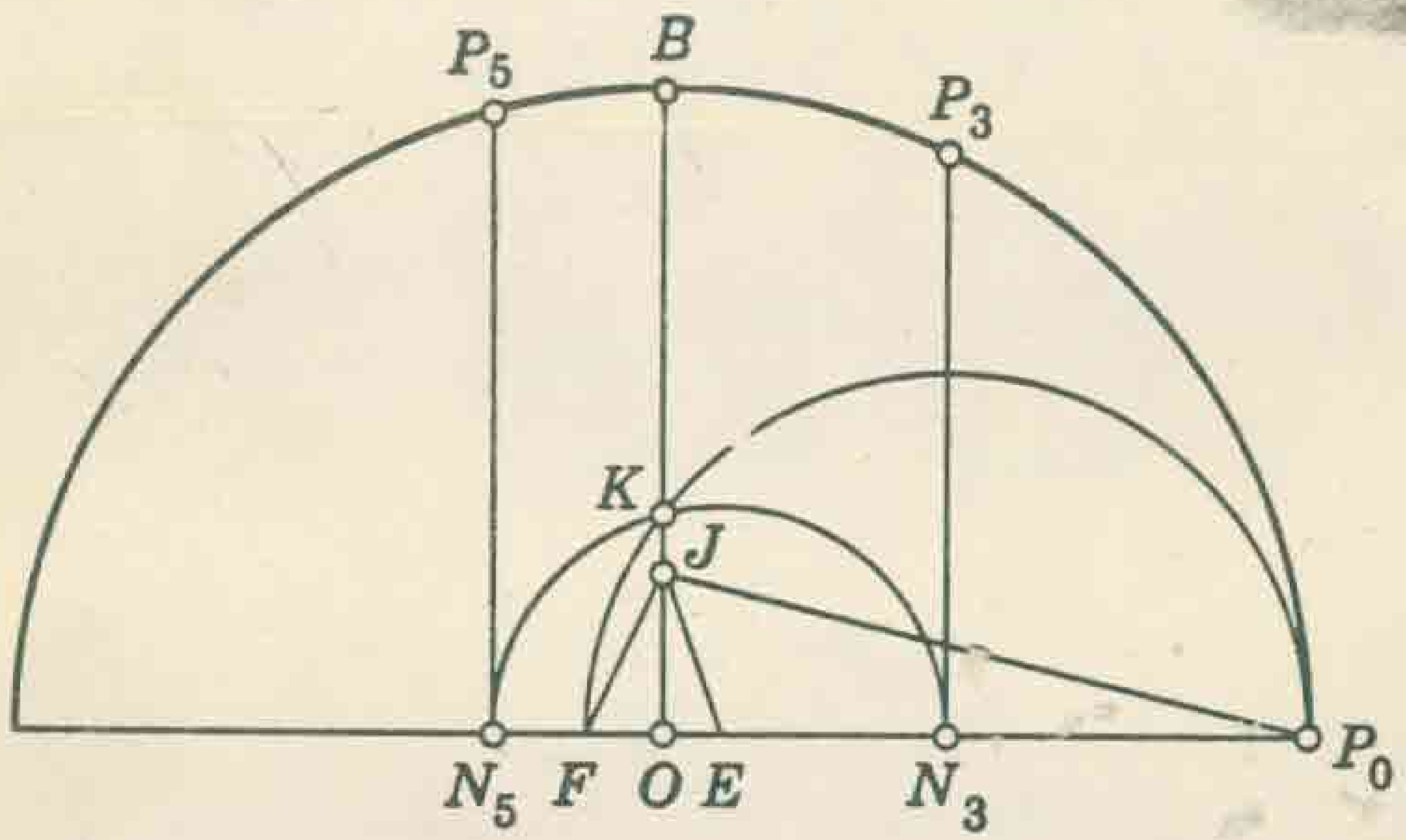
מתמטיקה

לנוער הלומד ולחובבים



כרך 2 רחובות, אייר תשכ"ה, מאי 1965 מס' 9

יוצא לאור בחסות

ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. גיליס

דבר המערכת

הפעם אנו פונים לכל קוראינו בבקשה לעזרה והבנה. הגליונות האלה מוצאים לאור תוך גרעון בספי ניכר, וגרעון זה היה גדול פי כמה אלמלא היו כל העושים בעבודה, מחברים ועורכים כאחד, עושים את מלאכתם בהתנדבות שלא על מנת לקבל פרס. אין אף לרשותנו משרד סדיר או עובדי משרד סדירים, וכל זה כדי למנוע העלאת מחיר הגליונות.

מצב זה גורם לפעמים שמישהו יקבל את חוברתו באיחור של כמה ימים או שיהיו כשלונות אחרים בהוצאת העתון. במקרים כאלה אנו מתנצלים בפני הנפגעים אשר אתם הסליחה, ומבקשים מהם שלא ייחפזו להתנפל על המערכת האומללה. עבודתנו מתנהלת תוך קשיים גדולים, הנובעים מרצוננו להביא בפני הקוראים עתון ברמה מדעית במחיר של שפופרת קטנה של משחת שיניים! וגם כך הולך הגרעון ומצטבר.

מאידך אנו מודים לקוראינו בעד המכתבים הרבים בעלי תוכן מועיל וקונסטרוקטיבי המגיעים אלינו. יש בין מכתבים אלה גם דברי בקורת, אבל בקורת חיובית רצויה ואף חיונית לקידום עניננו.

ועכשיו בקשה למוסדות (בתי-ספר, וכו׳) המקבלים את הגליונות במספרים גדולים. מהם אנחנו מבקשים כי יואילו להחזיר בהקדם האפשרי את החוברות הנשארות בידיהם. קיים תמיד ביקוש רב לחוברות והדפסת אכסמפלרים נוספים כרוכה בהוצאות גדולות.

בעיה ופתרונה

קבוצה של 11 מדענים עובדים על תכניה חשאית ומחזיקים את החומר בקשר לתכנית זו בארון מיוחד. הם רוצים להבטיח כי אי אפשר יהיה לפתוח את הארון, אלא בנוכחותם של לפחות 6 מתוך חברי הקבוצה. למטרה זו הוחלט לצייד את הארון במספר מנעולים ולתת לכל אחד מהמדענים מספר מפתחות ךך שאין לפתוח את הארון בלי שיהיו שם מדענים עם מפתחות לכל המנעולים. מנעולים דרושים וכמה מפתחות יש לתת לכל מדען?

ראה תשובה בעמוד 33.

ח ב ו ר ו ת

יקר קנאי

א. מ ב ו א

במאמר זה נעסוק באחד ממושגי היסוד של המתמטיקה. חשיבותו של מושג החבורה רבה היום, לא רק בכל ענפי המתמטיקה הטהורה, כי אם גם בפיסיקה.

ד ו ג מ א ו ת

כדי להבין את מושג החבורה נביא תחילה כמה דוגמאות פשוטות:

1. נתבונן בקבוצות כל המספרים השלמים החיוביים והשליליים (ז.א. ...,‎$-2,-1,0,1,2,\ldots$‎, ... וכו'). קיים כידוע: -

א. אם a ו-b מספרים שלמים, גם $a+b$ מספר שלם.

ב. $(a+b)+c=a+(b+c)$. חוק זה נקרא חוק הצרוף או חוק האסוציאטיבי.

ג. $a+b=b+a$ חוק זה נקרא חוק החלוף או חוק הקומוטטיבי.

ד. בין המספרים השלמים יש המספר אפס המצטיין בכך שחבורו לכל מספר a נותן בדיוק אותו ה-a, ז.א. כי, עבור כל a, $a+0=a$.

ה. לכל מספר שלם a קיים מספר שלם b כך ש- $b+a=0$. ואמנם, אם נקח $b=-a$ נקבל $(-a)+a=0$.

2. נקח כעת את קבוצת כל המספרים הרציונליים החיוביים, ז.א. מספרים אשר אפשר לרשום אותם בצורה p/q, כש-p ו-q הם מספרים שלמים חיוביים. אם הפעם נדון בפעולת הכפל בין איברי קבוצה זו נווכח בקיום חמישה חוקים המקבילים בדיוק לאלה שראינו למעלה עבור החבור של מספרים שלמים: -

א. אם a,b הם שברים כנ"ל תהיה גם המכפלה ab שבר כזה.

ב. קיים חוק הצרוף, ז.א. $(ab)c=a(bc)$.

ג. קיים גם חוק החלוף, $ab=ba$.

ד. קיים מספר 1 כך שעבור כל שבר a, $1\cdot a=a$, עובדה המקבילה לתפקיד האפס בחבור.

ה. לכל שבר חיובי a אפשר להתאים שבר חיובי b כך ש-
$ab=1$; זהו השבר $1/a$ הממלא בהכפלת השברים הפקיד
דומה לזה של $-a$ בחבור המספרים השלמים.

3. בתור דוגמא שלישית ניקח את קבוצת פעולות הסיבוב של מישור מסביב לנקודה קבועה בזויות שהן כפולות שלמות של $90°$ וקטנות מ-$360°$, ז.א. סבובים בזויות של $0°, 90°, 180°, 270°$. יהיו a ו-b שני סבובים כנ"ל ונסמן ב- $a*b$ את הסבוב הנוצר ע"י כך שמבצעים קודם את הסבוב a ואחר כך את b בתנאי שאם ע"י זה עשינו סבוב כללי יותר מ- $360°$ או שווה לו, נגדיר את הסכום ע"י ה"עודף" על $360°$.

למשל $90° * 180° = 270°$

אבל $180° * 270° = 90°$

כי, במקרה השני, סכום הזויות של שני הסבובים מגיע ל-$450°$ ולכן אנחנו מורידים $360°$ ומגדירים את הסכום, כאמור, ע"י ה"עודף". קל לראות כי גם הפעם יתקיימו חמשת החוקים: -

א. אם a ו- b הם סבובים בזויות שהן כפולות שלמות של $90°$ וקטנות מ-$360°$, יהיה גם $a*b$ סבוב כזה.

ב. $(a * b) * c = a * (b * c)$

ג. $a * b = b * a$

ד. סבוב ב-$0°$ מצורף לכל סבוב a יתן אותו סבוב a, מאחר שסבוב ב-$0°$ אינו משנה כלום לגבי מצב המישור המסתובב.

ה. לכל סבוב a מהקבוצה המדוברת אפשר להתאים סבוב שני b מאותה קבוצה, כך שחבורם ישתווה לסבוב ב- $0°$. לשם זה יש רק לדאוג שהזוית של b תהיה זו המשלימה את הזוית של a ל-$360°$.

הגדרת החבורה

לאור דוגמאות אלה ננסח את ההגדרה הבאה של חבורה:

תהי נתונה קבוצה G של איברים ונניח: -

1. קיים כלל מסויים המתאים לכל שני איברים a ו- b של G איבר אחד ויחיד c של G שיקרא ה"צרוף" של a ו- b ויסומן ב- $a*b$ (או לפעמים באופן פשוט ab). יש לשים לב כי פעולת "צרוף" זה היתה בדוגמא הראשונה חבור של מספרים שלמים, בשניה כפל של שברים, ובשלישי חבור של סבובים.

2. עבור כל איברים f,g,h של הקבוצה,
$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

3. נמצא ב-G איבר e כזה שעבור כל איבר a של G קיים
$a*e = e*a = a$.

4. לכל איבר a של G אפשר להתאים איבר b כך ש-
$$a*b = b*a = e,$$

קבוצה G עם צרוף בין איבריה המקיים את החוקים הנ"ל תיקרא "חבורה".

אם בחבורה G קיים גם $a*b = b*a$ עבור כל a ו- b אז נקראת החבורה "קומוטטיבית" או "אבלית", לזכרו של מתמטיקאי נורבגי דגול אבל (ABEL).

