך הזה מותנה בהימצאם של מספרים
חיוביים בשורה Z+C . במקרה ואין שם אף מספר חיובי אחד פרוש הדבר
כי הגענו כבר לפתרון הסביר האופטימלי, ז.א. שפתרנו את הבעיה
כשהטור B נותן את הערכים האופטימליים של המשתנים.

טבלה 2 מציגה את הפתרון הסביר הראשון אשר בו בחרנו.
כשנעבור לפתרונות סבירים אחרים ניצור טבלאות חדשות. תהליך
ההתקדמות מטבלה אחת לשניה הוא למעשה רק בצוע באופן מסודר ופורמלי
של הפעולות אשר תוארו על כל פרטיהן בסעיפים III, IV לעיל. כדי
להקל על ההסבר נשתמש בסימון הבא: אם α הוא המשתנה המסמן את שמה
של שורה איזו שהיא בטבלה ו- β הסימן המאפיין איזה טור אז נסמן ב-
$S(\alpha, \beta)$ את המספר המופיע במפגש של השורה המדוברת עם הטור המדובר.
למשל בטבלה 2 יש לנו

$$S(r, y) = 18$$

$$S(s, t) = 0$$

$$S(t, x) = 3,$$

וכו'.

ועכשיו עלינו לבנות את הטבלה עבור הפתרון הסביר השני. לשם
זה אנו בוחרים במספר הקטן ביותר בטור, B (במקרה שלנו הוא
$\left(S(s,B_1) = \frac{11,650}{7}\right.$ ומסמנים את השורה המתאימה (אצלנו שורה s)
בסימן R←. בפתרון הסביר הבא יש להוציא מהבסיס את המשתנה השייך
לשורה המסומנת ב-R← ולהכניס במקומו את המשתנה השייך לטור המסומן
ב-$\overset{\uparrow}{K}$. כדי להקל על המשך העבודה נעביר את המשתנה החדש (במקרה שלנו
x) לשורה הראשונה. את השורה הראשונה הזאת (של טבלה 3) יוצרים
כזה: בטור השני מכניסים כמובן את "התרומה לרווח" המתאימה למשתנה
ז.א. הגידול שייגרם ב- P מתוך גידול של משתנה זה ביחידה אחת (עם
סימן הפוך). את כל שאר איברי השורה הראשונה בטבלה 3 מקבלים מהשורה
המסומנת ב-R← בטבלה 2 ע"י חלוק במספר המופיע במפגש של השורה R←
עם הטור $\overset{\uparrow}{K}$. במקרה שלנו יוצא:

$$S(x,x) = 1; \quad S(x,y) = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}\ ; \quad S(x,r) = S(x,t) = 0;$$

$$S(x,s) = \frac{1}{70}\ ; \quad S(x,B) = \frac{11,650}{7}$$

והקורא יכיר כאן את רשימת המקדמים המופיעים במשוואה (4.0).

את החוק הכללי המאפשר מלוי שאר הטבלה אפשר לנסח כדלקמן: –

יהיה γ המשתנה החדש שנכנס לבסיס, אז, עבור כל שני משתנים אחרים α, β, נכתוב

$$S(\alpha,\beta) = S'(\alpha,\beta) - S(\gamma,\beta) \cdot S'(\alpha,\gamma) \qquad (6.2)$$

כש-S מסמן את איברי הטבלה החדשה ו- 'S את איברי הטבלה הקודמת.

הקורא יראה כי כדי להפעיל חוק זה לשם בניית טבלה 3 כולה נהיה זקוקים רק לאותם האיברים של הדיאגרמה החדשה, אשר אמנם כבר הכנסנו בתחילה, כלומר איבריה של השורה הראשונה. במקרה שלנו מדובר באיברי השורה x, ובכן יש לנו

$$S(r,y) = S'(r,y) - S(x,y) \cdot S'(r,x)$$

$$= 18 - \frac{5}{7} \cdot 20 = \frac{26}{7}$$

ואת שאר איברי השורות r, t בטבלה 3 נכניס באופן דומה. את השורה Z נחשב מתוך ההגדרה המקורית הנותנת, במקרה דנן,

$$S(Z,\beta) \;=\; -35\; S(x,\beta)$$

ומילוי השורה C + Z הוא טריביאלי ומידי.

C		35	30	0	0	0	B	B_1	
		x	y	r	s	t			
x	-35	1	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{70}$	0	$\frac{11,650}{7}$	2,330	
r	0	0	$\frac{26}{7}$	1	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{40,000}{7}$	$\frac{20,000}{13}$	
t	0	0	$\frac{13}{7}$	0	$-\frac{3}{70}$	1	$\frac{7,050}{7}$	$\frac{7,050}{13}$	←R
Z		-35	-25	0	$-\frac{1}{2}$	0			
Z+C		0	5	0	$-\frac{1}{2}$	0			
			↑ K						

טבלה 3

איברי השורות r ו־t בטבלה זו הם למעשה מקדמי המשוואות (4.1) (4.2) בהתאמה אחרי שמחלקים כל אחת מהמשוואות במקדם של המשתנה המאפיין את השורה.

מאחר ויש בדיוק איבר חיובי אחד בשורה Z+C החדשה, הוא האיבר בטור y, רואים כי יש לסמן הפעם את הטור הזה ב־ $\underset{K}{\uparrow}$, ומכאן נוכל ליצור את הטור B_1 ע"י

$$S(\alpha,B_1) = S(\alpha,B)/S(\alpha,y)$$

מאחר והאיבר הכי קטן בטור B_1 הוא $S(t,B_1)$ נוכל להחליט על הצעד הבא, והוא להוציא את t מהבסיס ולהכניס במקומו את y. לפי זה נוכל עכשיו ליצור את הדיאגרמה הבאה המופיעה בטבלה 4.

ראשית כל נמלא את השורה הראשונה שתתאים ל־y כפי שעשינו עבור x בטבלה 3. לשם זה נקח את השורה t מטבלה 3 ונחלק את איבריה באיבר $S(t,y)$ של טבלה 3, ז.א. ב־ $\frac{13}{7}$. אחרי שמלאנו ככה את השורה y נוכל למלא את שאר הטבלה בהסתמך על הנוסחה (6.2) הקובעת במקרה זה כי

$$S(\alpha,\beta) = S'(\alpha,\beta) - S(y,\beta) \cdot S'(\alpha,y) \qquad (6.3)$$

למשל

$$S(x,s) = \frac{1}{70} - (-\frac{3}{130}) \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{65}$$

ואת שאר האיברים נחשב באופן דומה.

C		35	30	0	0	0	B	B_1
		x	y	r	s	t		
y	-30	0	1	0	$-\frac{3}{130}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{7,050}{13}$	
x	-35	1	0	0	$\frac{2}{65}$	$-\frac{5}{13}$	$\frac{16,600}{13}$	
r	0	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	-2	$\frac{25,900}{7}$	
Z		-35	-30	0	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{35}{13}$		
Z+C		0	0	0	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{35}{13}$		

טבלה 4

מאחר ובשורה Z + C אין עכשיו בכלל איברים חיוביים אנחנו רואים כי הגענו לסוף התהליך. הערכים הסופיים של x, y הם המספרים המתאימים בטור B ואת הערך של P נוכל לחשב בנקל.

VII. סיכום.

הקורא יראה מיד כי הפעולות הפורמליות שתוארו בסעיף VI הן בדיוק מה שהצגנו (בלי דיאגרמות) בסעיף IV. והגם והתהליך נראה כמסובך בהיכרות ראשונה, למעשה הוא פשוט, ואפשר, אחרי הרגל, לבצע את כל הפעולות ללא צורך במחשבה מרובה. ואמנם הרגיל בתהליכים האלה היה יכול לכתב ולמלא את שלש הדיאגרמות תוך דקות ספורות. ברור כמו כן כי לא יהיה קשה להפעיל שיטה זו על בעיות אחרות. מספר הפעולות (ולכן הזמן הדרוש לביצוען) יעלה עם מספר המשתנים ומספר האי-שויונות. כשעולים מספרים אלה לכמה עשרות, כפי שיכול לקרות במקרים מעשיים, הופכת שאלת זמן הפתרון לרצינית ואז אין מנוס משמוש במחשבים אלקטרוניים מהירים. אבל כל עוד המספרים קטנים אין קושי בפתרון כמו זה שהוצג לעיל.

לפעמים נתקלים אנחנו באי-שויונות בכוון ההפוך מאלה שבבעיה שנידונה במאמר זה. למשל בבעיה ב' (ראה את החלק הראשון של המאמר בחוברת הקודמת) נמצאים כל האי-שויונות בכוון ההפוך. אין בזה כל סיבוך של ממש מאחר ונוכל תמיד להפוך את האי-שויון ע"י הכפלה ב-1-. לדוגמא אפשר לכתוב במקום

$$180x + 120y + 240z \geq 210$$

את האי-שויון

$$-180x - 120y - 240z \leq -210$$

דבר דומה קורה כשהבעיה היא לחפש ערך מינימלי של איזו פונקציה במקום ערך מכסימלי (כפי שעשינו לעיל), כי גם אז אפשר להחזיר את הבעיה לצורה המוכרת ע"י החלפת הסימן.

