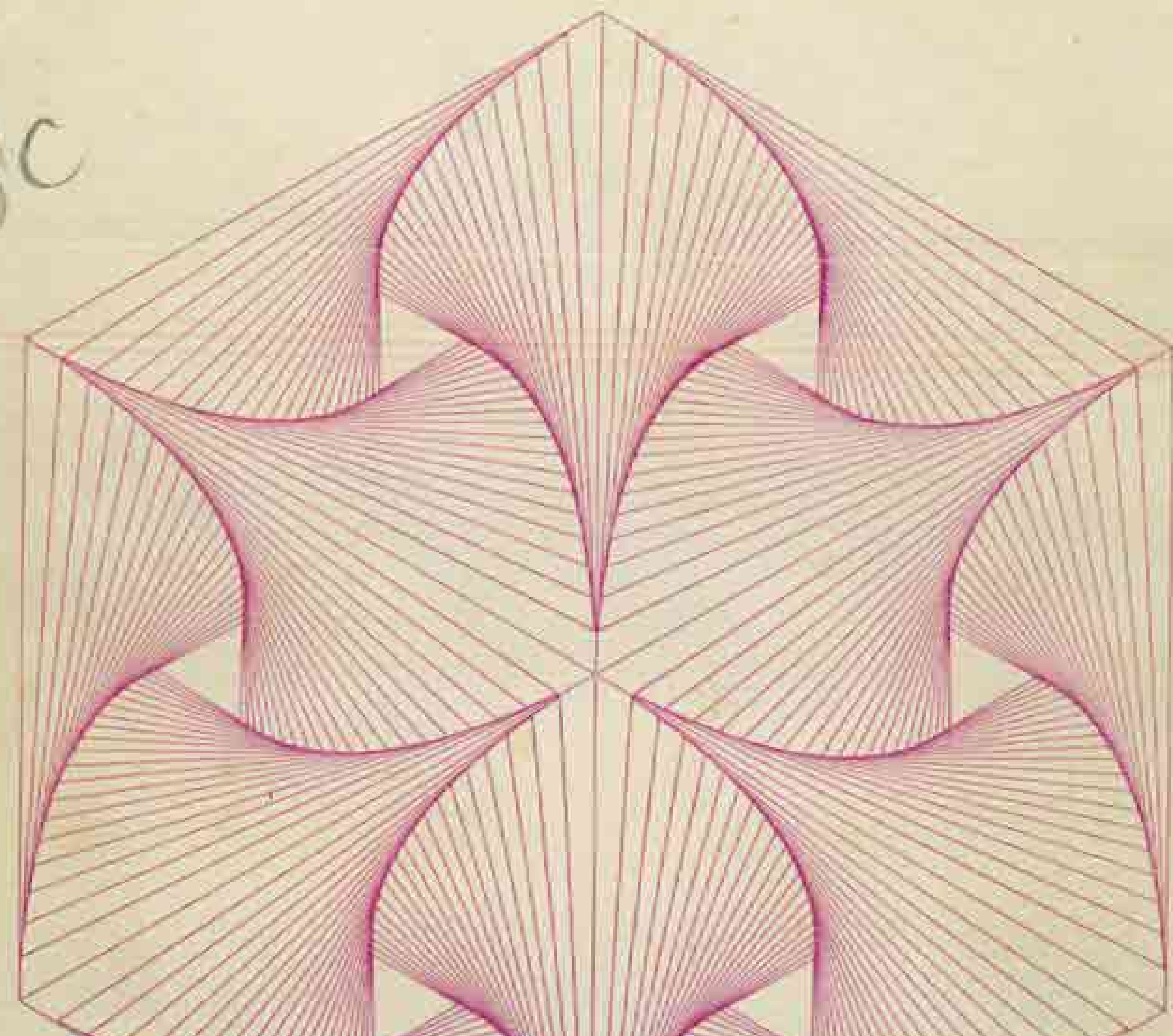
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 3 רחובות, חשון תשכ"ו, נובמבר 1965 מס' 1

יוצא לאור בחסות
ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. גיליס

דבר המערכת

כבר עברה שנה מאז קבלנו על עצמנו את עריכת החוברות האלה ועלינו להביע את תודתנו העמוקה לכל אלה אשר עזרו בעבודה, בכתיבת מאמרים, בהצעת בעיות, בפתרונן, וכו'. אבל לא פחות יש להודות לצבור הרחב של קוראינו הנאמנים אשר בלעדיהם אי אפשר היה להוציא את הגליונות בכלל.