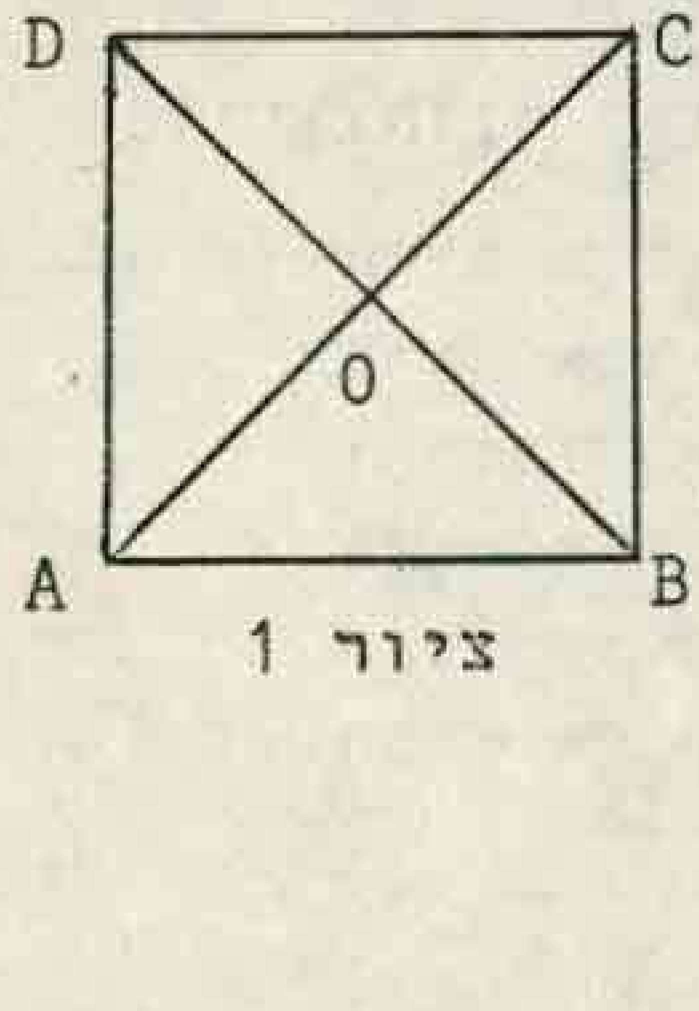
הקורא שם בודאי לב, שלא כללנו את הקומוטטיביות של פעולת הצרוף. הסיבה היא, כי הפעולה בחבורה אינה חייבת להיות חלופית. ואם גם שלש הדוגמאות אשר בהן התחלנו היו כלן של חבורות אבליות, נראה בהמשך גם דוגמאות של חבורות בלתי קומטטיביות.

<u>סדר של חבורה</u>

בין הדוגמאות לעיל, היו שתים הראשונות (המספרים השלמים עם חיבור רגיל כפעולת הצרוף, והשברים החיוביים עם הכפל הרגיל כפעולת הצרוף) בעלות אינסוף איברים. לעומת זה היתה החבורה השלישית של סבובי המישור מסביב לנקודה קבועה ב-$0°, 90°, 180°$, ו- $270°$ בת 4 איברים. חבורה בעלת מספר סופי של איברים נקראת חבורה סופית ואת מספר איבריה אנו מכנים בשם "סדר" החבורה.

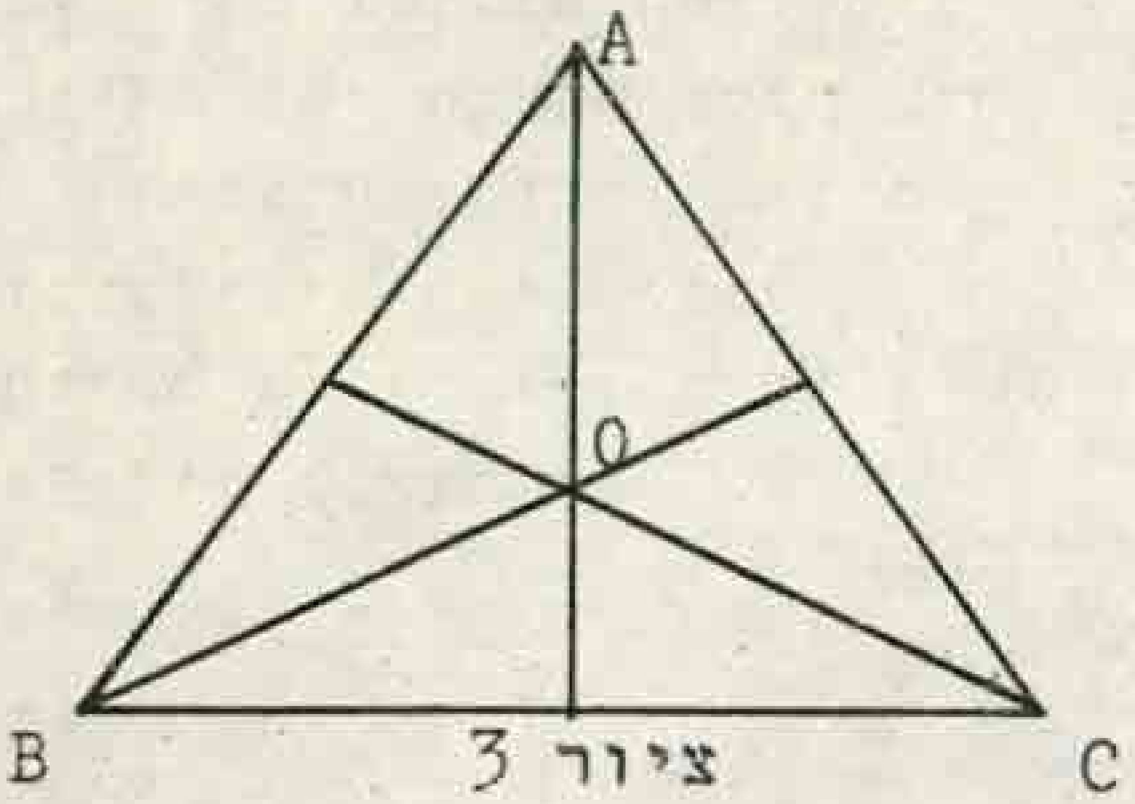
ב. <u>החבורה כבטוי לסימטריה של גופים גיאומטריים</u>

יהיה ABCD רבוע ו- 0 נקודת הפגישה של אלכסוניו (ציור 1). אחרי סבוב הרבוע מסביב לנקודה 0 (נגד כוון השעון) בזויות של $90°$, $180°$, או $270°$ יתלכד הוא עם עצמו. למשל אחרי סבוב ב: $90°$ תעבור הנקודה A ל-B, B ל-C, C ל-D ו- D ל- A. לעומת זאת יתן סבוב ב-$45°$ את הרבוע שבציור 2, שאינו מתלכד בכלל עם הרבוע המקורי.

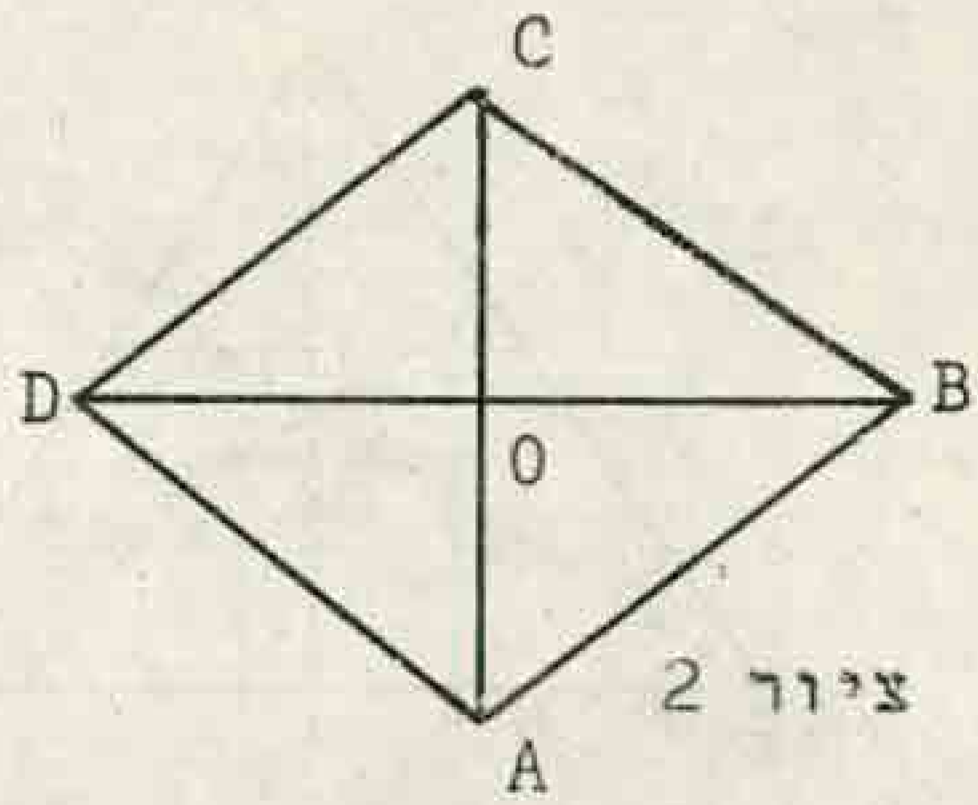


ציור 1

נסתכל עכשיו במשולש שוה צלעות ABC בעל מרכז בנקודה O (ציור 3).



ציור 3



ציור 2

הזוית COB היא של 120° ואחרי סבוב בזוית זו מסביב ל- O (נגד כוון השעון) יתלכד המשולש עם עצמו ואז מקבלים את המצב שבציור 4.

ציור 4

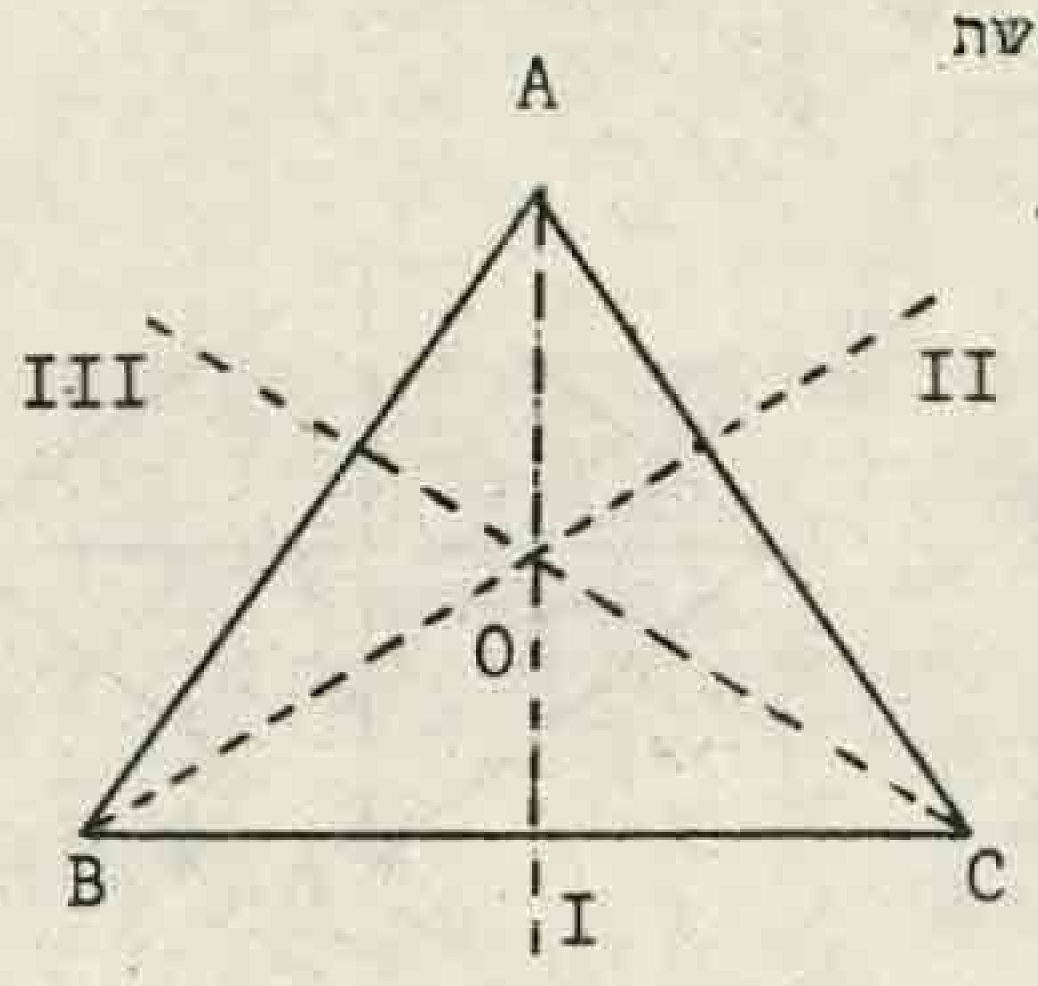
כמו כן לא ישתנה המשולש אחרי סבוב ב-240° וכמובן לא ישתנה אחרי סבוב ב- 0° (אשר הוא שווה ערך עם סבוב ב- 360). חבורת הסבובים המשאירים את המשולש ללא שנוי הוא איפוא מסדר 3.