לפעמים גוררים צעדים אלה קשיים חדשים אשר לא הופיעו בעבודתנו לעיל (למשל, לא תמיד קל למצא פתרון סביר ראשון שישמש כנקודת מוצא) ואמנם כבר עובדו שיטות להתגבר על קשיים אלה. ישנם גם כמה משפטים יפים המאפשרים הסקת הפתרון של בעיה אחת מתוך הפתרון של בעיה שניה ה"צמודה" לראשונה. כאן לא נוכל להיכנס לכל ההתפתחויות המתקדמות, אבל אלה מביניכם שימשיכו להתענין בנושא ימצאו ספרות ענפה לשרותם. בינתיים נסיים את המאמר הזה בבעיה: -

מבין השלישיות (x, y, z) המקיימות

$$\left.\begin{array}{r} 20x + 8y + z \leq 100 \\ 6x + 3y + 11z \leq 90 \\ 2x + 3y + 3z \leq 40 \\ x + y + z \leq 15 \\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0 \end{array}\right\}$$

למצא את השלישיה אשר עבורה

$$P = 3x + 2y + z$$

משיג את ערכו הגדול ביותר.

בעמוד 30 תוכלו למצא פתרון בעיה זו, מסודרת בהתאם לסכימה שתארנו בסעיף VI. נשאיר לקורא, במידה שלא יפתור את הבעיה בעצמו, לנסות להבין את הסכימה שלנו.

מספרי פיבונצ'י (FIBONACCI) (המשך)

שמעון רייך (י"א הריאלי, חיפה)

בחלק זה של המאמר נוכיח כמה משפטים הקושרים את מספרי פיבונצ'י עם תורת המספרים.

<u>משפט 1</u>. לשני מספרי פיבונצ'י עוקבים אין מחלק משותף גדול מ-1, כלומר

$$(U_n, U_{n+1}) = 1$$

<u>הוכחה</u>. נניח $(U_n, U_{n+1}) = x$. מאחר ש- x מחלק גם את U_n וגם את U_{n+1} , מוכרח הוא לחלק גם את U_{n-1} $(= U_{n+1} - U_n)$.
אפשר להמשיך ככה ורואים כי x יחלק גם את $U_{n-2}, U_{n-3}, \ldots$,
ובסוף שיחלק גם את U_2 . אבל $U_2 = 1$ ומזה $x = 1$.

<u>משפט 2</u>. אם a מחלק ב- b אז U_a מחלק ב- U_b.

<u>הוכחה</u>. בחלק הראשון של המאמר (ראה החוברת הקודמת) הוכחנו כי,

$$U_{n+m} = U_{n-1} U_m + U_n U_{m+1} \tag{1}$$

עכשיו נניח כי $a = bc$ ועלינו להוכיח כי U_{bc} מחלק ב- U_b, הדבר מובן מאליו כש- $c=1$ ונוכיח את המקרה הכללי ע"י אינדוקציה על c. נניח כי המשפט נכון עבור c, ואז יהיה לנו, לפי (1),

$$U_{b(c+1)} = U_{bc+b}$$

$$= U_{bc-1}U_b + U_{bc}U_{b+1} \tag{2}$$

אבל האיבר הראשון מצד ימין מכיל U_b כגורם, והאיבר השני מחלק גם הוא ב- U_b מאחר ולפי ההנחה האינדוקטיבית U_{bc} מחלק ב- U_b. יוצא איפוא כי גם $U_{b(c+1)}$ מחלק ב- U_b.
מ.ש.ל.

<u>משפט 3</u>.
$$(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$$

להוכחה נשתמש באלגוריתם של אוקלידס. נניח כי $m > n$

$$m = nx_o + s_1 \quad (0 < s_1 < n)$$

$$n = s_1x_1 + s_2 \quad (0 < s_2 < s_1)$$

$$s_{i-2} = s_{i-1}x_{i-1} + s_i \quad (0 < s_i < s_{i-1})$$

$$s_{i-1} = s_ix_i$$

ואז כידוע, $(m, n) = s_i$

נסתכל במשואה הראשונה של האלגוריתם, ממנה נקבל

$$(U_m, U_n) = (U_{nx_o+s_1}, U_n)$$

$$= (U_{nx_o-1}U_{s_1} + U_{nx_o}U_{s_1+1}, U_n) \tag{3}$$

לפי (1). אבל, לפי משפט 2, U_{nx_o} מחלק ב- U_n ולכן

$$(U_m, U_n) = (U_{nx_o-1}U_{s_1}, U_n) \qquad (4)$$

עכשיו לפי משפט 2 כל הגורמים של U_n נמצאים בין אלה של U_{nx_o} ולכן, לפי משפט 1, אין גורם משותף ל- U_n ול- U_{nx_o-1}. נובע איפוא מ- (4) כי

$$(U_m, U_n) = (U_{s_1}, U_n) \qquad (5)$$

אפשר להמשיך בטענה שהובילה עד (5) ולהוכיח, באותה דרך, כי

$$\begin{aligned}(U_m, U_n) &= (U_{s_1}, U_n)\\ &= (U_{s_2}, U_{s_1})\\ &= (U_{s_3}, U_{s_2})\end{aligned}$$

$$= (U_{s_{i-1}}, U_{s_i}) \qquad (6)$$

אבל s_i מחלק את s_{i-1}, ולכן רואים ממשפט 2 כי U_{s_i} יחלק את $U_{s_{i-1}}$, ז.א.

$$\begin{aligned}(U_m, U_n) &= U_{s_i}\\ &= U_{(m,n)}\end{aligned}$$

<u>משפט 4</u>. תנאי מספיק והכרחי ש- U_n יתחלק ב- U_m הוא ש- n יתחלק ב- m.

<u>הוכחה</u>. ראינו כבר במשפט 2 כי התנאי מספיק. נשאר איפוא להוכיח את הכרחיותו. נניח כי U_n מתחלק ב- U_m ונוכיח כי n מתחלק ב- m. לפי ההנחה

$$(U_n, U_m) = U_m$$

ולכן, לפי משפט 3, $m = (m,n)$

וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

<u>הערה</u>. אפשר לנצל את המשפט האחרון כדי לקבל אינפורמציה רבה על תכונות אריתמטיות שונות של מספרי פיבונצ'י. למשל ידוע כי $U_4=7$, ולכן U_n יתחלק ב- 7 אך ורק כש- n הוא מכפלה של 4, וכו'.

משפט 5. אם a הוא מספר שלם אז בין a^2 מספרי פיבונצ'י הראשונים יימצא לפחות אחד שיתחלק ב- a.

הוכחה. יסמן $\overline{U}_n$ את השארית המתקבלת מחלוקת U_n ב- a ונסתכל בקבוצת הזוגות

$$[\overline{U}_1;\ \overline{U}_2],\ [\overline{U}_2;\ \overline{U}_3],\ [\overline{U}_3;\ \overline{U}_4]\ \ldots,\ [\overline{U}_n;\ \overline{U}_{n+1}]\ \ldots$$

$$[\overline{U}_{a^2};\ \overline{U}_{a^2+1}],\ [\overline{U}_{a^2+1};\ \overline{U}_{a^2+2}]$$

ייתכנו a שאריות שונות (כולל 0) ולכן לא יוכל מספר הזוגות השונים לעלות על a^2. מאחר ויש בקבוצה a^2+1 זוגות יהיה לפחות אחד מהם זהה עם זוג אחר בקבוצה. יהיה $[\overline{U}_k;\ \overline{U}_{k+1}]$ הזוג הראשון החוזר, ז.א. שקיים $m > k$ כך ש-

$$\overline{U}_m = \overline{U}_k \qquad (7)$$

$$\overline{U}_{m+1} = \overline{U}_{k+1} \qquad (8)$$

ונוכיח ראשית כי $k = 1$. כי נניח $k > 1$ ונסתכל במשוואות

$$U_{m-1} = U_{m+1} - U_m \qquad (9)$$

$$U_{k-1} = U_{k+1} - U_k \qquad (10)$$

אם נחלק את (9) ב- a נראה כי השארית $\overline{U}_{m-1}$ שווה ל- $(\overline{U}_{m+1} - \overline{U}_m)$ ולכן, לפי (3) ו-(8), גם ל- $(\overline{U}_{k+1} - \overline{U}_k)$ ז.א. ל- $\overline{U}_{k-1}$. אם נצרף את זה ל-(7) נראה כי

$$[\overline{U}_{k-1};\ \overline{U}_k] \equiv [\overline{U}_{m-1};\ \overline{U}_m]$$

מה שסותר את ההגדרה של k כמספר הסדורי הראשון של זוג חוזר. אנחנו רואים איפוא, כי $k=1$, ז.א. כי הזוג $[\overline{U}_1;\ \overline{U}_2]$ חוזר ומתלכד עם איזה זוג $[\overline{U}_m;\ \overline{U}_{m+1}]$ עבור $m \leqslant a^2+1$. אבל $U_1=U_2=1$ ולכן $\overline{U}_1=\overline{U}_2=1$ יוצא כי

$\overline{U_m}=\overline{U_{m+1}}=1$, ז.א. כי $\overline{U_m}$ ו- $\overline{U_{m+1}}$ ישאירו שניהם את השארית 1 אחרי חלוקה ב-a . מזה נובע כי $U_{m+1}-U_m=U_{m-1}$ ישאיר את השארית 0 . אבל $m-1 \leqslant a^2$, והמשפט מוכח.

שתי חידות

I. נתונות 12 מטבעות אשר אחת מהן אולי מזוייפת. במקרה ויש מטבע מזוייפת יהיה משקלה שונה ממשקל חברותיה, אשר משקלן שווה אחד לשני. נתונים מאזני כפות אשר בעזרתם ניתן להשוות את משקל הנתונים בשתי כפותיה ולקבוע, האם שווים הם או אם אחד כבד מהשני.