בדיקת הפתרונות המתקבלים היא עבודה אטית הדורשת הרבה מזמננו. אבל שכר עבודה זו בצדה הוא, כשמופיע בין הפתרונות איזה רעיון יפה ומקורי או כשמתגלים בפני עינינו סימנים הרומזים על כשרונות מעולים. ואמנם יש לציין כי סימנים כאלה מופיעים מדי פעם וכי למדנו להעריך את הכשרונות המתמטיים ואת הענין במקצוע של תלמידי בתי-ספרינו.

כדי להקל על עבודת העורך החלטנו לבקש ממגישי הפתרונות שני דברים. הראשון הוא כי ישתדלו לכתוב את עבודתם בצורה נקיה וברורה, ורק על צד אחד של הנייר. הבקשה השניה היא כי יואילו למלא את הטופס הרצ"ב ולצרפו לפתרונותיהם.

עד שתגיע חוברת זו לידיכם, יהיה השליש הראשון של שנת הלימודים החדשה בעיצומו, אבל אולי לא יהיה מאוחר מדי לאחל לכל אלה מבין קוראינו הנמצאים בין כתלי בית ספר, שנת לימודים מוצלחת.

ב ע י ה

בכתבה בבלית על לוח חרס מהמאה ה-19 לפנה"ס, נמצאה רשימת מספרים. האם תוכלו לפענח את הכתבה? (נ.ב. הבבלים השתמשו ב-60 כבסיס לשיטת ספירה). הנה הכתבה: -

1,37	1,5	1
2,49	1,59	2
1,20,25	56,7	3
1,50,49	1,16,41	4
5 ,9 ,1	3,31,49	5

(פתרון בעמוד 12)

ג ר פ י ם

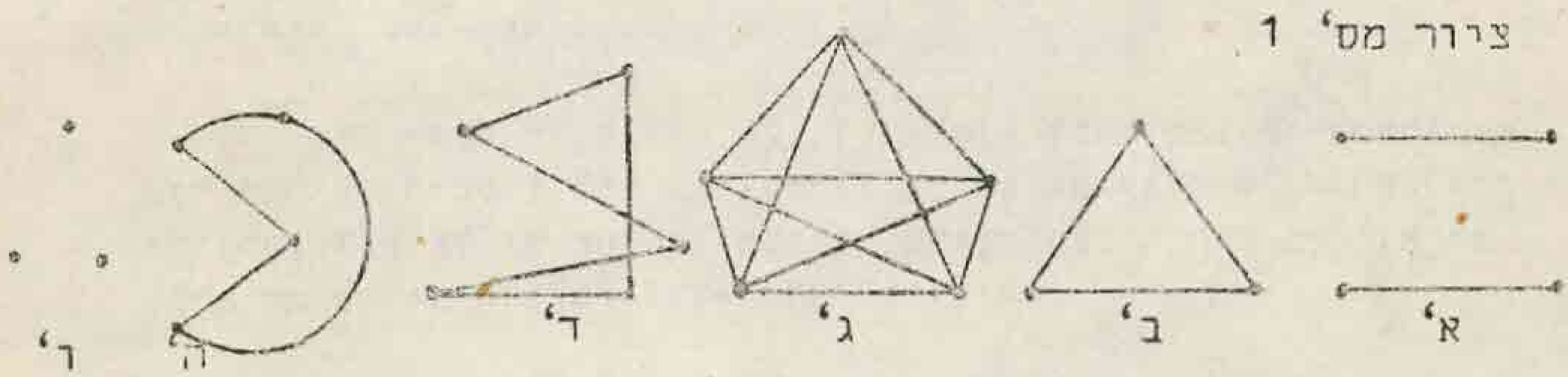
ח. חנני ש. אביטל

פרק א' - מהו גרף ?

נתון מספר סופי של נקודות. אנו יכולים לחבר זוגות מביניהן ע"י קשתות או קטעים, כך שהנקודות תהינה קצותיהן. כל מערכת כזאת של נקודות אשר חלק מהן (או כלן) מחוברות ע"י קטעים או קשתות נקראת גרף. הנקודות נקראות קודקודי הגרף והקטעים (או הקשתות) המחברים נקראים מקצועות הגרף.