באופן כללי אם נתון מצולע משוכלל בעל n צלעות ו- O היא מרכזו, יתלכד המצולע עם עצמו אחרי כל סבוב מסביב ל-O בכפולה שלמה של הזוית $(360/n)^\circ$, וקל מאד לראות, כי קבוצת כל הסבובים האלה (נגד כוון השעון) מהווה חבורה מסדר n . יחד עם זה ברור כי סבוב בזוית כלשהי (שאינה כפולה שלמה של $360^\circ/n$) כן ישנה את מצב המצולע.

חבורת הסבובים מסביב לנקודה קבועה נגד כוון השעון המשאירים תבנית מסויימת במצבה המקורי נותנת לנו אינפורמציה על הסימטריה הקיימת בתבנית המדוברת. למשל, במקרה של המצולע בעל n צלעות ראינו כי יש כאן חבורה מסדר n. אבל בזה לא מצינו עדיין את תכונות הסימטריה של התבנית. נחזור למשולש שוה צלעות (ראה הפעם ציור 5).

ראינו כבר למעלה כי סבובים מסביב ל-O בכפולות שלמות של 120° ישאירו את המשולש ללא שנוי. אבל הוא הדין גם לגבי שיקוף המשולש בכל אחד מהקווים הישרים I, II ו- III למשל, שיקוף ב-

II ישאיר את B במקומו המקורי בעוד ש- A ו-C יחליפו מקומם.



הקורא יוכל להיווכח כי שלושת הסיבובים ושלושת השיקופים מהווים יחד חבורה בעלת סדר 6. החבורה הזאת איננה קומוטטיבית כפי שנוכל להווכח אם נתבונן בשתי הפעולות הבאות: –

(א) סבוב ב-120°
(ב) שיקוף ב- I

אם נבצע את (א) יעברו (A,B,C) ל- (B,C,A). אחרי זה יעביר (ב) את ה- (B,C,A) ל-(B,A,C). זאת אומרת, כי פעולה (א) ואחריה (ב) מעבירות את (A,B,C) ל- (B,A,C).

מאידך, אם נבצע ראשון את (ב) יעברו (A,B,C) - (A,C,B). אחרי זה תעביר פעולה (א) את ה- (A,C,B) ל- (C,B,A).

ראינו איפוא כי במקרה זה הצרוף של שתי פעולות תלוי מאד בסדר הפעלתן.

את הדיון הנ"ל על סיבובים וסימטריות, אפשר להכליל למקרה של גופים מרחביים, ובאמת משפטים גיאומטריים רבים ניתנים להוכחה פשוטה בעזרת תורת החבורות. בפיסיקה של המצב המוצק נעזרים בתורת החבורות, כדי לחקור את הסימטריה של גבישים (היכולה להיות מסובכת למדי). כמו כן משתמשים רבות בתורת החבורות בפיסיקה אטומית וגרעינית – שוב מפני שאפשר לפשט ולנתח את שדה כח הפעולה אשר בין חלקיקים על ידי ניצול הסימטריה של המערכת.

ג. דוגמא מתורת המספרים

נבחר לנו מספר, למשל 5. ידוע כי כאשר נחלק 7 ב-5 נקבל את השארית 2, וכי נקבל אותה השארית אם נחלק ב-5 את המספרים 12, 17, 22, ... לעומת זאת נותנים המספרים 8, 13, 18,... כולם את השארית 3 כאשר מחלקים אותם ב-5; 9, 14,... ישאירו את השארית 4; 5, 10, 15, ... ישאירו את השארית 0.

השיקול הפשוט הזה מאפשר לנו לחלק את כל המספרים השלמים למחלקות, כך שכל המספרים באותה מחלקה ישאירו אותה השארית אם

נחלק אותו ב-5. המחלקות הן: -

$$\ldots\ldots,\ 15,\ 10,\ 5,\ 0,\ -5,\ -10,\ -15,\ \ldots$$
$$\ldots\ldots,\ 16,\ 11,\ 6,\ 1,\ -4,\ -9,\ -14,\ \ldots.$$
$$\ldots\ldots,\ 17,\ 12,\ 7,\ 2,\ -3,\ -8,\ -13,\ \ldots.$$
$$\ldots\ldots,\ 18,\ 13,\ 8,\ 3,\ -2,\ -7,\ -12,\ \ldots.$$
$$\ldots\ldots,\ 19,\ 14,\ 9,\ 4,\ -1,\ -6,\ -11,\ \ldots.$$

כפי שברור תמצינה חמש המחלקות האלה את כל המספרים השלמים. מקובל לסמן את המחלקה על ידי השארית המתקבלת כשמחלקים את איבריו במספר היסודי, במקרה שלפנינו ב-5, ולשים קו מעל למספר המשמש כסימן המחלקה. למשל, כשהמספר 5 (אז אומרים כי השאריות הן <u>מודולו</u> 5) נסמן את המחלקה

$$\ldots\ldots,\ 13,\ 8,\ 3,\ -2,\ -7,\ \ldots.$$

על ידי $\bar{3}$, נוכל להגיד כי המספר 3 הוא "נציג" של המחלקה 3. כמובן כי גם 38 או 12- היו יכולים לשמש כנציגי 3, מאחר וגם הם חברי המחלקה 3 ובעלי אותן הזכויות כמו 3.

בעזרת המושג של נציגים נוכל להגדיר פעולות של חיבור וכפל בין המחלקות. אם $\bar{a}$ ו-$\bar{b}$ הם מחלקות במובן האמור, נגדיר $\bar{a} + \bar{b}$ כמחלקה אשר כל אחד מנציגיה הוא סכום של איבר אחד מהמחלקה $\bar{a}$ ואחד מהמחלקה $\bar{b}$. כדי לבסס את ההגדרה הזאת יש להוכיח כי המחלקה אליה שייך סכום $a + b$ תלויה אך ורק במחלקות $\bar{a}$ ו-$\bar{b}$ ולא בבחירה המיוחדת של הנציגים a,b. אבל דבר זה כמעט ומובן מאליו. כי נניח ש-a_1,b_1 הם נציגי a,b וגם $a_2,\ b_2$ הם נציגים אחרים מאותן המחלקות: הכל יסתדר אם נוכיח כי $(a_1 + b_1)$ ו-$(a_2 + b_2)$ משאירים אותה השארית כשמחלקים אותם ב-5, ז.א. ש- $(a_2+b_2) - (a_1+b_1)$ מתחלק ב-5. אבל $a_1,\ a_2$ כן משאירים אותה השארית ובכן $a_1 - a_2$ מתחלק אמנם ב-5. מאחר ודבר זה נכון גם לגבי $b_1 - b_2$ יוצא כי $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)$ יתחלק גם הוא ב-5.

באופן דומה נגדיר כפל של מחלקות על-ידי כפל בין נציגי המחלקות, לפי זה יצא, למשל,

$$\bar{1}\cdot\bar{1} = \bar{1}\quad ;\bar{2}\cdot\bar{2} = \bar{1}\quad ;\bar{4}\cdot\bar{4} = \bar{1}\ ,\ldots.$$

המעונין למצא הוכחות מפורטות יותר יוכל לעיין במאמרו של ש. אביטל, על הנושא "שדות אלגבריים סופיים" בעתון זה, כרך 1, מס' 4, 115 – 121. קל להווכח כי חמש המחלקות מהוות חבורה עם הפעולה חיבור, אבל לא כן ביחס לכפל, כי אין למצא איבר הפוך ל- $\bar{0}$ ז.א. איבר עם תכונה ש- $\bar{a}\cdot\bar{0} = \bar{1}$. בלשון בני אדם אפשר לנסח את זה שאי אפשר להכפיל כפולה שלמה של 5 במספר שלם, כך שהמכפלה תשאיר שארית

1, כשנחלק אותה ב-5. אפשר להתגבר על בעיה זו אם נוציא את $\bar{0}$ מהקבוצה ונסתכל רק במחלקות $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$. נראה כי אלה מהווים חבורה לגבי פעולת הכפל.

תופעה דומה נראה אם במקום 5 ניקח כמחלק יסודי כל מספר ראשוני p. וגם אז נוכל להגדיר את המחלקות $\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\overline{p-1}$. אפשר לראות כי גם במקרה הזה תהווה קבוצת המחלקות בלי 0 חבורה לגבי כפל. אבל כדאי גם להדגיש פה כי כל זה יהיה נכון אך ורק עבור מספר ראשוני p. במקרה והמחלק הבסיסי איננו מספר ראשוני לא יהוו המחלקות חבורה, אפילו אחרי הוצאת המחלקה $\bar{0}$. נקח למשל, את המחלק 12. מאחר ו- $3\cdot 4$ מתחלק ב-12 יוצא כי $\bar{3}\circ\bar{4}=\bar{0}$. אם הם מהווים חבורה, אז צריכה להתקיים מחלקה $\bar{b}$ כך ש-

$$\bar{4}\circ\bar{b} = \bar{1}$$

משני אלה נובע

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \bar{0}\circ\bar{b}\\ &= (\bar{3}\circ\bar{4})\circ\bar{b}\\ &= \bar{3}\circ(\bar{4}\circ\bar{b})\\ &= \bar{3}\circ\bar{1}\\ &= \bar{3}\end{aligned}$$

מאחר וההנחה כי קיימת מחלקה שהיא ההיפוך של המחלקה $\bar{4}$ הביאה אותנו לידי הסתירה הזאת אנחנו רואים כי אין מחלקה כזאת. ובכך אין קבוצת המחלקות מהווה חבורה.

ד. משפטים יסודיים

נגדיר ראשית כל את המושג של "חבורה חלקית". תהי G חבורה ו- H קבוצת איברים מתוך G כך ש-

1) עבור כל שני איברים a ו-b ב-H יימצא ב- H גם הצרוף $a\circ b$.

2) האיבר e של G שייך ל-H.

3) אם a שייך ל-H אז ישתייך ל-H גם האיבר b המקיים
$$a*b = b*a = e$$

(אגב אורחא: מ-1) ו-3) אפשר להסיק 2) ולכן אין צורך להניח אותה כאכסיומה. מדוע?).

קבוצה H כזו של איברי G נקראת חבורה חלקית של G. במלים אחרות, חבורה חלקית של G היא קבוצת איברים המהווים בזכות עצמם חבורה עם אותה פעולת צרוף כמו בחבורה המקורית.

דוגמא: בחבורות כל המספרים השלמים (עם פעולת החיבור) מהווים כל המספרים הזוגיים חבורה חלקית וקל לראות כי הוא הדין לגבי קבוצת כל המספרים השלמים המתחלקים באיזה מספר שלם נתון, n.

אם G היא חבורה סופית תהיה גם כל חבורה חלקית שלה סופית. עבור כל איבר a של חבורה G נכתב

$a * a = a^2$, $a^2 * a = a^3$, וכו'

נכתב גם $e = a^0$, הוא איבר היחידה.

משפט:

תהא G חבורה סופית מסדר n, ו- a איבר ב- G. קבוצת החזקות של a מהווה חבורה סופית.

הוכחה:

החזקה a^0 מוגדרת כיחידה e של החבורה G. ברור כי כל חזקה a^n אם n שלם שייך ל- G, דבר שאפשר להוכיחו בקלות על ידי אינדוקציה. גם ברור מההגדרה כי $a^m a^n = a^{m+n}$, אם נגדיר a^{-m} ע"י b^m כש- $ab = e$.

קבוצת החזקות מהווה איפוא החבורה אשר, בתור חבורה חלקית של הקבוצה הסופית G, תהיה גם היא סופית. מזה נובע כי אם נתבונן בסדרת החזקות $e, a, a^2, a^3, \dots$ נמצא ביניהן רק מספר סופי של איברים שונים. יוצא איפוא כי קיימים בתוך הסדרה שני איברים שווים (למעשה יתקיימו הרבה יותר מזוג אחד אבל אין זה חשוב כרגע). נניח כי, עבור שני מספרים חיוביים שונים n,m

$$a^m = a^n$$

ונוכל להניח גם כי $n < m$. נכתוב $n-m = \ell$. אנחנו רואים כי $a^n a^\ell = a^{n+\ell} = a^m = a^n$ ובכן $a^\ell = e$. מזה נובע כי, עבור כל k, $a^{k+\ell} = a^k a^\ell = a^k e = a^k$. לכן אם נקח את הסדרה $e, a, a^2, \dots, a^{\ell-1}$

נראה כי ההמשך $a^{\ell}, a^{\ell+1}, \dots, a^{2\ell-1}$ הוא אותה הסדרה, ואח"כ חוזרת הסדרה פעם נוספת, וכו'.

ראינו איפוא כי הסדרה $e, a, a^2, \dots, a^{\ell}$ מהווה חבורה סופית, שהיא חבורה חלקית של G.