בעזרת שלש שקילות בלבד עלינו לגלות אם אחת המטבעות אמנם מזוייפת, ובמקרה שכן לקבוע איזו היא המזוייפת ואם כבדה היא או קלה ממטבע תקינה.

חידה זו, שהיא קשה למדי, ידועה בודאי לרבים מביניכם ובלתי ידועה לאחרים. גם עבור אלה וגם עבור אלה נפרסם באחת החוברות הבאות את פתרון החידה ואת הכללתה. בין השאר נבדוק את השאלה כמה מטבעות אפשר לבדוק כשמספר השקילות הוא n במקום שלוש. בינתיים אולי ירצו הקוראים לחשוב בעצמם על הבעיה הזאת.

II. דברנו בכותרת על שתי חידות. השניה הופיעה למעשה כבר בחוברת הקודמת וכאן אנחנו רוצים לתת עליה תשובה. החידה התייחסה לאיש שיצא במכונית בשעה 10 בבקר ונסע במהירות קבועה מתל-אביב עד חיפה. למחרת יצא בחזרה בשעה 10 בבקר וחזר באותה דרך לתל-אביב, גם הפעם במהירות קבועה אבל לאו דוקא באותה מהירות כמו אתמול. השאלה היתה "האם מוכרחת להיות נקודה אשר בה עבר בשני הימים באותה שעה?

קל מאד לראות את פתרון הבעיה הזאת, אם במקום לחשוב על אותו האיש הנוסע וחוזר נחשוב על שני אנשים, כשאחד נוסע מתל-אביב לחיפה והשני בכוון ההפוך, שניהם באותו יום. ברור כי ייפגשו בדרך ולכן התשובה על השאלה היא בחיוב. רואים כמו כן, כי התנאי שיסע (או שיסעו) במהירויות קבועות איננו דרוש ואף איננו נוגע לענין. כמו כן אפשר לוותר על התנאי ששתי הנסיעות תתחלנה באותה שעה ביום ומספיק כי זמן היציאה בחזרה מחיפה יהיה מוקדם יותר מזמן הגיעו לחיפה אתמול.

בעיות חדשות

הבעיות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט׳ ו–י׳ בלבד (אין פירוש הדבר שהן קלות). את הפתרונות יש להגיש למערכת עד 1.5.65.

ת.226* (5 נקודות) x,y ו–z הם מספרים שלמים חיוביים ללא גורם משותף (פרט ל–1), אשר רבועיהם מהווים סדרה חשבונית. הוכח כי שנים מבין ארבעת המספרים $y \pm \frac{z \pm x}{2}$ הם רבועים.

ת.227* (3 נקודות) למצא את המספר הטבעי הקטן ביותר אשר יש לו בדיוק 100 מחלקים (כולל 1 והמספר עצמו).

ת.228* (2 נקודות) A הוא מרכז מעגל בעל רדיוס $2R$ ו–B הוא נקודה כלשהי על היקף מעגל זה. אנחנו בונים את המעגל עם מרכז B ורדיוס R, והמשיקים מ–A נוגעים במעגל זה בנקודות Q,P. להוכיח כי APQ הוא משלש שווה צלעות וכי חוצי זויותיו נפגשים על המעגל הקטן (הוצע ע"י צ. ענבל).

ת.229* (2 נקודות) אם c,b,a חיוביים אז

$$bc\,(b+c) + ca\,(c+a) + ab\,(a+b) > abc$$

עם שויון אך ורק במקרה $a = b = c$.

ת.230* (2 נקודות) נתון כי $x-2y=2$, $2^{2x}\,3^{-y} = 8$ הוכח כי $2^{\frac{1}{y}} = \frac{3}{16}$.

ת.231* (3 נקודות) אם המשוואה

$$\sin^{2n+2}\sigma \,/\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n+2}\sigma \,/\cos^{2n}\alpha = 1$$

מתקיימת עבור $n = 1$ אז תתקיים גם עבור כל מספר טבעי n.

ת.232 (4 נקודות) חשב את הסכום

$$\sin x \sin 2x \sin 3x + \sin 2x \sin 3x \sin 4x + \ldots\ldots +$$
$$+ \sin nx \sin (n+1)x \sin (n+2)x$$

ת.233 (3 נקודות) מעגל חותך את הצלע BC של משלש ABC בנקודות P, P'; את הצלע CA ב–Q, Q' ; ואת הצלע AB ב– R, R'. הוכח כי אם הישרים AP, BQ, CR נפגשים בנקודה אחת אז גם הישרים AP', BQ', CR' ייפגשו בנקודה אחת.

ת.234* (3 נקודות) הוכח כי

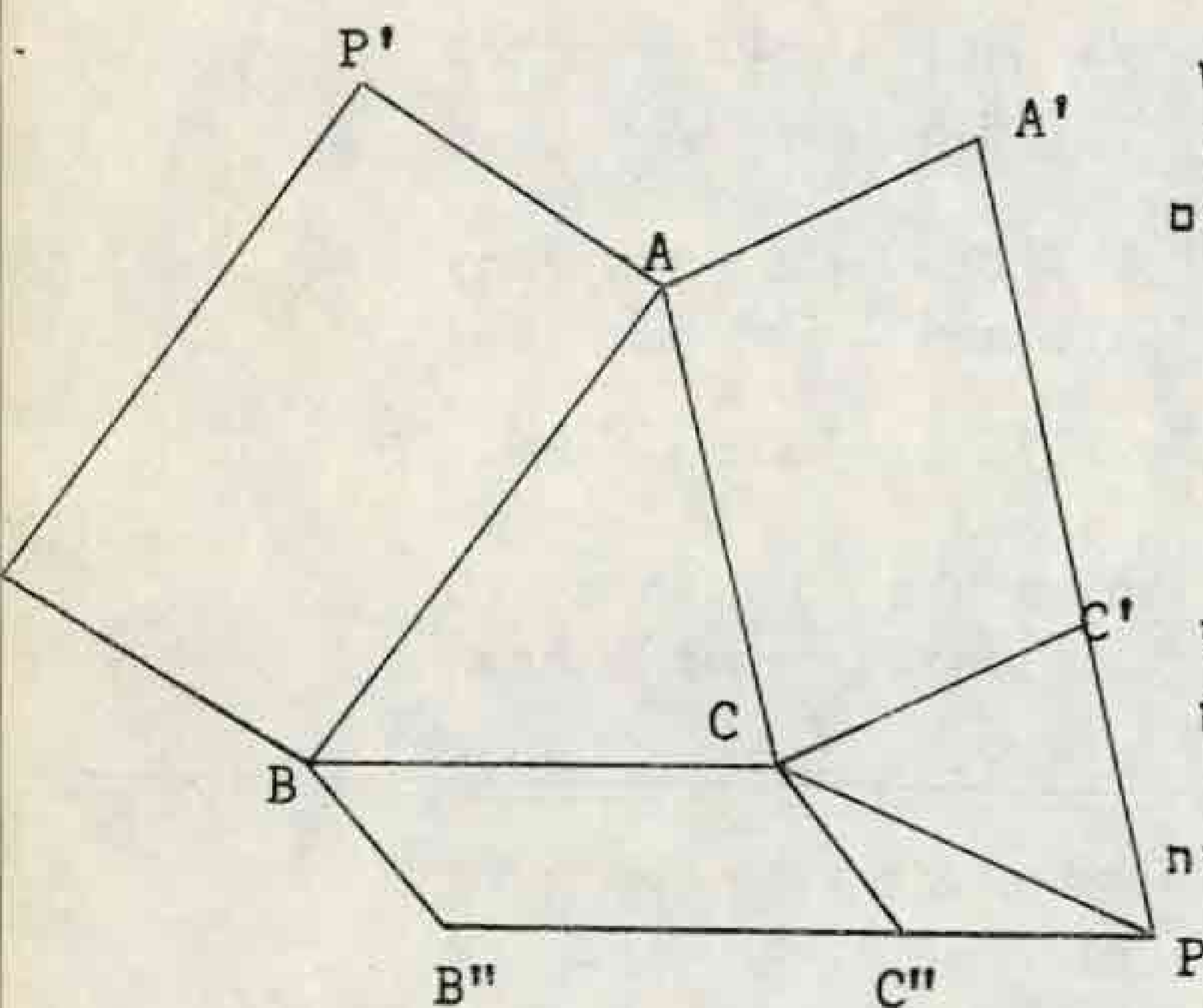
$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

ת.235 (5 נקודות) נתון ישר ℓ ושתי נקודות B,A הנמצאות באותו צד של ℓ. לבנות את המעגל שיעבור דרך A ו- B ויחתוך את ℓ ב- C ו- D כך שהזויות CAD, CBD תהיינה שוות לזוית נתונה α.
(הוצע ע"י א. כרוך).

ת.236* (4 נקודות) נתונים במישור שני מעגלים הנפגשים בשתי נקודות. למצא את המרכז של אחד מהם תוך שמוש בסרגל בלבד.

ת.237* (3 נקודות) אם α הוא מספר טבעי הוכח כי

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < 1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha \ldots + n^\alpha < \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n}{\alpha + 1}$$



ת.238* (4 נקודות) ABC הוא משלש ו- AA'C'C, BB"C"C הן מקביליות כלשהן על הבסיסים AC , BC בהתאמה, שתיהן מחוץ למשלש. ממשיכים את A'C' ו- B"C" עד שהם נפגשים ב- P, ובונים את המקבילית ABP"P' על הבסיס AB כך ש- AP' מקביל ושווה אל CP. הוכח כי שטח המקבילית ABP"P' שווה לסכום שטחיהן של המקביליות ACC'A', BB"C"C.