לדוגמה:

ציור מס' 1



בגרף 1 א' 5 קודקודים ו-2 מקצועות, בגרף 1 ב' 3 קודקודים ו-3 מקצועות, בגרף 1 ג' 5 קודקודים ו-10 מקצועות, בכל אחד מהגרפים 1 ד' ו-1 ה' 5 קודקודים ו-5 מקצועות, ב-1 ו' 3 קודקודים ואפס מקצועות.

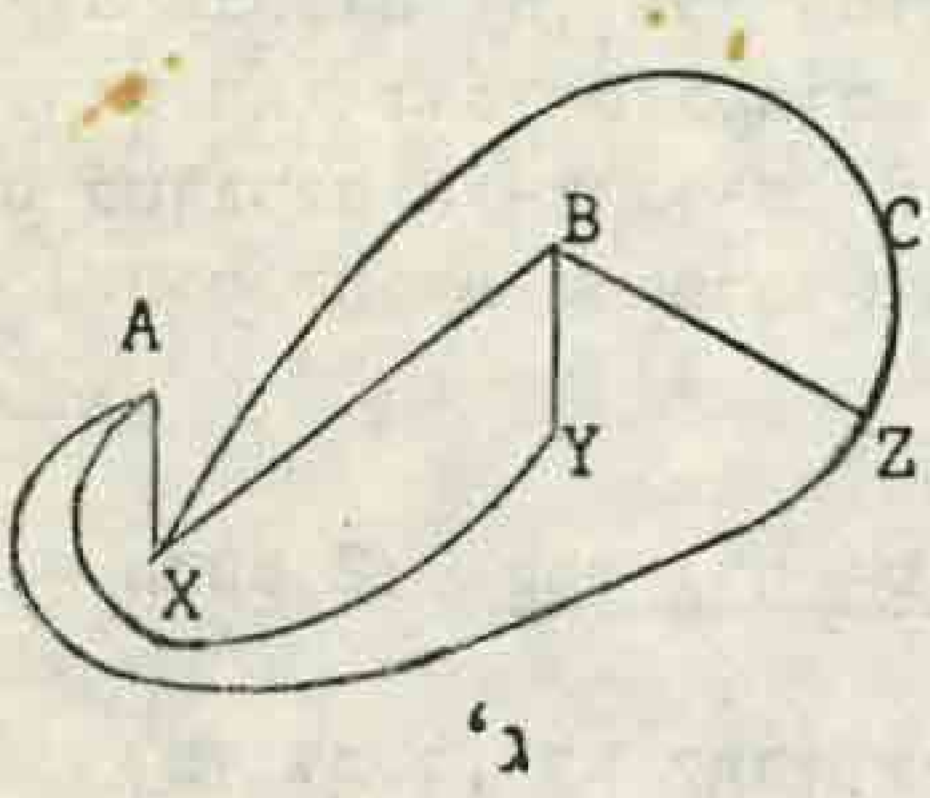
להבא, נטפל רק בגרפים שיש בהם לפחות מקצוע אחד. כמו כן נטפל רק בגרפים בעלי מספר סופי של קודקודים.

נשים לב, ששני הגרפים שבציורים 1 ד' ו-1 ה' יש להם אותו מספר של קודקודים למרות שב-1 ד' ישנו מקצוע החותך שנים אחרים בשעה שב-1 ה' אין מקצוע כזה. לאמיתו של דבר 1 ד' ו-1 ה' מיצגים אותו גרף. כקודקודים בגרף נחשבות רק הנקודות שמראש צויין שהן משמשות כקודקודים. נקודות אלה מדגישים לפי הסכם מראש (ע"י כתם עגול, מעגל קטן, צלב וכדומה). נקודות אחרות אינן נחשבות כקודקודים.

לדוגמה:

ציור מס' 2

בציור מספר 2א' המקצועות AB ו- CD אמנם נחתכים, אבל נקודת חיתוכם <u>אינה נחשבת כקודקוד</u>. יכולנו לצייר אותו גרף גם בצורה 2ב', שבו אין חיתוך בין המקצועות AB ו- CD.