<u>משפט:</u>

אם G הוא חבורה סופית ו-H כל חבורה חלקית שהיא של G, אז הסדר של H מחלק את הסדר של G.

<u>הוכחה:</u>

יהיה n הסדר של G ו- t זה של H. נרשום את כל איברי H בסדר כלשהו

$$h_1 = e, h_2, h_3, \dots, h_t \qquad (1)$$

האיברים האלה הם כמובן שונים אחד מהשני. יהיה g_1 איבר כלשהו של G שאיננו שייך ל-H, ונרשום את המכפלות

$$g_1e = g_1, g_1h_2, g_1h_3, \dots, g_1h_t \qquad (2)$$

אפשר לראות, כי גם בין הרשימה האחרונה הזאת אין שני איברים שווים כי אם $g_1h_i = g_1h_j$ נוכל להכפיל את שניהם בהפוך של g_1 ואז נקבל $h_i = h_j$ מה שנוגד את ההנחה. כמו כן נוכל להוכיח כי אין ל-(1) ול-(2) איבר משותף. כי אם $h_i = g_1h_j$ נוכל להכפיל את שניהם באותו h_k אשר עבורו $h_jh_k = e$, ואשר קיומו מובטח ע"י זה שאיברי (1) מהווים חבורה. מזה יוצא איפוא כי

$$h_ih_k = g_1h_jh_k = g_1e = g_1 \qquad (3)$$

אבל גם h_ih_k שייך ל-(1) ו- g_1 אינו שייך שמה. הסתירה הזאת מוכיחה את טענתנו. במקרה ש-(1) ו-(2) אינם ממצים את כל G נוכל למצוא איבר נוסף g_2 שאינו שייך לאף אחת משתי הרשימות האלה.

נתבונן עכשיו ברשימה

$$g_2e = g_2, g_2h_2, g_2h_3, \dots, g_2h_t \qquad (4)$$

כמו במקרה הקודם נוכל להוכיח כי איברי (4) שונים הם אחד

מהשני ואין אף אחד מהם שווה לאחד האיברים ברשימות (1) ו-(2). כך נמשיך עד שנמצה את החבורה הסופית G. אבל ראינו שהשיטה היא לקחת כל פעם בדיוק t איברים נוספים ובמקרה שנשאר עוד איבר נשארים לפחות t איברים חדשים. זה לא ייתכן אלא אם כן יהיה המספר הכללי של האיברים כפולה של t; בדיוק מה שרצינו להוכיח.

ה. <u>המשפט הקטן של פרמה</u> (FERMAT)

משפט זה הוא שימוש פשוט ויפה במשפטים היסודיים בתורת החבורות.

<u>משפט</u>:

אם p הוא מספר ראשוני, ו- a מספר שלם כלשהו, אזי $a^{p-1}-1$ מתחלק ב- p.

<u>הוכחה</u>:

נבנה את מחלקות השאריות מודולו p ומהן נבנה את החבורה G לגבי פעולת הכפל. סדר החבורה היא p-1, ואיבריה הם

$\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{(p-1)}$. יהיה $a^0 = e, a, a^2, \ldots, a^{\ell-1}$

החבורה שנוצרה מהחזקות של a. היא חבורה חלקית של G ולכן הסדר שלה, ℓ, מחלק את p-1. יהיה $p - 1 = \ell m$. אז יהיה

$$a^{p-1} = a^{\ell m} = e^m = e = \bar{1}$$

וזה שוה ערך עם הצהרת המשפט.

נזכיר בסוף, כי מושג החבורה המופשטת הוגדר ע"י המתמטיקאי הצרפתי גלואה (GALOIS) שהצליח להוכיח בעזרתו משפטים עמוקים ומסובכים בתורת המשוואות, עוד טרם מלאו לו 19 שנה (הוא מת בגיל 20!).

* *

*

התחרות מתמדת להתרת בעיות

תוצאות המחזור הרביעי של ההתחרות להתרת בעיות 181 - 225
הן:

המצטיינים בין תלמידי הכתות י"א - י"ב

1. גולדרינג מרדכי, ריאלי, חיפה 128
2. טליל אורי, " " 115
3. רייך שמעון, " " 114
4. יהודאי עמירם, תיכון עירוני א', ת"א 112
5. איש שלום אריאל, תיכון עירוני ה', ת"א 95

המצטיינים בין תלמידי הכתות ט' - י'

1. עמית מיכה, תיכון, קרית מוצקין 97
2. אלכסנדר גד, תיכון עירוני ה', ת"א 84
3. סוריק אנדרי, תיכון מקצועי, חיפה 75
4. שפירא זאב, תיכון עירוני ה', ת"א 53

השניים הראשונים בכל קבוצה יקבלו פרסי ספרים, אשר יישלחו להם לפי כתובותיהם. שאר המצטיינים ברשימות האלה יקבלו בתור פרס חתימה לשנה על "גליונות למתמטיקה".

בעיה בתכנון ליניארי

י. גיליס וחנה ליפסון

בחוברת הקודמת גמרנו חלק ב' של מאמרנו על תכנון ליניארי בבעיה אשר פתרונה הופיע בסוף אותה חוברת. עכשיו קבלנו מכתב מעניין מאת ה' יצחק בן-ישראל (מגמנסיה הרצליה), אשר בו העמיד אותנו על טעות אריתמטית בפתרוננו. השורה t בסיבוב מס' 2 בפתרון מכילה כמה טעויות חשבוניות המשבשות את כל מה שבא אחרי סיבוב זה. אנחנו מודים מאד למר בן-ישראל בעד תרומתו זו ובעמוד הבא תמצאו את הפתרון הנכון הנותן ערך יותר גדול עבור P מזה שהתקבל מהפתרון המוטעה.

אין לנו ברירה, אלא להתנצל בפני קוראינו על טעות מצערת זו ונשתדל ללמוד את הלקח, כי אין למסור דבר לדפוס בלי שבע בדיקות.

במכתבו העיר גם מר בן-ישראל, כי אפשר היה להגיע לפתרון האופטימלי יותר מהר ע"י בחירה אחרת של הבסיס עבור הפתרון הסביר הראשון. בזה צדק הוא, אלא שלא תמיד קל לראות מה הוא הפתרון הסביר הראשון העלול להועיל בצורה זו ורצוי לקבוע שיטה מכנית (כמו שלנו). זה חשוב ביותר כשמספר המשתנים והמגבלות גדול והעבודה מתבצעת במחשב אלקטרוני. אז עדיפה שיטה סטנדרטית שאינה דורשת מחשבה מיוחדת על שיטה יותר מהירה. כי ההבדל בין שתי שיטות כאלה לא יעלה על מספר קטן של סיבובים נוספים וזה נחשב כמחיר סביר עבור פישוט התיכנות.

מספר החזרה	C		3	2	1	0	0	0	0			
			x	y	z	r	s	t	u	B	B_1	
0	r	0	20	8	1	1	0	0	0	100	5 ←R	
	s	0	6	3	11	0	1	0	0	90	15	
	t	0	2	3	3	0	0	1	0	40	20	
	u	0	1	1	1	0	0	0	1	15	15	
	Z		0	0	0	0	0	0	0			
	Z+C		3	2	1	0	0	0	0			P=0
			↑K									
1	x	-3	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	0	0	5	100	
	s	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{107}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	0	0	60	$\frac{600}{107}$ ←R	
	t	0	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{29}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	1	0	30	$\frac{300}{29}$	
	u	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{19}{20}$	$-\frac{1}{20}$	0	0	1	10	$\frac{200}{19}$	
	Z		-3	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{20}$	0	0	0			
	Z+C		0	$\frac{4}{5}$	$\frac{17}{20}$	$-\frac{3}{20}$	0	0	0			P=15
					↑K							

מספר הטבלה	C		3	2	1	0	0	0	0			
			x	y	z	r	s	t	u	B	B_1	
2	z	-1	0	$\frac{6}{107}$	1	$-\frac{3}{107}$	$\frac{10}{107}$	0	0	$\frac{600}{107}$	100	
	x	-3	1	$\frac{85}{214}$	0	$\frac{11}{214}$	$-\frac{1}{214}$	0	0	$\frac{505}{107}$	$\frac{202}{17}$	
	t	0	0	$\frac{218}{107}$	0	$-\frac{2}{107}$	$-\frac{29}{107}$	1	0	$\frac{1470}{107}$	$\frac{735}{109}$	←R
	u	0	0	$\frac{117}{214}$	0	$-\frac{5}{214}$	$-\frac{19}{214}$	0	1	$\frac{500}{107}$	$\frac{1000}{117}$	
	Z		-3	$\frac{267}{214}$	-1	$-\frac{27}{214}$	$-\frac{17}{214}$	0	0			
	Z+C		0	$\frac{161}{214}$	0	$-\frac{27}{214}$	$-\frac{17}{214}$	0	0			P=19.77
				↑K								
3	y	-2	0	1	0	$-\frac{1}{109}$	$-\frac{29}{218}$	$\frac{107}{218}$	0	$\frac{735}{109}$	$-\frac{1470}{29}$	
	z	-1	0	0	1	$-\frac{3}{109}$	$\frac{11}{109}$	$-\frac{3}{109}$	0	$\frac{570}{109}$	$\frac{570}{11}$	
	x	-3	1	0	0	$\frac{6}{109}$	$\frac{21}{436}$	$-\frac{85}{436}$	0	$\frac{445}{218}$	$\frac{890}{21}$	←R
	w	0	0	0	0	$-\frac{2}{109}$	$-\frac{7}{436}$	$-\frac{117}{436}$	1	$\frac{215}{218}$	$-\frac{430}{7}$	
	Z		-3	-2	-1	$-\frac{13}{109}$	$\frac{97}{436}$	$-\frac{161}{436}$	0			
	Z+C		0	0	0	$-\frac{13}{109}$	$\frac{97}{436}$	$-\frac{161}{436}$	0			P=24.84
							↑K					
4	s	0	$\frac{436}{21}$	0	0	$\frac{8}{7}$	1	$-\frac{85}{21}$	0	$\frac{890}{21}$		
	y	-2	$\frac{58}{21}$	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{1}{21}$	0	$\frac{260}{21}$		
	z	-1	$-\frac{44}{21}$	0	1	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{8}{21}$	0	$\frac{20}{21}$		
	u	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$		P=25.76
	Z		$-\frac{24}{7}$	-2	-1	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0			
	Z+C		$-\frac{3}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0			

$x = 0 \qquad y = \frac{260}{21} \qquad z = \frac{20}{21} \qquad P = 25.76$

ממוצע חשבוני - הנדסי

אנחנו יוצאים יוצאים מהעובדה הידועה, כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים איננו יכול להיות קטן מהממוצע ההנדסי, ואף יהיה גדול ממנו, אלא אם כך שני המספרים הנתונים שווים הם. במלים אחרות, אם $a > 0$, $b > 0$, אזי

$$\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \qquad (1)$$

ושווה אך ורק במקרה $a = b$. כל זה פשוט מאד ונובע מיד מכך ש-

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

מטרתנו כאן, היא להגדיר ממוצע מסוג חדש אשר ערכו נמצא תמיד בין החשבוני וההנדסי. הסוג החדש הזה של ממוצע הומצא ע"י המתמטיקאי הגרמני גאוס והוא שקרא אותו בשם הממוצע החשבוני-הנדסי.

יהיו שני מספרים נתונים, a_o, b_o המקיימים $a_o > b_o > 0$. עכשיו אנחנו מגדירים

$$a_1 = \frac{1}{2}(a_o + b_o) \ ; \ b_1 = \sqrt{a_o b_o}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \ ; \ b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$$

$$\vdots \qquad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \ ; \ b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

$$\vdots$$

מהאמור לעיל נובע, כי $a_1 > b_1$. אבל ברור גם כי

$$a_1 < \frac{1}{2}(a_o + a_o) = a_o \ ; \ b_1 > \sqrt{b_o b_o} = b_o$$

ובכך

$$a_o > a_1 > b_1 > b_o \qquad (3)$$

מאחר ו- (a_2,b_2) נוצרו מ- (a_1,b_1) בדיוק כפי שנוצרו אלה האחרונים מ- (a_o,b_o) נובע איפוא כי גם

$$a_1 > a_2 > b_2 > b_1 \qquad (4)$$

את התהליך הזה נוכל להמשיך, ובכך, עבור כל n, יש לנו

$$a_o > a_1 > a_2 \dots > a_{n-1} > a_n > b_n > b_{n-1} \dots > b_2 > b_1 > b_o \qquad (5)$$

הסדרה a_n, $(n = 0,1,2,\dots)$ מהווה סדרה יורדת אשר כל איבריה גדולים מ- b_o. ברור איפוא, כי איברים אלה יתקרבו לערך גבולי, נגיד α, כש-n הולך וגדל. כמו כן הסדרה b_n מהווה סדרה עולה של איברים אשר כלם קטנים מ- a_o ולכן גם הם ישאפו לקראת ערך גבולי מסויים כש-n גדל. נקרא לגבול הזה β. אנחנו רוצים להוכיח כי $\alpha = \beta$.