ת.239* (3 נקודות) מגדירים את המספרים

$$F_n = 2^{2^n} - 1$$

עבור כל מספר שלם חיובי n . הוכח כי במקרה ש- $n \neq m$ אין ל- F_m ו- F_n מחלק משותף (פרט ל-1).

ת.240* (3 נקודות) פתור את המשוואה

$$\tan x + \tan 3x + \tan 5x = 0$$

פתרון הבעיות ת. 196 - 210

ת.196 יהיה המספר $b = 10a + 1$. העברת ה-1 להתחלה תהפוך את המספר ל-$(10^5 + a)$. יוצא כי $10a+1 = 3(10^5+a)$, ומזה נובע מיד כי

$$a = 42{,}857$$
$$b = 428{,}571$$

ת.197 יש שתי אפשרויות לפי שהמספר המיוצג ע"י הרביעיה הראשונה קטן או גדול באחד מהרביעיה האחרונה.

א) $$10^4a + a + 1 = b^2$$

ולכן $(b-1)(b+1) = (10^4+1)a = 73 \times 137a$.

מאחר ו- $(b-1)$ הוא בעל ארבע ספרות נובע כי

$$b-1 < b+1 < 10^4+1 = 73 \times 137$$

ולכן אחד מבין $(b-1)$, $(b+1)$ יתחלק ב-73 והשני ב-137. אם $b-1$ מתחלק ב-73 יש לנו

$$b-1 = 73m \;;\quad b+1 = 137n \;;\quad 137n - 73m = 2$$

כש- n ו-m הם שלמים וחיוביים, וכאלה ש- $b < 10^4$.
הפתרון היחידי הוא:

$$n = 16 \;;\; m = 30 \;;\; b = 2191 \;;\; b^2 = 4800481$$

ואין זה פתרון לבעיה מאחר ש-b^2 זה הוא בעל 7 ספרות.
אם $b+1$ מתחלק ב-73 ו-$(b-1)$ ב-137, יהיה

$$b+1 = 73m \;;\; b-1 = 137n \;;\; 73m - 137n = 2$$

ולזה יש פתרון

$$n = 57 \;;\; m = 107 \;;\; b = 7810 \;;\; b^2 = 60996100$$

ב) במקרה השני קיים $$10^4(a+1) + a = b^2$$

ולכן $$(b-100)(b+100) = 73 \times 137 \times a$$

אם $b-100$ מתחלק ב־73 ו־$(b+100)$ ב־137, יהיה

$$137n - 73m = 200$$

עם הפתרון

$$n = 67;\ m = 123\ ;\ b = 9079\ ;\ b^2 = 82428241$$

אם $b+100$ מתחלק ב־73 ו־$(b-1)$ ב־137 יהיה

$$73m - 137n = 200$$

והפתרון הוא

$$n = 6\ ;\ m = 14\ ;\ b = 922\ ;\ b^2 = 850084$$

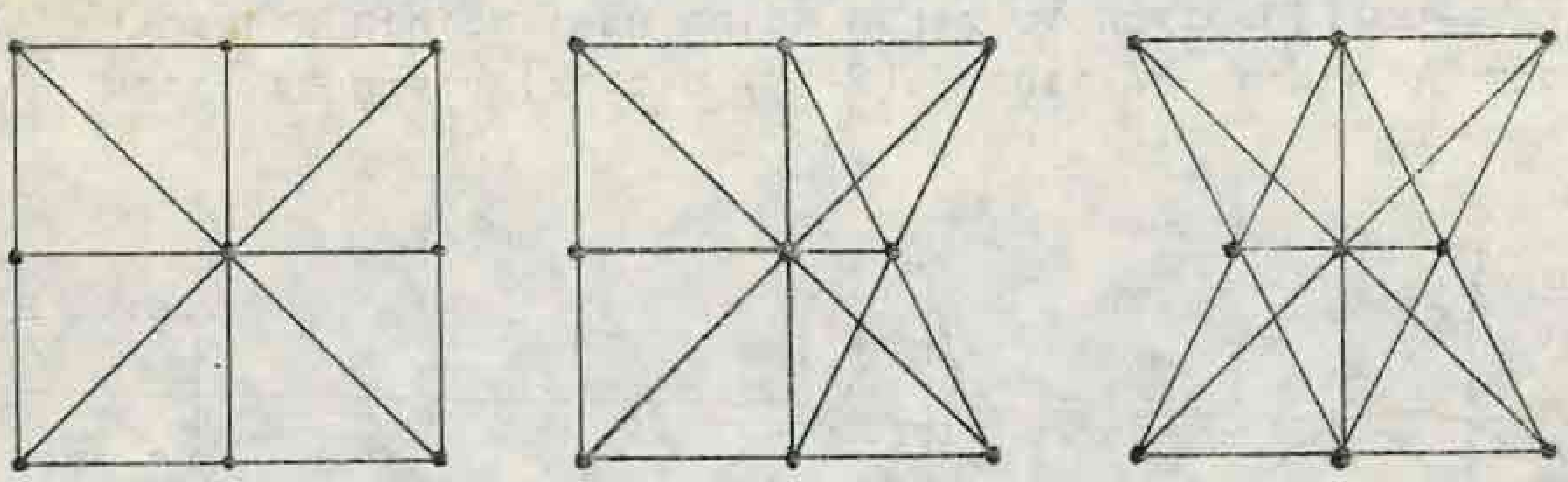
שאינו פותר את הבעיה.

אבל יש להביא בחשבון את האפשרות ש־ $(b+100)$ יתחלק גם ב־73 וגם ב־137, ז.א. $b+100 = 10{,}001$. במקרה זה

$$b = 9901\ ;\ b^2 = 98029801$$

בסיכום יש לנו הפתרונות 60996100, 82428241, 98029801.

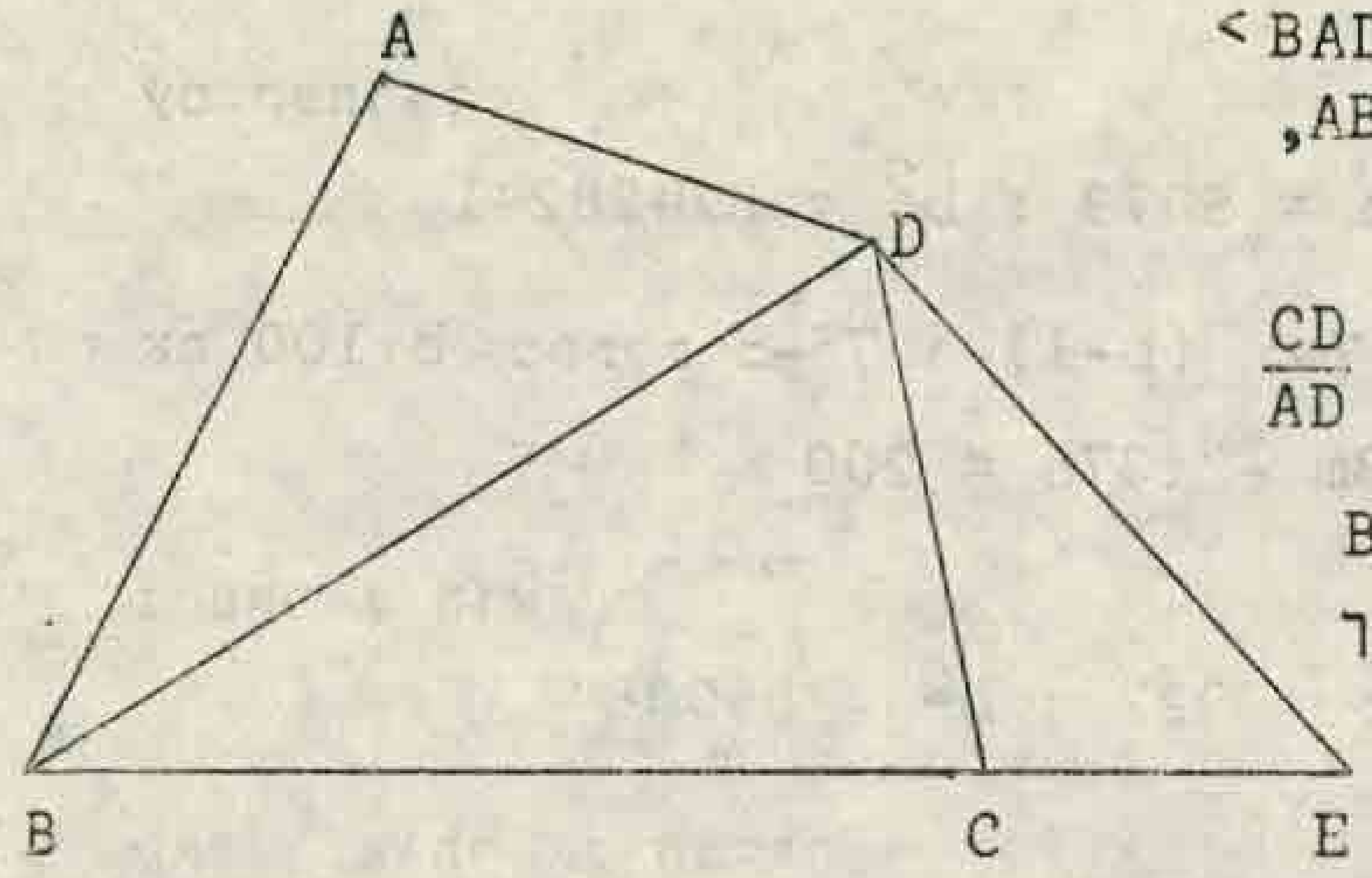
ת.198 נתקבלו כמה פתרונות אבל הפופולארי ביניהם הוא



ת.199 יהיה AM התיכון ונקים את האנך ב־M לבסיס BC. נמשיך את חוצה הזוית ב־A עד שיחתוך את האנך הזה ב־D. נמשיך את DM עד 'D כך שהזוית D'AD > תהיה ישרה, ונבנה את המעגל על קוטר 'DD. מעגל זה הוא החוסם את המשלש המבוקש והוא יחתוך את BC בזויות B,C.

ההוכחה מידית.

ת.200 <u>נתוח</u>. נמשיך את BC עד E כך ש- $\angle ADB = \angle CDE$ מאחר וגם $\angle BAD = \angle DCE$ יוצא כי המשלשים ABD, DCE דומים, ולכן



$$\frac{CD}{AD} = \frac{DE}{BD} = \frac{CE}{AB} \qquad (1)$$

<u>בניה</u>. נשרטט את BC באורך הנתון ונמשיך אותו עד E כך ש-

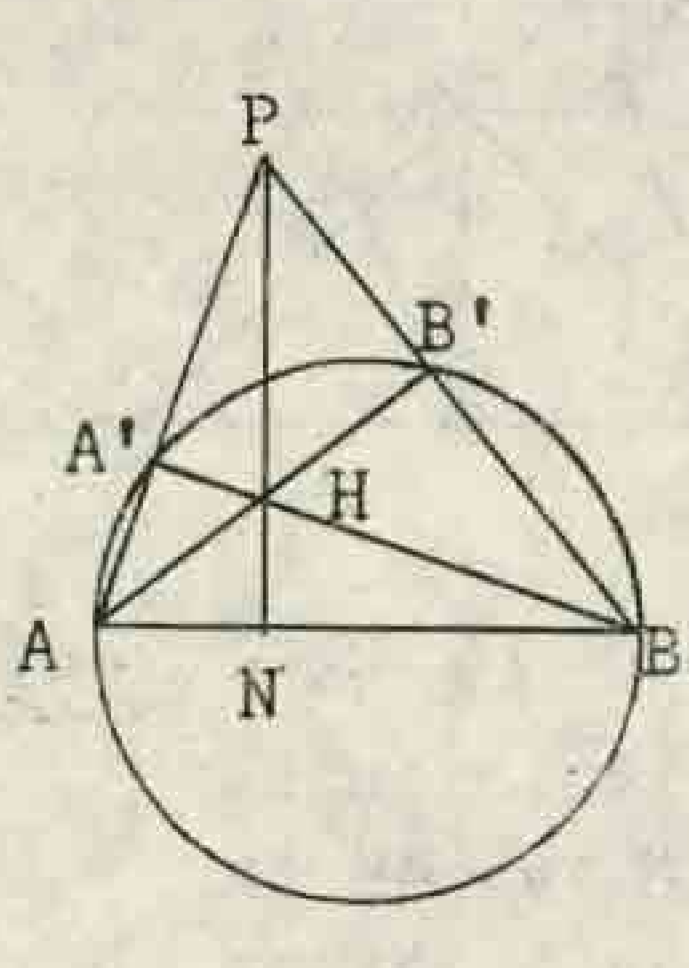
$$CE = \frac{CD \cdot AB}{AD}$$

נקח את המעגל של אפולוניוס על הקטע BE, ז.א. מקום הנקודות Q המקיימות

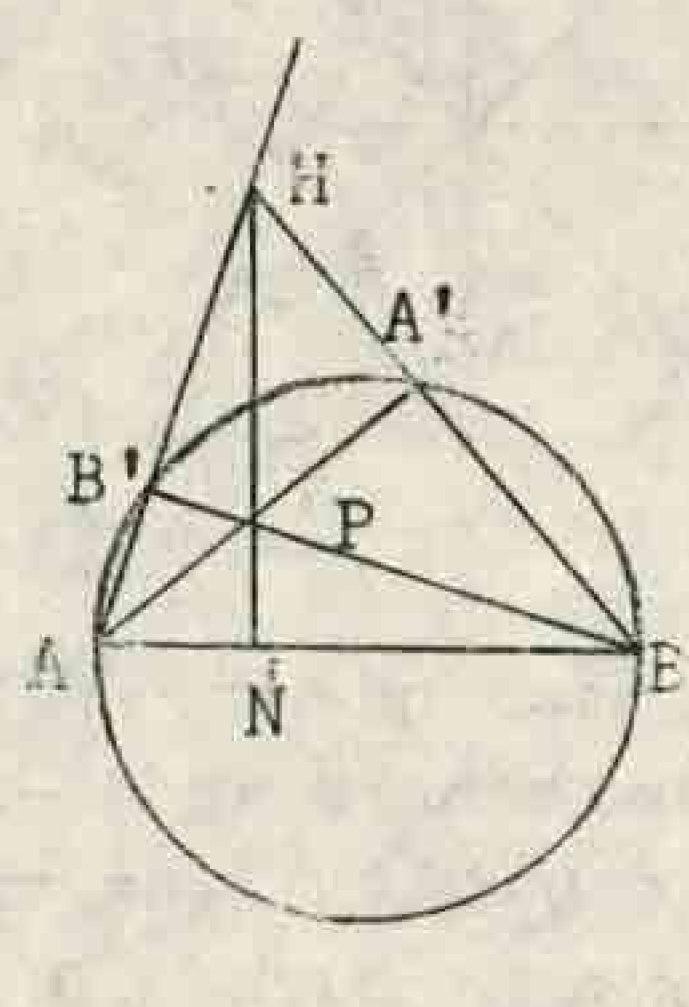
$$\frac{QE}{QB} = \frac{CD}{AD} \qquad (2)$$

מ-(1) נובע כי D הוא על מעגל זה. מאחר שהאורך CD נתון אפשר לקבוע את D, ומזה גם את A.

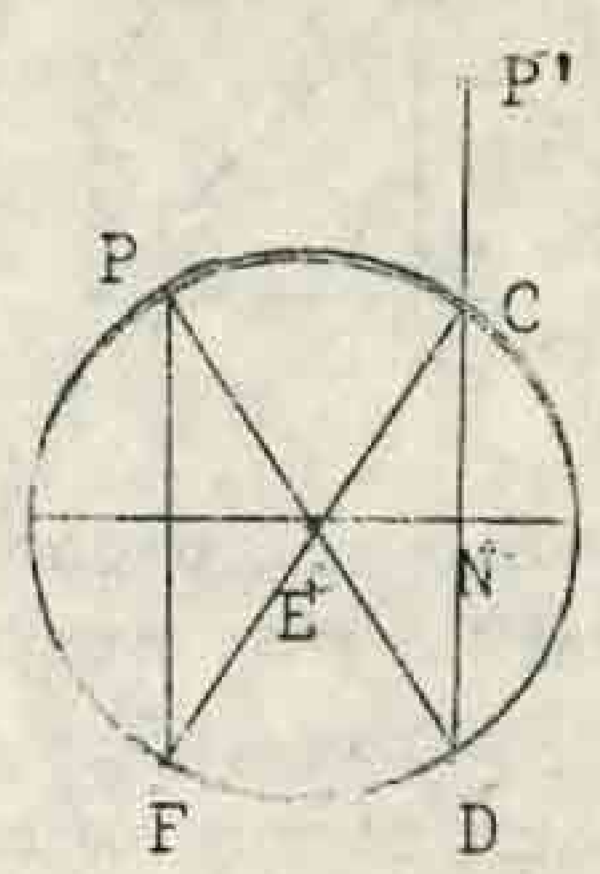
ת.201 P הנקודה הנתונה ו-AB הקוטר הנתון של המעגל.(i) כש- P איננו על המעגל (ציורים 1 ו-2). נחבר PA ויהיה A' המפגש