לשם זה נסתכל בהגדרה (2) אשר לפיה

$$\frac{a_n - b_n}{a_{n-1} - b_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}})}{a_{n-1} - b_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}})}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}}}$$

$$< \frac{1}{2}$$

ולכן $0 < a_n - b_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1})$

כמו כן $0 < a_{n-1} - b_{n-1} < \frac{1}{2}(a_{n-2} - b_{n-2})$

$$\vdots$$

$$0 < a_3 - b_3 < \frac{1}{2}(a_2 - b_2)$$

$$0 < a_2 - b_2 < \frac{1}{2}(a_1 - b_1)$$

$$0 < a_1 - b_1 < \frac{1}{2}(a_o - b_o)$$

ומזה

$$0 < a_n - b_n < \frac{1}{2^n}(a_o - b_o)$$

רואים איפוא, כי עבור n מספיק גדול יהיה $a_n - b_n$ קטן מאד ואמנם ישאף לקראת 0. אבל מאחר ועבור n גדול יהיה a_n קרוב ככל האפשר ל-α, ו-b_n ל-β יוצא כי אמנם $\beta = \alpha$.

ערכם המשותף של α, β הוא מה שקרא גאוס בשם "הממוצע החשבוני-הנדסי" ונתן לו את הסימן $M(a_o,b_o)$. בסדרה של מאמרים יפים מאד, הוכיח גאוס כמה תכונות מענינות של הממוצע הזה.

כאן ניתן לדוגמא את החשוב של $M(4,1)$.

n	0	1	2	3	4
a_n	4.0	2.5	2.25	2.243,034,0	2.243,028,5
b_n	1.0	2.0	2.2360798	2.243,023,2	2.243,028,5

מאחר ו- $a_4 = b_4$, עד לדיוק של חישובינו, יוצא כי כל האיברים הבאים בטורים b_n, a_n יתלכדו גם הם בערך המשותף הזה ולכן $M(4,1) = 2.243,028,5$.

קיימת שיטה יפה, גם היא של גאוס, לחשב את הזוגות (a_i,b_i) השונים וגם את $M(a_o,b_o)$.

מאחר ו- $0 < \frac{b_i}{a_i} < 1$ עבור כל i, נוכל להגדיר

$$M_i = \frac{1}{2}\arc\cos\frac{b_i}{a_i}$$

ז.א.

$$\frac{b_i}{a_i} = \cos 2M_i$$

ואז

$$\frac{a_1}{a_o} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b_o}{a_o}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2M_o)$$

$$= \cos^2 M_o$$

וכמו כן

$$\frac{a_2}{a_1} = \cos^2 M_1$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \cos^2 M_2$$

$$\vdots$$

אבל

$$\mathrm{tg}^2 M_o = \frac{1 - \frac{a_1}{a_o}}{\frac{a_1}{a_o}} = \frac{a_o - b_o}{a_o + b_o}$$

$$= \frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a_1^2}}$$

$$= \sin 2M_1$$

ושוב

$$\mathrm{tg}^2 M_1 = \sin 2M_2$$

$$\mathrm{tg}^2 M_2 = \sin 2M_3$$

וכו'.

לכן נוכל לחשב לפי הסדר, כשמתחילים עם a_o, b_o

$$M_o = \frac{1}{2} \text{arc cos} \frac{b_o}{a_o}$$

$$a_1 = a_o \cos^2 M_o$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \text{arc sin} (tg^2 M_o)$$

$$b_1 = a_1 \cos 2 M_1$$

$$a_2 = a_1 \cos^2 M_1$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \text{arc sin} (tg^2 M_1)$$

$$b_2 = a_2 \cos 2 M_2$$

$$a_3 = a_2 \cos^2 M_2$$

וכו'

מזה רואים הצגה שניה של $M(a_o,b_o)$ בצורת

$$M(a_o,b_o) = a_o \cos^2 M_o \cos^2 M_1 \cos^2 M_2 \cos^2 M_3 \ldots$$

בסוף נביא שמוש מעניין ומפתיע בפונקציה $M(a_o,b_o)$ בקשר לאורך היקף של אל פסה. נגדיר את האליפסה כמקומה הגיאומטרי של נקודה משתנית אשר סכום מרחקיה משתי נקודות קבועות הוא קבוע. אם שתי הנקודות הקבועות הן S, S' ו- P הנקודה המשתנית יש לנו

$$PS + PS' = 2a$$

כש-a קבוע. יהיה $2c$ האורך של SS'. ברור כי $c > a$, ונגדיר

$$a_o = a \ , \ b_o = \sqrt{a^2 - c^2}$$

עכשיו ניצור את הזוגות $(a_1 b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3),\dots$

המשפט הגיאומטרי נותן לנו אפשרות לחשב את אורך ההיקף של האליפסה.
לשם זה נגדיר

$$\lambda_i = \frac{1}{2}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right), \quad (i = 0,1,2,\dots) \qquad (6)$$

מאחר ו- $a_i \geqslant a_{i+1}$ רואים כי $\lambda_i \geqslant 0$

אפשר לנסח את המשפט כדלקמן:-

אורך ההיקף של האליפסה שווה ל-

$$\frac{2\pi}{M(a_o,b_o)} \{a^2 - \frac{1}{2} c^2 [1+\lambda_o+\lambda_o\lambda_1+\lambda_o\lambda_1\lambda_2+\dots]\} \qquad (7)$$

מאחר ו- a_i וגם a_{i+1} שואפים שניהם ל- $M(a_o,b_o)$ יוצא כי λ_i
הולך וקטן כש-i עולה. למשל במקרה דלעיל כש- $a_o = 4$, $b_o = 1$
יש לנו

$$\lambda_o = 0.3 \ ; \ \lambda_1 = .0\dot{5} \ ; \ \lambda_2 = .0015528 \ ; \ \lambda_3 = .000,001,3$$

מזה נובע כי, בדרך כלל, בחישוב של הנוסחה (7) נוכל להזניח את
האיברים ב- [] אחרי שנים או שלשה הראשונים. היקף האליפסה אם
$a_o = 4$, $b_o = 1$ (ולכן $c^2 = 15$) הוא איפוא

$$\frac{2\pi}{2.243,0285} \{16 - \frac{15}{2} [1+0.3+0.3\cdot 0.0\dot{5}+0.3\cdot 0.0\dot{5}\cdot 0.001,552,8$$

$$+0.3\cdot 0.0\dot{5}\cdot 0.001528\cdot 0.000,001,3 \dots]\}$$

$$= 5.461,193\ \pi$$

לצערנו לא נוכל להביא כאן את ההוכחה של הנוסחה (7), כי
היא תלויה בשיטות מתמטיות, אשר לא תהיינה מוכרות לרוב הקוראים.

* *

*

חלוקת המספרים הראשוניים

ידוע עוד מימי היוונים כי מספר המספרים הראשוניים הוא אינסופי. נחזור כאן על ההוכחה המפורסמת כי נראה שאפשר להסיק ממנה קצת יותר מהעובדה הפשוטה של אינסופיות הקבוצה של מספרים ראשוניים.

נסמן, איפוא את סדרת המספרים הראשוניים ע"י

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \qquad (1)$$

והמטרה הראשונה היא להוכיח כי הסדרה אינסופית. ההוכחה הקלאסית היא כזאת: -

יהיה

$$q_n = p_1 p_2 \cdots p_n - 1 \qquad (2)$$

ברור כי q_n אינו מתחלק באף אחד מהקבוצה $p_1, p_2, \dots, p_n$. ובכן או ש- q_n הוא מספר ראשוני (שונה מ-n הראשונים האלה). או שיש לו גורם ראשוני מחוץ לקבוצה $p_1, \dots, p_n$. בשני המקרים ראינו כי קיים מספר ראשוני שאינו נמצא בין n הראשונים. מאחר ו- n הוא כל מספר טבעי שהוא נובע כי הקבוצה הכללית היא אינסופית.

הדבר הנוסף שניתן להסיק מההוכחה הזאת היא ש-

$$p_n \leqslant 2^{2^n} \qquad (3)$$

כי ראינו מההוכחה כי

$$p_{N+1} < p_1 p_2 \cdots p_N - 1 < p_1 p_2 \cdots p_N \qquad (4)$$

נניח כי האי-שויון (3) נכון עבור $n = 1, 2, \dots, N$. אז נראה מ- (4) כי

$$\begin{aligned} p_{N+1} &< 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot \ldots \cdot 2^{2^N} \\ &= 2^{2+2^2 \dots +2^N} \\ &= 2^{2^{N+1}-2} \\ &< 2^{2^{N+1}} \end{aligned} \qquad (5)$$

יש לנו איפוא הוכחה אינדוקטיבית. ראינו כי קיומו של (3) עבור N הערכים הראשונים של n מבטיח את קיומו גם בשביל N+1. אבל הוא נכון כש- $N = 1$, ולכן בשביל $N = 2$, ובכן עבור $N = 3$ וכו', ז.א. עבור כל N.

אם נסמן ב- $\pi(x)$ את מספר המספרים הראשונים שאינם גדולים מ-x ידוע כי, עבור x גדול, נותן $x/\log x$ קרוב יחסי טוב ל- $\pi(x)$. עובדה זו היא העיקר של משפט המספרים הראשוניים שהוכח לפני כשבעים שנה. המשפט הקלאסי אשר בו התחלנו הוא ש- $\pi(x)$ גדל ללא גבול עם גדולו של x, ומההוספה הקטנה שהוספנו על המשפט הקלאסי, אפשר לראות כי

$$\pi(x) \geqslant \log(\log x) - 1 \qquad (6)$$

כשבסיס הלוגריתמים הוא 2.

כי הרי ברור ש- $\pi(p_n) = n$. עבור כל x נמצא n כך ש-

$$p_n \leqslant x \leqslant p_{n+1} \qquad (7)$$

דבר שתמיד אפשרי לפי המשפט הראשון. אז יש לנו

$$\begin{aligned} \pi(x) &> \pi(p_n) \\ &= n \end{aligned} \qquad (8)$$

אבל לפי (5),

$$\begin{aligned} x &\leqslant p_{n+1} \\ &\leqslant 2^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

ובכן

$$n + 1 \geqslant \log \log x \qquad (9)$$

מתוך (8) ו-(9) אפשר להסיק את (6).

למעשה אפשר להסיק קצת יותר על אודות $\pi(x)$ בלי לצאת מהתחום של הוכחות אלמנטאריות. לזה נקח איזה N קבוע, ונסמן ב- A את קבוצת אותם המספרים השלמים אשר אין להם גורם ראשוני גדול מ-p_N. יהיה $f(x)$ מספר האיברים של A שאינם גדולים מ-x.

אם המספר y שייך ל-A אז יש לו הצורה

$$y = m^2 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$$

כשהחזקות α_i הן כלן 0 או 1. דבר זה ברור כי נוכל לקחת עבור m^2 את המספר הרבועי הגדול ביותר המחלק את y ואז יהיה $\frac{y}{m^2}$ מספר

שלם אשר גורמיו הראשוניים מופיעים כלם בחזקה ראשונה. מאחר ש- y שייך ל- A אין גורמים ראשוניים שבאים בחשבון פרט ל-N הראשונים. אם y אינו גדול מ-x אז

$$m^2 \leqslant y$$

$$\leqslant x$$

ובכן
$$m \leqslant \sqrt{x} \qquad (10)$$

ולכן מספר הערכים האפשריים עבור m אינו עולה על $\sqrt{x}$, מאידך מספר האפשרויות, עבור כל אחת מהחזקות $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ הוא 2, ולכן מספר האפשרויות השונות עבור y אינו עולה על $2^N \cdot \sqrt{x}$, ז.א.

$$f(x) \leqslant 2^N \cdot \sqrt{x} \qquad (11)$$

כל מספר שאינו גדול מ-p_N שייך ל-A כי הרי לגביהם אין ההגבלה בעלת משמעות מאחר שבין-כך למספר שאינו גדול מ- p_N אין גורם ראשוני גדול מ-p_N, ז.א. $f(p_N) = p_N$ עכשיו נציב $x = p_N$ באי שויון (11), ונקבל

$$p_N = f(p_N)$$

$$\leqslant 2^N \sqrt{p_N}$$

ולכן
$$\sqrt{p_N} \leqslant 2^N$$

ז.א.
$$p_N \leqslant 2^{2N} \qquad (12)$$

ברור כי (12) אומר הרבה יותר מ-(5), אם גם האמת המלאה היא עדיין עוד הרבה יותר. עכשיו, עבור x כלשהו, נגדיר את n ע"י

$$p_n \leqslant x \leqslant p_{n+1} \qquad (13)$$

מ-(12) ו-(13) אנחנו רואים כי

$$x \leqslant 2^{2(n+1)} \qquad (14)$$

ולכן

$$n \geqslant \frac{1}{2} \log_2 x - 1$$

$$\pi(x) \geqslant \pi(p_n)$$
$$= n$$

ז.א. $$\pi(x) > \frac{1}{2} \log_2 x - 1 \qquad (15)$$

מה שרצינו להוכיח.