ציור 1



ציור 2



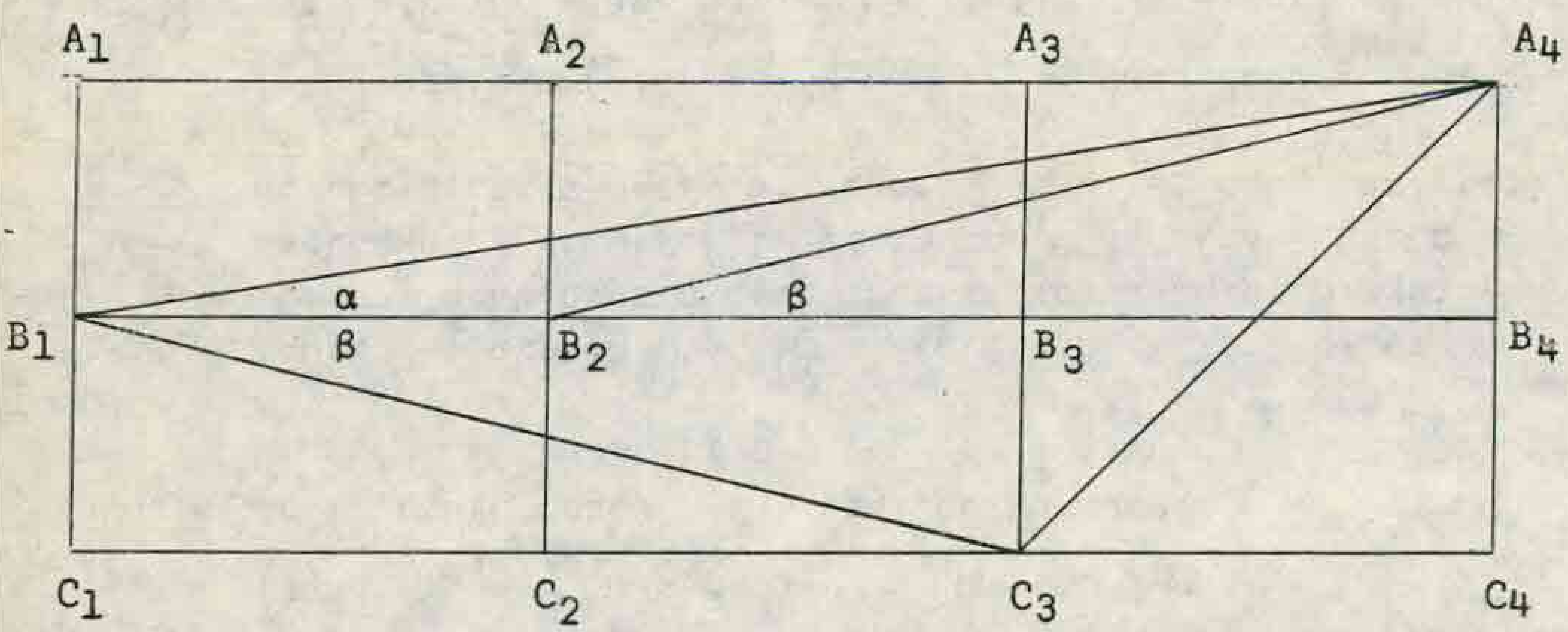
ציור 3

השני של PA עם המעגל. בדרך דומה יפגש PB את המעגל ב- 'B , נחבר 'AB, A'B שיפגשו ב-H. PH ניצב ל-AB.

<u>הוכחה</u>. AB'B > , ו- AA'B > הם שניהם זויות ישרות ולכן 'AB, A'B והניצב ל- AB מ- P יעברו כולם דרך נקודה אחת, היא H.

(ii) <u>P על המעגל</u> (ציור 3). ניקח נקודה 'P כלשהי מחוץ למעגל ונבנה את הניצב P'N ל- AB (לפי (i)). P'N יפגוש את המעגל ב- D,C. הישר PD חותך את AB ב- E ו- CE את המעגל ב-F. קל לראות כי PF ניצב ל- AB.

<u>ת.202</u> נכפיל את התבנית כמו בציור. ברור כי $< B_4 B_1 C_3 = \beta$



לכן

$$\alpha + \beta = < A_4 B_1 C_3$$

אבל

$B_1 C_3 = A_4 C_3$ והזוית $< B_1 C_3 A_4$

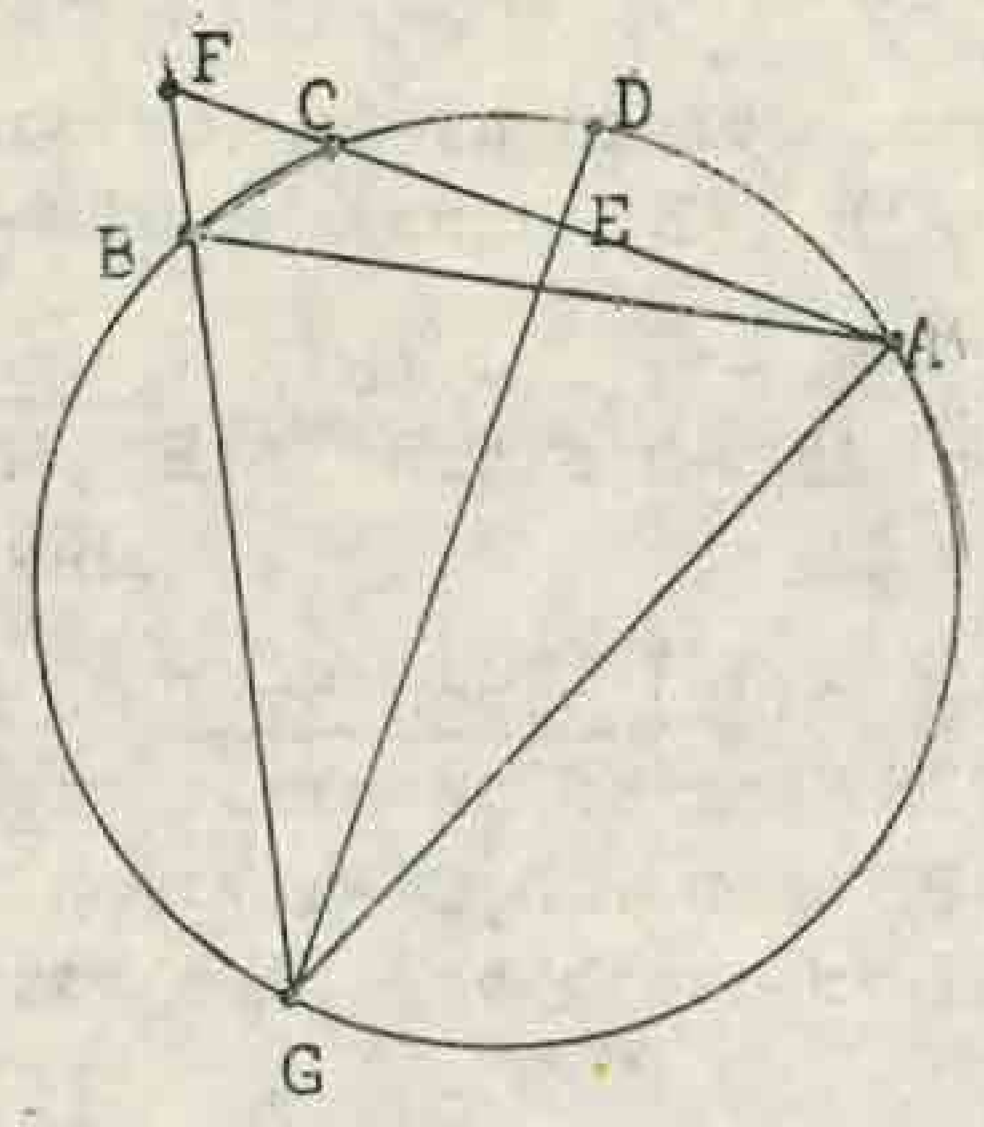
היא זוית ישרה. מזה נובע כי

$$< A_4 B_1 C_3 = < B_1 A_4 C_3 = 45°$$

<u>ת.203</u> נשלים את המעגל, נמשיך את DE עד שיפגוש שוב את המעגל ב- G, נחבר GA , GB ויהיה F המפגש של AC, GB.

מאחר ש- D הוא אמצע הקשת AB יוצא כי

$$< BGD = < AGD$$



אבל הזויות ב- E הן
ולכן המשלשים AEG,
FEG חופפים, ו-
$AE = EF$.

מאידך יש לנו
$\sphericalangle CBF = \sphericalangle GAF = \sphericalangle CFB$

ולכן $CF=CB$.
המסקנה מידית.

ת.204 שטח הסהרים הוא
(חצי מעגל AB + חצי מעגל AC + משלש ABC) - (חצי מעגל BC)

= שטח המשלש + $\frac{\pi}{8}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ = שטח המשלש.

ת.205 כל דרך תורכב מ-8 צעדים, מהם 4 ימינה ו-4 כלפי מטה, ולכן אפשר לאפיין אותה על-ידי מקומם בסדרה של ארבעת הצעדים ימינה. מספר הדרכים שווה, איפוא, למספר האופנים שאפשר לבחור ב-4 מתוך 8 ז.א. $\binom{8}{4}$, דהיינו 70.

ת.206 עלינו לבחור בסדרה $\{a_i\}$ המקיימת את התנאים

$$1 \leq a_1 < a_2 \ldots < a_r \leq n \qquad (1)$$

$$a_{i+1} - a_i \geq 2 \text{ עבור כל } i. \qquad (2)$$

לכל סדרה כזאת נתאים סדרה $\{b_i\}$ המוגדרת ע"י

$$b_i = a_i - i + 1 \qquad (3)$$

רואים כי $b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - 1$
≥ 1

ולכן $\{b_i\}$ היא סדרה עולה. מאידך $b_1 = a_1 \geq 1$.

$$b_r = a_r - r + 1$$
$$\leq n - r + 1$$

ומזה ש- $\{b_i\}$ היא קבוצה של r מספרים שונים מתוך המספרים

$$1, 2, \ldots, n - r + 1$$

מאידך לכל קבוצה $\{b_i\}$ של r מספרים מתוך התחום הזה אפשר להתאים קבוצה $\{a_i\}$ שתקיים את תנאי הבעיה ע"י $a_i=b_i+i-1$.
מספר הקבוצות $\{a_i\}$ שווה איפוא למספר הקבוצות $\{b_i\}$, ז.א.
ל- $\binom{n-r+1}{r}$

(פתרון מאת י. סתוי, גמנסיה הרצליה).

ת.207 יהיו הישרים $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ והנקודות הנעות עליהם (a,b,c,d) בהתאמה. נסתכל בנקודה a הנעה על α במהירות קבועה. בכל רגע של התנועה נקים את האנך למישור ה- $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ באורך פרופורציונלי לזמן. מקביעות המהירות נובע מיד כי ראשי האנכים האלה ימצאו על קו ישר במרחב; נסמן אותו ב- α'. באופן דומה נגדיר את הישרים β',γ',δ'. כשהנקודות b,a נפגשות תימצאנה באותו מקום באותו זמן ובכך הנקודות המתאימות על α', β' התלכדנה גם הן. זה נכון לגבי כל זוג של נקודות שנפגשות, ולכן נוכל לנסח את הבעיה כדלקמן: -

במרחב תלת ממדי נמצאים 4 ישרים $\alpha',\beta',\gamma',\delta'$. α' חותך את β',γ',δ' ו- β' חותך את γ' ו- δ'. להוכיח כי γ' חותך את δ'.