בעיות חדשות

הבעיות המצויינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט׳ ו-י׳ בלבד (אין פרוש הדבר שהן קלות). את הפתרונות יש להגיש למערכת עד 1.9.65.

ת.241* (3 נקודות) מתוך כל המספרים השלמים בין 1 ל-10,000,000,000 כמה ישנם אשר אין הספרה 1 מופיעה בהם?

ת.242* (4 נקודות) כמה מספרים שלמים חיוביים x קיימים, שהם קטנים מ-10,000 כך שההפרש $2^x - x^2$ אינו מתחלק ב-7?

ת.243* (4 נקודות) כל אחד מקדקדי המשולש ABC מחובר ע"י קווים ישרים ל- n נקודות פנימיות של הצלע שממולו, ואין שלשה מתוך הקווים האלה העוברים דרך נקודה אחת (פרט לנקודות A, B, C). לכמה חלקים מחולק המשולש ע"י הקווים האלה?

ת.244* (4 נקודות) למספרים 90ABC17, 491ABC4, ו- 79ABC יש גורם משותף גדול מ-1. למצוא את הגורם המשותף הזה ואת A,B,C.

ת.245* (5 נקודות) נתונות 5 נקודות במישור כשאין שלש מביניהן על קו ישר אחד. הוכח כי נוכל תמיד לבחור בארבע מהן, כך שכל אחת מהארבע תימצא מחוץ למשולש המוגדר ע"י שלשת חבריה ברביעיה?

ת.246* (2 נקודות) עבור כל מספר ממשי x יסמן $[x]$ את המספר השלם הגדול ביותר אשר אינו גדול מ-x (למשל: $3 = [3.1]$,

$[-7.6] = -8$, $[2.0] = 2$, וכו׳).
הוכח כי עבור כל x וכל מספר חיובי שלם n קיים

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] \dots + [x + \frac{1}{n}] = [nx].$$

ת.247 (4 נקודות) לחשב את הסכום

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \dots + (-1)^m \binom{n}{m}$$

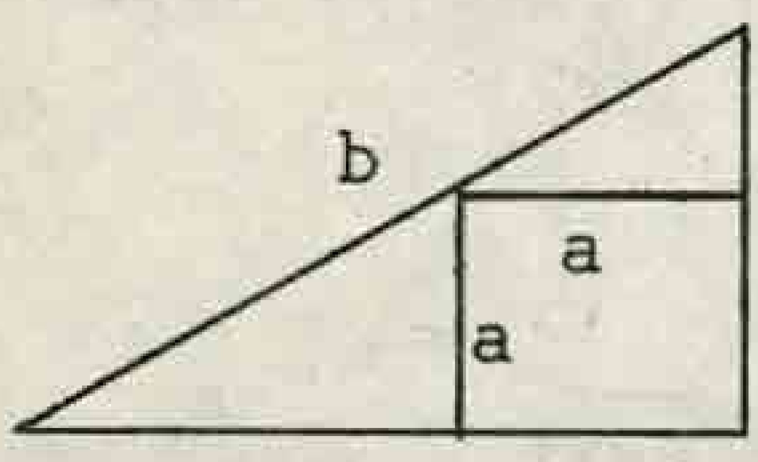
כש-m ו-n הם שלמים, $n \geqslant m \geqslant 0$.

ת.248* (2 נקודות) הוכח כי עבור כל x ממשי

$$(x + a + b)(x - a + b)(x + a - b)(x - a - b) \geqslant - 4 a^2b^2.$$

עבור איזה ערכים של x קיים שויון? (הוצע ע"י ח. מרדיקס)

ת.249* (4 נקודות) גיל ראובן גדול פי 2 מהגיל שהיה לשמעון בעת שמספר שנותיו של ראובן היה החצי ממספר השנים שיהיו לשמעון כשיהיה גילו פי 3 מן הגיל שהיה לראובן בעת היותו גדול פי 3 משמעון. סכום גילי ראובן ושמעון היום הוא 48 שנים. בני כמה הם? (הוצע ע"י ח. מרדיקס)



ת.250* (3 נקודות) במשולש ישר זוית, אשר אורך יתרו b חסום רבוע אשר צלעו a כך שהם בעלי זוית ישרה משותפת. חשב את שטח המשולש. (הוצע ע"י ח. מרדיקס)

ת.251* (2 נקודות) תהיינה P, Q, R שלש נקודות כלשהן על הצלעות BC, CA, AB בהתאמה של המשולש ABC. להוכיח כי שלשת המעגלים החוסמים את המשולשים ARQ, BPR, ו- CPQ עוברים דרך נקודה אחת. (הוצע ע"י ח. מרדיקס)

ת.252 (4 נקודות) אם במשולש ABC התיכונים לצלעות שמול הזויות B ו- C מאונכים זה לזה, אז קיים:-

$$\cot B + \cot C = \frac{1}{2} \cot A$$

ת.253 (3 נקודות), נתון כי

$$\frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha + \phi)} + \frac{\sin(\beta + \theta)}{\sin(\beta + \phi)} = \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos(\alpha + \phi)} + \frac{\cos(\beta + \theta)}{\cos(\beta + \phi)}$$

הוכח כי לפחות אחד מבין המספרים $\theta - \phi$, $\alpha - \beta + \frac{1}{2}\pi$,
$\alpha + \beta + 2\phi$ יהיה מכפלה שלמה של π.

ת.254 (4 נקודות) למצוא את כל הערכים האפשריים של $\sin\theta$ כשנתון
כי $\sin 7\theta + 8\sin^7\theta = 0$

ת.255* (4 נקודות) למצוא את סכום כל המחלקים של המספר 252,000
(כולל 1 והמספר 252,000 בעצמו).

פתרון הבעיות ת. 211 - 225

ת.211 נציב $y = \sqrt{x-1}$ ואז מקבלים

$$\sqrt{y^2 + 4 - 4y} + \sqrt{y^2 + 9 - 6y} = 1$$

ז.א. $$|y - 2| + |y - 3| = 1$$

א) $y \geqslant 3$. במקרה זה

$$(y - 2) + (y - 3) = 1$$

לכך $y = 3$, $x = 10$.

ב) $2 \leqslant y \leqslant 3$. הפעם $(y - 2) + (3 - y) = 1$ מה שנכון
עבור כל y.

ג) $y \leqslant 2$, ואז $(2 - y) + (3 - y) = 1$, ז.א. $y = 2$.

יוצא איפוא, כי המשוואה מתקיימת עבור כל y המקיים
$2 \leqslant y \leqslant 3$, ז.א. עבור כל x המקיים $5 \leqslant x \leqslant 10$.

ת.212 נציב $x = b+c-a$, $y = c+a-b$, $z = a+b-c$. לפי תנאי
הבעיה $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, ולכן

$$a = \frac{y + z}{2} \geqslant \sqrt{yz}$$

לפי משפט הממוצעים החשבוני והגיאומטרי, עם שויון אך ורק
כש- $y = z$, ז.א. $b = c$. כמו כן $b \geqslant \sqrt{zx}$, $c \geqslant \sqrt{xy}$ אם
תנאי שויון דומים. הכפלת אי השויונות נותנת

$$abc \geqslant \sqrt{x^2y^2z^2} = xyz$$

מ.ש.ל. התנאים עבור שויון הם שכל האי-שויונות יהפכו
למשוואות, ז.א. $a = b = c$.

213.ת מאחר ו- $P_1 = 2$ יוצא כי $Q = P_1P_2...P_n + 1$ הוא מספר אי זוגי. לכן אם יהיה Q רבוע שלם הוא יצטרך להיות גדול ב-1 ממכפלה של 8, מה שבלתי אפשרי כאן מאחר והגורם 2 מופיע רק פעם אחת במכפלה $P_1P_2...P_n$.

214.ת יהיה x מספר המשתתפים הכללי ו- y מספר הנקודות אותן צבר כל אחד מתלמידי השמינית. סכום כל הנקודות שווה למספר הכללי של משחקים, ז.א. ל- $\frac{1}{2} x (x-1)$, ולכן

$$(x - 2) y + 8 = \frac{1}{2} x (x - 1)$$

אשר ממנו נובע כי

$$y = [\frac{1}{2} x (x-1) - 8] \cdot \frac{1}{(x-2)} = \frac{1}{2} (x+1) - \frac{7}{x-2}$$

א) y שלם. אם x זוגי צריך $\frac{7}{x-2}$ להיות חצי שלם, והאפשרות היחידה היא $x - 2 = 14$, $x = 16$, $y = 8$.
אם x בלתי זוגי צריך $\frac{7}{x-2}$ להיות שלם ולכן $x = 3$ או 9 אבל $x = 3$ גורר $y \leq 0$ ולכן $x = 9$, $y = 4$.

ב) y חצי שלם. אם x זוגי, צריך $\frac{7}{x-2}$ להיות שלם ולכן, כמו לעיל, $x = 9$, וכזה סתירה לזוגיותו של x.
אם x אי-זוגי, צריך $\frac{7}{x-2}$ להיות חצי שלם, וזה ייתכן רק אם x זוגי, ושוב סתירה.

יש לנו איפוא, רק שתי הפתרונות

$$(x,y) = (16,8) \; ; \; (x,y) = (9,4)$$

215.ת למשוואה יש פתרון $x = 0$ ויש לה פתרונות חיוביים ב- $0 \leq x \leq 100$ ולעומת כל פתרון חיובי x יהיה גם x- פתרון. מאחר ו- $\frac{100}{2\pi} \sim 15.9$ רואים כי יימצאו באינטרבל $0 \leq x \leq 100$ כמעט 16 מחזורים שלמים של $\sin x$ והחלק החסר מהמחזור האחרון הוא קטע אשר שם $\sin x$ שלילי ולכן לא יוכל להיות שם פתרון. בכל מחזור יימצאו 2 שרשים ולכן מספר השרשים החיוביים הוא 31 (אם נוציא עתה את השורש $x = 0$). ישנם איפוא 31 שרשים חיוביים ומספר שווה של שליליים. ביחד עם השורש באפס יהיו 63 שרשים.

ת. 216

$$\sin^3 x\,(\sin 3x + \sin 2x) = \sin^3 3x + \sin^3 2x$$
$$= (\sin 3x + \sin 2x)(\sin^2 3x - \sin 3x \sin 2x + \sin^2 2x).$$

פתרון אחד והוא איפוא

$$\sin 3x + \sin 2x = 0$$
$$3x = 2n\pi - 2x$$

ז.א. $x = \frac{2n\pi}{5}$.

אם נוציא את השרשים האלה נישאר עם

$$\sin^2 3x - \sin 3x \sin 2x + \sin^2 2x = \sin^3 x$$

אבל $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ו- $\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$

ולכן $\sin^2 x\,(4\cos^2 x - 1)^2 - 2\sin^2 x \cos x\,(4\cos^2 x - 1)$
$$+ 4\sin^2 x \cos^2 x = \sin^3 x$$

מה שנותן את הפתרון הנוסף $\sin^2 x = 0$, ז.א. $x = m\pi$.

אחרי הוצאת שורש זה יישאר

$$16\cos^4 x - 8\cos^3 x - 4\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \sin x$$

ז.א. $2\cos x\,(2\cos x - 1)^2\,(2\cos x + 1) = \sin x - 1$

אבל $\sin x \leqslant 1$ ולכן מה שנמצא משמאל, לא יוכל להיות חיובי,

ז.א. $\cos x\,(2\cos x + 1) \leqslant 0$

מה שגורר $-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 0$. אם נכתוב $y = 2\cos x$ נקבל

$$y\,(y-1)^2\,(y+1) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} - 1$$

ואנחנו מחפשים את השורש של זה הנמצא בתחום $(-1, 0)$. קל לראות באופן גרפי, כי יש בדיוק פתרון אחד כזה והוא שווה ל- $-0{,}962$ (בערך) ז.א. $\cos x = -0.481$.

בסיכום הפתרונות הם

$$x = \frac{2n\pi}{5},\ m\pi,\ (2\ell + 1)\pi \pm \arccos(0.481)$$

ת. 217 א) $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ ולכן $7^{4n} \equiv 1 \pmod{100}$

עבור כל מספר שלם n.

יוצא איפוא כי

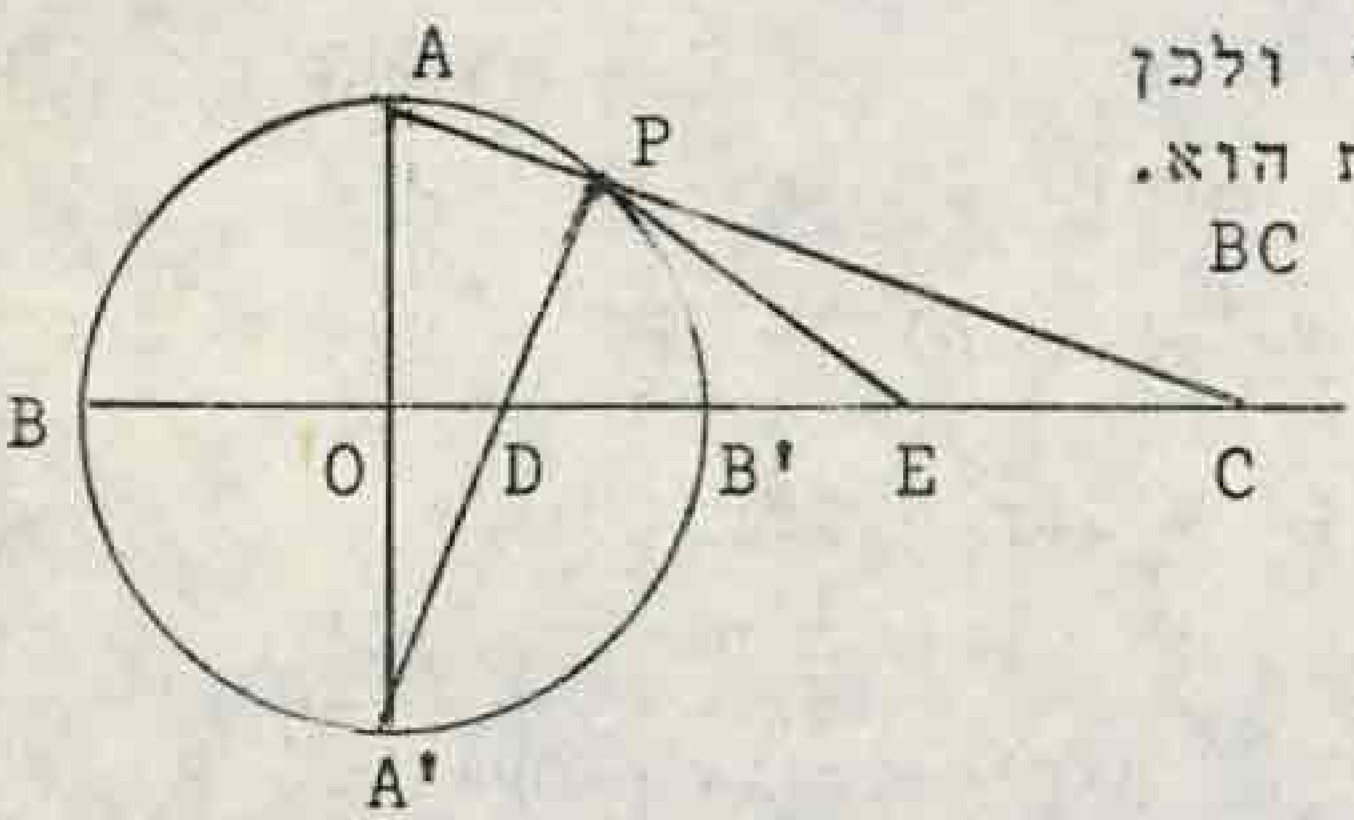
$$7^{9999} = 7^{9996} \cdot 7^3 \equiv 7^3 \pmod{100}$$
$$\equiv 43 \pmod{100}$$

ב)
$$5 \equiv 5 \pmod 7$$
$$5^2 \equiv 4 \pmod 7$$
$$5^3 \equiv 6 \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7$$
$$5^6 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod 7$$

מזה נובע כי

$$5^{999,999} = 5^{999,996} \cdot 5^3 = (5^6)^{166,666} \cdot 5^3$$
$$\equiv 125 \pmod 7$$
$$\equiv 6 \pmod 7$$

<u>ת.218</u> יהיה O מרכז המעגל ונחבר את OP. $\angle APA' = 90^\circ$ ולכן המשולש CPD ישר זוית הוא. CP ניצב ל- PA' ו- BC ל- AA' ולכן



$$\angle PCE = \angle AA'P$$
$$= \angle OPD$$
$$= 90^\circ - \angle DPE$$
$$= \angle EPC$$

מזה יש לנו $EP = EC$. אבל יש לנו גם

$$\angle EPD = 90^\circ - \angle EPC = 90^\circ - \angle ECP = \angle EDP$$

ולכן $EP = ED$.

<u>ת.219</u> א) יהיה S שטח המשולש. קיים

$$S = \frac{1}{2} r\,(BC + CA + AB)$$

וגם
$$S = \frac{1}{2} P_1 \cdot BC = \frac{1}{2} P_2 \cdot CA = \frac{1}{2} P_3 \cdot AB$$

והמסקנה מידית.

ב) מאותם השיקולים יש לנו

$$\frac{1}{8}P_1P_2P_3 \cdot BC \cdot CA \cdot AB = S^3$$
$$= \frac{1}{8}r^3(BC+CA+AB)^3$$

אבל ממוצע חשבוני לא יוכל להיות קטן מההנדסי ולכן

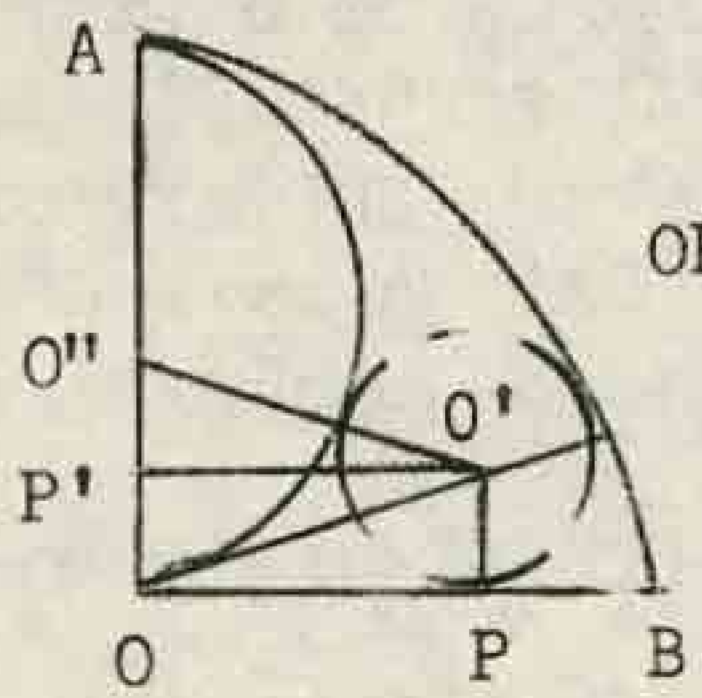
$$\frac{BC+CA+AB}{3} \geqslant (BC\cdot CA\cdot AB)^{\frac{1}{3}}$$

ז.א. $(BC+CA+AB)^3 \geqslant 27\ BC\cdot CA\cdot AB$

ולכן $P_1P_2P_3 \geqslant 27r^2$

ת.220 נסמן את הקטע OA ב- R. יהיה O' מרכז המעגל המבוקש ויהיה r הרדיוס שלו. יהיה $O'P$ ניצב ל- OB ו-$O'P'$ ל-OA. יהיה O'' האמצע של OA. יש לנו

$$OP^2 = OO'^2 - O'P^2$$
$$= (R-r)^2 - r^2 = R^2 - 2Rr$$



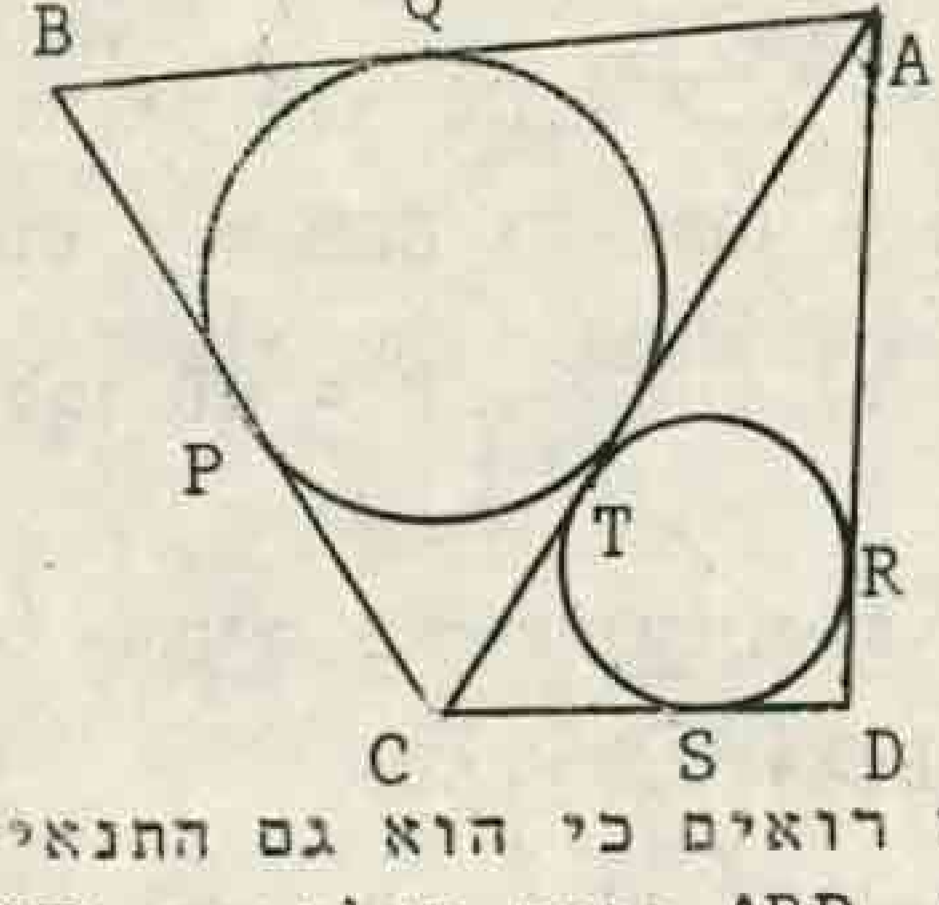
מאידך

$$OP^2 = O'P'^2 = O'O''^2 - O''P'^2$$
$$= (\tfrac{1}{2}R + r)^2 - (\tfrac{1}{2}R - r)^2 = 2Rr$$

מזה

$$R^2 - 2Rr = 2Rr$$
$$r = \frac{1}{4}R$$
$$O'P' = \frac{R}{\sqrt{2}}\ ;\ OP' = \frac{1}{4}R$$

ת.221 נצייר את המצב כמו בציור.



יש לנו עכשיו

$$AB+CD = AQ+QB+CS+DS$$
$$= AT+BP+CT+DR$$
$$= AR+DR+CP+BP$$
$$= AD+BC$$

מהסימטריה של התנאי הזה רואים כי הוא גם התנאי שהמעגלים החסומים במשולשים ABD, CBD יגעו באלכסון BD באותה נקודה.