<u>הוכחה.</u> α',β' נפגשים וקובעים מישור. מאחר ו- γ' ו- δ' פוגשים גם את α' וגם את β' יימצאו גם הם באותו המישור, ולכן ייפגשו גם הם.

ת.208 יהיה x מספר הדרכים הישירות מ- B ל- C, y מ- C ל- A, ו- z מ- A ל- B. מספר הדרכים מ- A ל- B דרך C יהיה yz וכו'. יוצא איפוא, כי

$$z + xy = 2 (y + zx) \qquad (1)$$

$$x + yz = 2 (z + xy) \qquad (2)$$

I. הפתרונות היחידים אשר בהם אחד המשתנים מתאפס הם $(0,0,0)$ ו- $(0,2,4)$.

<u>הוכחה.</u> נניח כי $x = 0$ ואז

$$z = 2y \qquad (3)$$

$$yz = 2z \qquad (4)$$

מ-(4) נובעות שתי אפשרויות; הראשונה ש- $z=0$ ואז, לפי (3), גם $y=0$; אפשרות שניה היא $y=2$ ואז מ- (3), $z=4$. אם נניח $y=0$ מקבלים מ- (2) כי

$$x(2z-1) = 0$$

ולכן $x=0$, מאחר ש-z הוא מספר שלם. אבל מ- $x=y=0$ רואים כי $z=0$, הוכחה דומה טובה בשביל המקרה $z=0$.

II. אין פתרון אשר בו שניים מתוך המשתנים שווים, פרט ל- $(0,0,0)$

<u>הוכחה</u>. נניח למשל $x=y$. יתקיים

$$z + x^2 = 2(x + zx)$$

$$x + zx = 2(z + x^2)$$

ולכן $z + x^2 = x + zx = 0$

ומזה $x = y = z = 0$

את המקרים $x=z, \ y=z$ אפשר לנתח באופן דומה.

III. נוכיח כי אין פתרון בכלל פרט לשני אלה שנזכרו ב-I.

<u>הוכחה</u>. אם קיים פתרון נוסף יהיו כל המשתנים שונים זה מזה ומאפס. אם $y > z$ נראה כי

$$\begin{aligned} 2(y + zx) &> 2zx \\ &= zx + zx \\ &> z + xy \end{aligned}$$

מה שסותר את (1). לכן, בכל פתרון נוסף, יהיה $z > y$.
באופן דומה רואים כי $x>z$ גורר

$$\begin{aligned} 2\,(z + xy) &> 2xy \\ &= xy + xy \\ &> x + yz \end{aligned}$$

וזה סותר את (2). יוצא כי עבור כל פתרון נוסף

$$y > z > x > 1 \qquad (5)$$

נכתוב את (2) בצורת

$$2z - x = y(z - 2x) \qquad (6)$$

קיים

$$\frac{2z-x}{y} < \frac{2z}{y} < 2$$

בגלל (5).

אבל אנחנו רואים מ-(5) ו-(6) כי $\frac{2z-x}{y}$ הוא מספר חיובי שלם. מזה נובע כי

$$2z - x = y \qquad (7)$$

ולכן (8)

$$z - 2x = 1 \qquad (8)$$

מ-(7) ו-(8) נובע כי

$$z = 2x + 1 \quad , \quad y = 3x + 2$$

אם נציב את אלה ב-(1) נקבל

$$3x^2 + 4x + 1 = 4(x + 1)^2$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0$$

וזה בלתי אפשרי מאחר ש-x הוא חיובי.

(פתרון של פרופ. פ. ארדש).

ת.209

$$a^2 - b^2 = 2(yz + zx + xy)$$
$$= 2(yz + zx + z^2)$$
$$= 2az$$

ולכן
$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

$$x + y = a - z = \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

$$xy = z^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

יוצא כי x,y הם שרשי המשוואה הריבועית
$$t^2 - \frac{a^2 + b^2}{2a}t + \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 = 0$$

ומזה כי
$$x,y = \frac{1}{4a}\left\{ a^2 + b^2 \pm \sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}\right\}$$

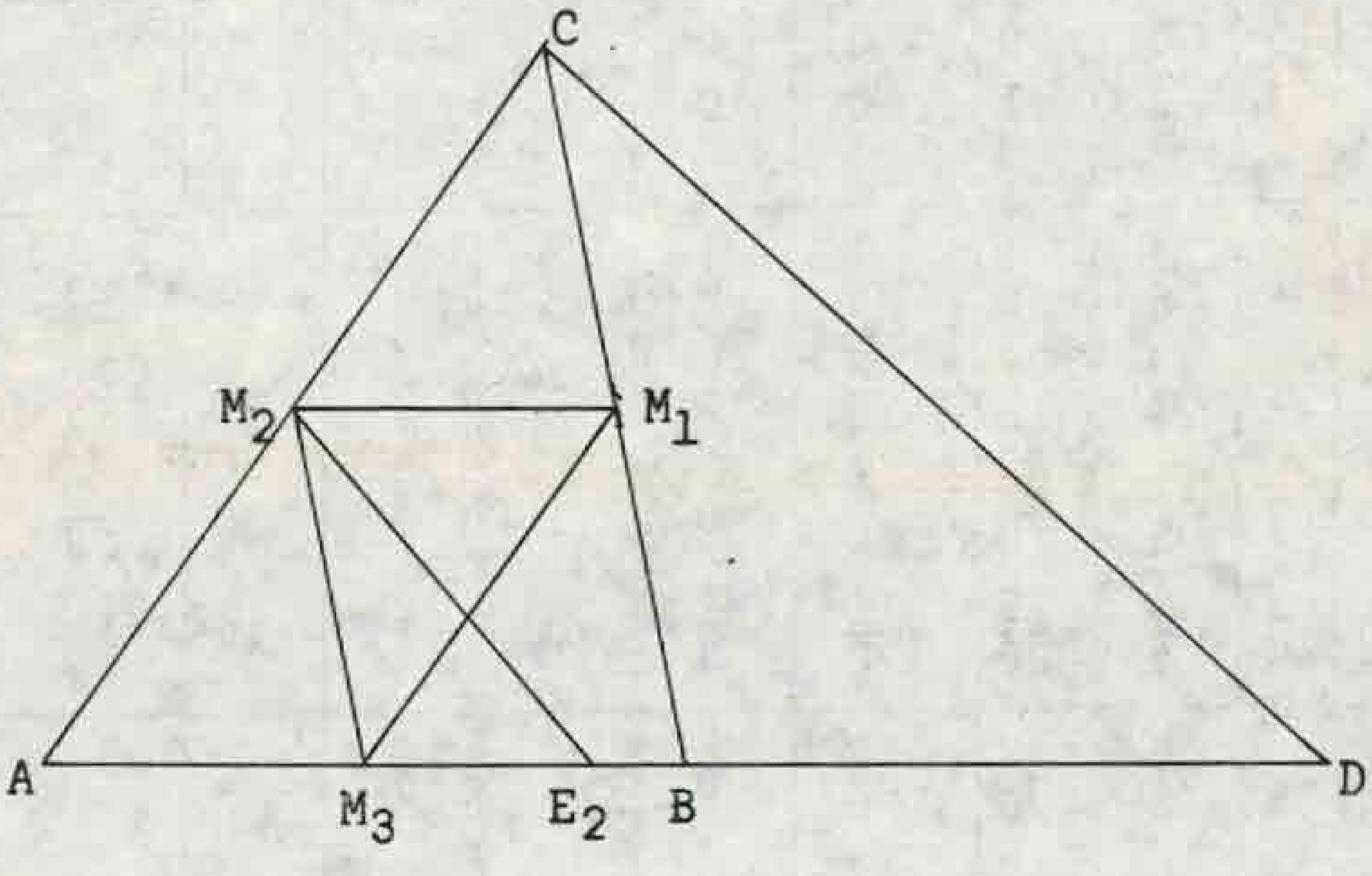
כדי שיהיו כולם ממשיים וחיוביים נדרש כי
$$(3a^2-b^2)(3b^2-a^2) \geqslant 0$$
$$a^2-b^2 > 0$$
$$a > 0$$
$$(a^2+b^2)^2 > (3a^2-b^2)(3b^2-a^2)$$

קל לראות כי מספיק והכרחי לקיום האי-שוויונות האלה

ש-
$$a > | b | > \frac{a}{\sqrt{3}}$$

<u>210.ת</u> נמשיך את AB עד D כך ש- $BD=BC$, ונחבר M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3, M_2E_2, CD. M_2E_2 מקביל ל- CD, M_2M_3 מקביל ל- BC, ו- M_1M_2 ל- AB.

יוצא כי
$$\begin{aligned} \angle M_3M_2E_2 &= \angle BCD \\ &= \angle BDC \\ &= \angle M_1M_2E_2 \end{aligned}$$



ובכן M_2E_2 חוצה את הזוית M_2 של המשלש $M_1M_2M_3$.
תוצאה דומה נכונה לגבי M_1E_1, M_3E_3 ולכן שלשת הישרים האלה עוברים דרך נקודה אחת.

* *

*

פתרון הבעיה מעמוד 13.