<u>ת.222</u> נסמן כרגיל את $\sqrt{-1}$ ב- i יש לנו

$$(1+2i)^n = C_n^o + 2i\, C_n' + (2i)^2\, C_n^2 + \dots$$
$$= C_n^o - 2^2 C_n^2 + 2^4 C_n^4 - 2^6 C_n^6 + \dots +$$
$$+ 2i\, \{C_n' - 2^2 C_n^3 + 2^4 C_n^5 \dots\}$$

כמו כן

$$(1-2i)^n = C_n^o - 2^2 C_n^2 + \dots - 2i\, \{C_n' - 2^2 C_n^3 + \dots\}$$

ולכן הסכום המבוקש הוא

$$\frac{1}{2}\{(1+2i)^n + (1-2i)^n\} .$$

יהיה $\phi = \arc\cos \frac{1}{5}$. אז

$$1 + 2i = \sqrt{5}\,(\cos\phi + i \sin\phi)$$

ולכן $(1+2i)^n = 5^{\frac{n}{2}}(\cos n\phi + i \sin n\phi)$

ובדרך דומה

$$(1-2i)^n = 5^{\frac{n}{2}}(\cos n\phi - i \sin n\phi)$$

ולכן הסכום המבוקש שוה ל- $5^{\frac{n}{2}} \cos n\phi$ כאשר

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ז.א. $\phi \approx 63^o$

<u>ת.223</u> נכתוב $\alpha = tg\frac{A}{2}$, $\beta = tg\frac{B}{2}$, $\gamma = tg\frac{C}{2}$, עכשיו

$$\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}$$

ולכן עלינו להוכיח כי

$$F = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + \frac{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)} = 0$$

כדי להוכיח את זה נכתוב

$$x = \beta+\gamma\ ,\quad y = \gamma+\alpha\ ,\quad z = \alpha+\beta$$

ואז

$$F = \frac{1}{xyz} \{yz\,(z-y) + zx\,(x-z) + xy\,(y-x) + (z-y)(x-z)(y-x)\}$$

וקל לראות כי הנוסחה בסוגרים מתאפסת באופן זהה.

ת.224 נכתוב $F_n = p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n$ ואז

$$F_n = p_n\,(a_n q_n + q_{n-1}) - q_n\,(a_n p_n + p_{n-1})$$

$$= - F_{n-1}$$

כמו כן יש לנו $F_{n-1} = - F_{n-2}$, וכו' ובסוף

$$F_n = (-1)^{n-1}\, F_1$$

אבל

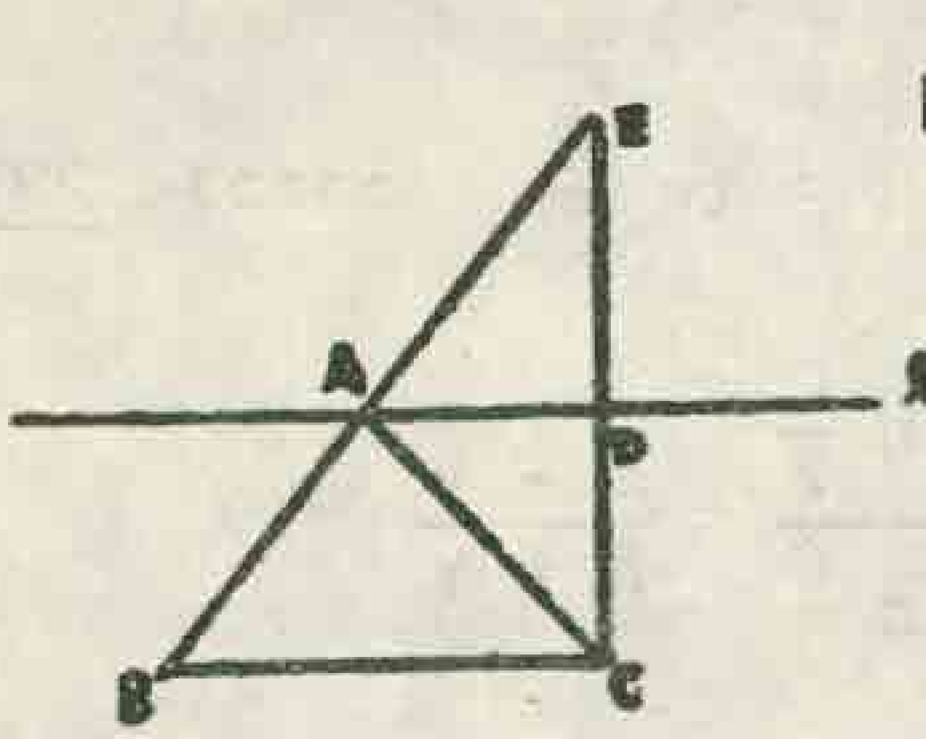
$$F_1 = p_1 q_2 - p_2 q_1 = -1$$

ולכן

$$F_n = p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^n$$

מזה נובע מיד כי אין גורם משותף ל- p_n, q_n מאחר שכל גורם כזה היה מחלק גם את F_n.

ת.225 יהיה BC הבסיס הנתון ונקח ישר ℓ מקביל ל- BC כשהמרחק בין ℓ ל- BC שווה לגובה הנתון. יהיה A איזו נקודה שהיא על ℓ. אנחנו רוצים לקבוע את A כך ש- AB + AC יהיה מינימום. נצייר CD ניצב ל- ℓ ונמשיך אותו עד E כך ש- CD = DE.



עבור כל A על ℓ יהיה AC = AE ולכן

$$EA + AB = AB + BC$$

וזה יהיה מינימום כשהנקודות B,A,E הן בקו ישר. במקרה זה קל לראות כי AB = AC.

רשימת פותרי השאלות מס. 211 - 225.

(בסוגריים ס"ה הנקודות של הפותר)

1.	אברהם לאה	יא, תיכון, קרית מוצקין	(6)
2.	אגר דוב	יב, תיכון א׳, תל-אביב	(22)
3.	איש-שלום ישראל	יא, תיכון ה׳, תל-אביב	(39)
4.	אלחסיד אורי	יא, גימנסיה עברית, י"ם	(19)
5.	אלטמן בנימין	יא, תיכון מקצועי, חיפה	(34)
6.	אלכסנדר גד	י, תיכון ה׳, תל-אביב	(30)
7.	אליאס אורי	י, ריאלי, חיפה	(38)
8.	אנגל יעקב	יא, תיכון, קרית מוצקין	(20)
9.	אצרף מרדכי	יב, תיכון, קרית מוצקין	(18)
10.	ארנסט יוסף	תיכון ה׳, תל-אביב	(17)
11.	אשכנזי מכס	יא, תיכון אחד-העם, פ"ת	(12)
12.	בן-ארצי חגי	י, תיכון, קרית טבעון	(44)
13.	בן-גור אריה	בית ספר לקציני ים, עכו	(10)
14.	בן-ישראל יצחק	י, גימנסיה הרצליה, ת"א	(16)
15.	בן-שחר ברק	יא, גימנסיה עברית, י"ם	(22)
16.	ברוק מנחם	יא, גימנסיה הרצליה, ת"א	(29)
17.	בר-יהושוע דוד	ג, תיכון מקצועי, חיפה	(38)
18.	גולדפרב אלי	יא, תיכון ה׳, תל-אביב	(19)
19.	גולדרינג מרדכי	יא, ריאלי, חיפה	(38)
20.	גלעד אלדד	יא, תיכון ה׳, תל-אביב	(33)
21.	גרוס רוני	יב, תיכון א׳, תל-אביב	(20)
22.	דבורזצקי דב	יב, תיכון א׳, תל-אבנב	(19)
23.	דימנט דוד	יב, ריאלי, חיפה	(43)
24.	דנציגר יצחק	י, אהל שם, ר"ג	(11)
25.	דרוקר אביגדור	יב, טשרניחובסקי, נתניה	(43)
26.	הראל יהודה	יא, תיכון, קרית מוצקין	(20)
27.	הראל צבי	י, ריאלי, חיפה	(41)
28.	ויסק יהושוע	יא, ריאלי חיפה	(37)
29.	ויים יצחק	יא, תיכון, קרית-עמל	(21)
30.	וייס אפרים	יא, גימנסיה עברית, י"ם	(5)
31.	ויסבוק ישראל	יא, תיכון, אחד-העם, פ"ת	(13)
32.	ויסמונטקי חיים	יב, תיכון קוגל, חולון	(20)
33.	ונטל דני	יא, ריאלי, חיפה	(23)
34.	וקס מתי	יב, טשרניחובסקי, נתניה	(40)
35.	זהבי דן	יב, ריאלי, חיפה	(39)
36.	טליל אורי	יב, ריאלי, חיפה	(33)
37.	יהודאי עמירם	יא, תיכון א׳, תל-אביב	(34)
38.	יוהס אריה	תיכון קוגל, חולון	(26)
39.	יערי נפתלי	י, גימנסיה הרצליה, ת"א	(10)
40.	לורנד ראובן	צה"ל	(28)
41.	מיכאלי גבריאל	יב, תיכון קרית מוצקין	(6)
42.	מילר משה	תיכון, רחובות	(8)
43.	מילר שמואל	יא, תיכון, קרית מוצקין	(19)
44.	מנור יהודה	יא, גימנסיה עברית, י"ם	(21)
45.	נפרסטק יעקב	יא, גימנסיה הרצליה, ת"א	(30)
46.	סורין אנדרי	יא, תיכון מקצועי, חיפה	(27)
47.	סתוי יונתן	תל-אביב	(43)
48.	סתת שמואל	יב, גימנסיה עברית, י"ם	(38)
49.	עמית מיכה	י, תיכון, קרית מוצקין	(37)
50.	ענבל צבי	שכניון חיפה	(34)
51.	ערמון אליעזר	יב, ישיבת נתיב-מאיר, י"ם	(29)
52.	פארי יצחק	יא, תיכון קלעי	(12)
53.	פסקרו אהרן	יא, ריאלי, חיפה	(37)
54.	פריאול בנימין	צה"ל	(29)
55.	צלמאיר דב	יב, תיכון, קרית מוצקין	(27)
56.	קנר אלי	יא, גימנסיה הרצליה, ת"א	(6)
57.	קסטר שמחה	יב, תיכון דתי, רחובות	(13)
58.	קרבס אביאל	יב, תיכון, קרית מוצקין	(6)
59.	קרוי משה	יב, תיכון ה׳, תל-אביב	(13)
60.	רבינוביץ לילי	י, תיכון, קרית מוצקין	(6)
61.	רובל דורית	יב, תיכון קרית מוצקין	(11)
62.	רוקח אריה	יא, תיכון ב׳, תל-אביב	(16)
63.	רזניק גבריאל	יב, גימנסיה עברית, י"ם	(21)
64.	רייך שמעון	יא, ריאלי, חיפה	(45)
65.	רייכל צבי	יב, גימנסיה עברית, י"ם	(15)
66.	שבירו גד	יא, גימנסיה עברית, י"ם	(8)
67.	שוחט חיים	י, אהל-שם, רמת-גן	(14)
68.	שטרן רפאל	יב, תיכון דתי, חיפה	(25)
69.	שימנוביץ יעקב	יב, תיכון, קרית מוצקין	(13)
70.	שליפשטין חיים	יב, תיכון, קרית מוצקין	(12)
71.	שמחוני איל	י, גימנסיה הרצליה, ת"א	(7)
72.	שמוקלר נח	יב, גימנסיה עברית, י"ם	(26)
73.	שמר עדו	יא, תיכון א׳, תל-אביב	(29)
74.	שמש מאיר	יב, גימנסיה הרצליה, ת"א	(40)
75.	שק אסתר	קרית מוצקין	(1)
76.	שפירא זאב	יא, תיכון ה׳, תל-אביב	(20)
77.	שקד שאול	יא, תיכון, קרית מוצקין	(19)
78.	שקד צבי	יב, גימנסיה עברית, י"ם	(29)

תשובה על בעיה מעמ׳ 1

עבור כל קבוצה של 5 מתוך 11 המדענים צריך להיות לפחות מנעול אחד אשר אין המפתח שלו בידי אף אחד של ה-5. מאידך כל אחד מתוך 6 האחרים צריך להחזיק במפתח למנעול זה, כי צרופו ל-5 האחרים ירכיב קבוצה של 6 ואלה צריכים להיות מסוגלים לפתוח גם את המנעול הזה. לכן צריך מספר המנעולים להיות לפחות שווה עם מספר החמישיות שאפשר לבחור מתוך 11, ז.א. ל- $\binom{11}{5}$ שהוא 462.

עכשיו יהיה A אחד המדענים. עבור כל חמישיה של מדענים אשר אינה כוללת את A יש מנעול אשר אין בידיהם המפתח לו. ו-A מוכרח להחזיק במפתח למנעול זה. לכן מספר המפתחות בידי A צריך להיות לפחות $\binom{10}{5}$ ז.א. 252.

יוצא איפוא כי לשם בצוע התכנית דרושים לפחות 462 מנעולים ולכל מדען יש להת לפחות 252 מפתחות. קל לראות כי במספרים אלה אפשר גם להסתדר.

לכ׳
צבי קונזינסקי – הספריה
הטכניון – ת.ד. 4910
חיפה

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ׳ י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בבנק הדאר מס׳ 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל״י.

אוריטל בע״מ רח׳ ליליינבלום 11 תל־אביב 58600