מספר הסיבוב	C		3	2	1	0	0	0	0			
			x	y	z	r	s	t	u	B	B_1	
0	r	0	20	8	1	1	0	0	0	100	5 ←R	
	s	0	6	3	11	0	1	0	0	90	15	
	t	0	2	3	3	0	0	1	0	40	20	
	u	0	1	1	1	0	0	0	1	15	15	
	Z		0	0	0	0	0	0	0			P=0
	Z+C		3	2	1	0	0	0	0			
			↑K									
1	x	-3	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	0	0	5	100	
	s	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{107}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	0	0	60	$\frac{600}{107}$ ←R	
	t	0	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{29}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	1	0	30	$\frac{300}{29}$	
	u	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{19}{20}$	$-\frac{1}{20}$	0	0	1	10	$\frac{200}{19}$	
	Z		-3	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{20}$	0	0	0			P=15
	Z+C		0	$\frac{4}{5}$	$\frac{17}{20}$	$-\frac{3}{20}$	0	0	0			
					↑K							
2	z	-1	0	$\frac{6}{107}$	1	$-\frac{3}{107}$	$\frac{10}{107}$	0	0	$\frac{600}{107}$	100	
	x	-3	1	$\frac{85}{214}$	0	$\frac{11}{214}$	$-\frac{1}{214}$	0	0	$\frac{505}{107}$	$\frac{202}{17}$	
	t	0	0	$\frac{212}{107}$	0	$\frac{1}{107}$	$-\frac{29}{107}$	1	0	$\frac{870}{107}$	$\frac{435}{106}$ ←R	
	u	0	0	$\frac{117}{214}$	0	$-\frac{5}{214}$	$-\frac{19}{214}$	0	1	$\frac{500}{107}$	$\frac{1000}{117}$	
	Z		-3	$-\frac{267}{214}$	-1	$-\frac{27}{214}$	$-\frac{17}{214}$	0	0			P=19.77
	Z+C		0	$\frac{161}{214}$	0	$-\frac{27}{214}$	$-\frac{17}{214}$	0	0			
				↑K								

(המשך בעמוד 31)

(המשך)

מספר	C		3	2	1	0	0	0	0		
הסיבוב			x	y	z	r	s	t	u	B	B_1
3	y	-2	0	1	0	$\frac{1}{212}$	$-\frac{29}{212}$	$\frac{107}{212}$	0	$\frac{435}{106}$	
	z	-1	0	0	1	$-\frac{3}{106}$	$\frac{11}{106}$	$-\frac{3}{106}$	0	$\frac{285}{53}$	
	x	-3	1	0	0	$\frac{21}{424}$	$\frac{29}{424}$	$-\frac{85}{424}$	0	$\frac{655}{212}$	
	u	0	0	0	0	$-\frac{11}{424}$	$\frac{5}{424}$	$-\frac{117}{424}$	1	$\frac{515}{212}$	
	Z		-3	-2	-1	$-\frac{55}{424}$	$-\frac{15}{424}$	$-\frac{149}{424}$			
	Z+C		0	0	0	$-\frac{55}{424}$	$-\frac{15}{424}$	$-\frac{149}{424}$			

P=22.85

הפתרון הסופי הוא: –

$$x = \frac{655}{212}$$

$$y = \frac{435}{106}$$

$$z = \frac{285}{53}$$

$$P = \frac{4845}{212} = 22.85$$

* *

*

רשימת פותרי השאלות מס. 196 - 210

תשובות חלקיות סומנו בכוכב. בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר.

1.	אביטל יהוא, חיפה :	(19) 205,204,202,201,198,196
2.	אברהם לאה, י תיכון, קרית-מוצקין:	(4) 204 ,198*
3.	אהרון-שלום אליעזר, יא גמנסיה עברית י-ם:	(5) 204,202*
4.	איגלקה מנחם, יב עירוני י׳, תל-אביב:	(23) 210,205-203,202*,199,196
5.	איזנמן יצחק, תיכון, קרית מוצקין:	(9) 204,202,196
6.	איש-שלום אריאל, יב עירוני ה׳, ת"א:	208,205-201,199,198,197*,196 (36) 209*
7.	אלכסנדר גד, י עירוני ה׳ תל-אביב:	(30) 209*,204-198,197*,196
8.	אנגל יעקב, תיכון, קרית-מוצקין:	(18) 209*,201-199,198,196
9.	אצרף מרדכי, יא תיכון, קרית-מוצקין:	(18) 204-201,198,196
10.	בילינסקי יואב, יא אהל-שם, רמת-גן :	,208,207,205,204,202,198,196 (28) 209*
11.	בן-שחר ברק, ירושלים:	(13) 199*,195-193
12.	בר-יהושוע דוד, תיכון מקצועי, חיפה:	(23) 205-201,199,196
13.	ברקוץ מיכאל, יב הריאלי, חיפה:	,209*,207,205-198,197*,196 (46) 210
14.	גולדפרב אלי, י תיכון ה׳, תל-אביב:	(23) 209*,204-201,199,198,196
15.	גולדרינג מרדכי, בי"ס הראל, ק. שמונה:	(49) 210-201,200-198,197*,196
16.	גולדשטיין מאיר, צה"ל:	,209,207,205-200,198,197*,196 (42) 210
17.	גיאון אלכסנדר, י אהל-שם, רמת-גן:	(8) 204,198,196
18.	גלעזר אלדד, יא עירוני ה׳, תל-אביב:	(22) 204-200,198,196
19.	דבורז׳צקי דב, תל-אביב:	(9) 209*,204,202*,196
20.	דימנט דוד, חיפה:	,209*,208,207,205-198,197* (48) 210
21.	דרוקר אביגדור, יא טשרניחובסקי נתניה:	(38) 210,209,205-198,196
22.	וינטראוב אורה, יב תיכון, ק. מוצקין:	(26) 209*,204-199,196
23.	וכטל דני, יא הריאלי, חיפה:	(21) 210,209,204,202,198,196
24.	וקס מתי, יא טשרניחובסקי, נתניה :	(40) 210,209,208*,205-198,196
25.	זהבי דן, יא הריאלי, חיפה:	,207,205-202,201*,200-198,197* (47) 210,209*,208
26.	זלמן אליעזר, יא עירוני, בני-ברק:	(54) 210-199,198*,197*,196
27.	טליל אורי, יב הריאלי, חיפה:	(39) 210,209*,205-198,197*,196
28.	טרוקמן שלמה, יב, בית-הכרם:	,205-202,201*,199,198,197*,196 (37) 209,208

29. יהודאי עמירם, יב הריאלי, חיפה:	(46) 210-208,205-198,197*,196
30. לוי אליהו, יב הריאלי, חיפה:	(56) 210-198,197*,196
31. לנדמן דב, י הריאלי, חיפה:	,209*,205-201,199,198*,196 (32) 210
32. מיזל יוסי, צה"ל:	(17) 209 ,204,203,202*,198,196
33. מלמד אורי, יב עירוני ט', תל-אביב:	(9) 204,202*,201*,196
34. מרדר בן-ציון, י עירוני ט', ת"א:	(13) 204,202,199,196
35. סורין אנדרי, י תיכון מקצועי, חיפה:	,204,202,201,199,198*,197*,196 (28) 207,205
36. סלע מנדל, יב אחד-העם, פתח-תקוה:	,208,205-202,201*,198,197*,196 (35) 210,209*
37. סתוי יונתן, גמנסיה הרצליה, תל-אביב:	(57) 210-198,197*,196
38. עמית מיכה, י תיכון, קרית-מוצקין:	(36) 210,207,204-198,196
39. ענבל צבי, הטכניון:	,208,206-201,199,198,197*,196 (47) 210,209*
40. עקביה אלי, י הריאלי, חיפה:	(19) 204,202,200,199,197*,196
41. פינקלשטיין דן, חיפה:	(25) 210,204-201,199,198
42. פליסקין יוסף, יב עירוני ט', ת"א:	(10) 209*,204,202,201*
43. פריאול בני, צה"ל:	,208,207,205-199,198*,197*,196 (49) 210,209*
44. פרידלנד שמואל, הטכניון:	(53) 210-207,205-196
45. קירשנבוים יעקב, י הריאלי, חיפה:	(15) 204,202,201*,199,196
46. קליין צבי, י תיכון מאוחד, רחובות:	(14) 205,204,202,198
47. קרפל מוטי, יב עירוני ט', תל-אביב:	(25) 205-202,201*,199,198,196
48. רבינוביץ לילי, י תיכון, ק. מוצקין:	,204-202,201*,199,198*,196 (21) 209*
49. רוקח אריה, י עירוני ב', תל-אביב:	(7) 204,198*,196
50. רזניק גבריאל, יב גמנסיה העברית י-ם:	(7) 204,202
51. רייך שמעון, יא הריאלי, חיפה:	(40) 210,209*,205-198,197*,196
52. שור מיכאל, יב אהל-שם, רמת-גן:	,209*,205-202,199,198,197*,196 (31) 210
53. שטרן רפאל, יא תיכון דתי, חיפה:	(21) 209*,205-202,198,196
54. שיוביץ מרדכי, אורט, נתניה:	(11) 209*,204,202*,198*,196
55. שפילמן שלום, י עירוני א', ת"א:	(21) 209*,204-202,199,198,196
56. שפירא זאב, י עירוני ה', תל-אביב:	,205-201,199,198,197*,196 (33) 208

* *

*

לכ'
גב' קונזינסקי - הספריה
הטכניון
ת.ד. 4910
חיפה

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בבנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר החתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.