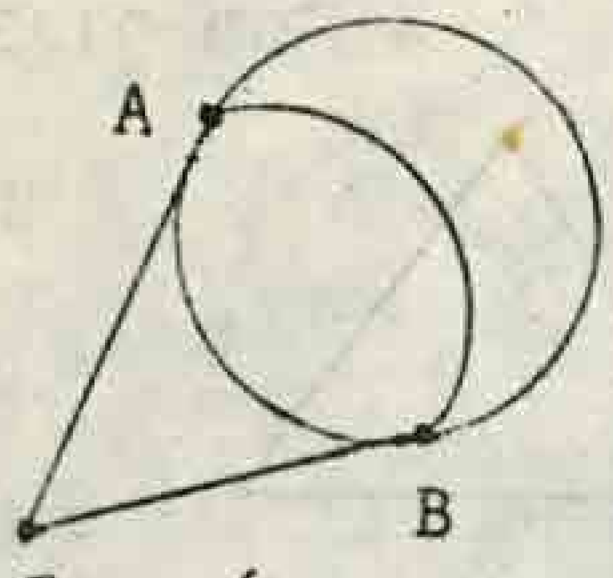


ג'

אמנם בתיאור גרף במישור לא תמיד אפשר להמנע מלצייר מקצועות נחתכים אשר נקודת חיתוכם אינה נחשבת כקודקוד. למשל, אין אפשרות לצייר במישור גרף, שבו כל אחד הקודקודים A, B ו- C יחובר עם כל 3 הקודקודים X, Y, Z בלי שלפחות שני מקצועות ייחתכו בנקודה נוספת. נציין שבשום מקום לא אמרנו שהקודקודים או המקצועות צריכים להיות במישור אחד. במרחב תמיד אפשר לחבר את הקודקודים, כך שהמקצועות לא ייחתכו.

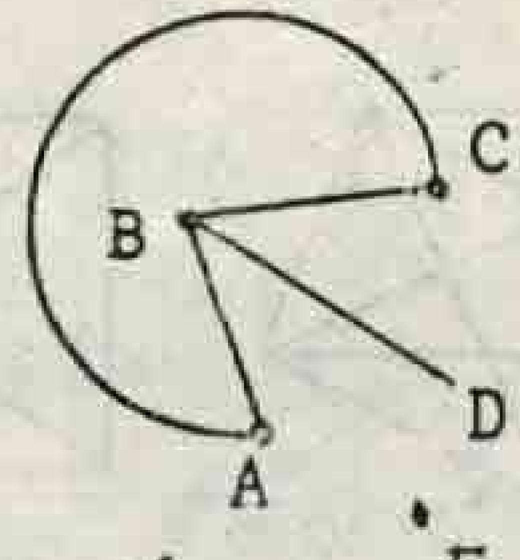
הגדרה: <u>מספר המקצועות היוצאים מקודקוד אחד נקרא סדר הקודקוד.</u>

לדוגמה: בציור 3א' סדר הקודקודים A ו- C הוא 2; סדר הקודקוד D הוא 1 וסדר הקודקוד E הוא 0.



ב'

ציור מס' 3



א'

נשים לב שבגרף בציור מס' 3ב' מחוברים שני הקודקודים A ו- B ביותר מאשר במקצוע אחד. בגרף זה הסדר של כל אחד מהקודקודים A ו- B הוא 4 וסדר הקודקוד C הוא 2. מענין שהמאמר הראשון בתורת הגרפים נכתב על גרף ממין זה.

אם נרצה למצא את מספר המקצועות בגרף נוכל לחבר את המספרים המבטאים את הסדר של כל הקודקודים בגרף. אולם ע"י כך כל מקצוע נחשב פעמיים, כי כל מקצוע מחבר 2 קודקודים ולכן הוא מופיע בסדרים של שניהם. עלינו איפוא לחלק את התוצאה ב-2. בזאת הוכחנו:

משפט 1: <u>סכום הסדרים של כל הקודקודים בגוף שוה לכפליים מספר המקצועות בגרף זה.</u>

ממשפט זה מקבלים תיכף מסקנה: <u>סכום הסדרים של כל הקודקודים בגרף הוא מספר זוגי.</u>

אם סכום מסויים הוא מספר זוגי ונחסיר ממנו את המחוברים הזוגיים שבסכום זה, הרי התוצאה תהיה שוב מספר זוגי. לפיכך סכום המחוברים האי-זוגיים בסכום זה מוכרח להיות מספר זוגי. אבל כדי שסכום מחוברים אי-זוגיים יהיה מספר זוגי, הכרחי שמספרם יהיה זוגי (יכול להיות שמספרם 0 אבל גם 0 נחשב למספר זוגי). מכאן <u>משפט 2</u>:

משפט 2: <u>בכל גרף יש מספר זוגי של קודקודים שסדרם איזוגי.</u>

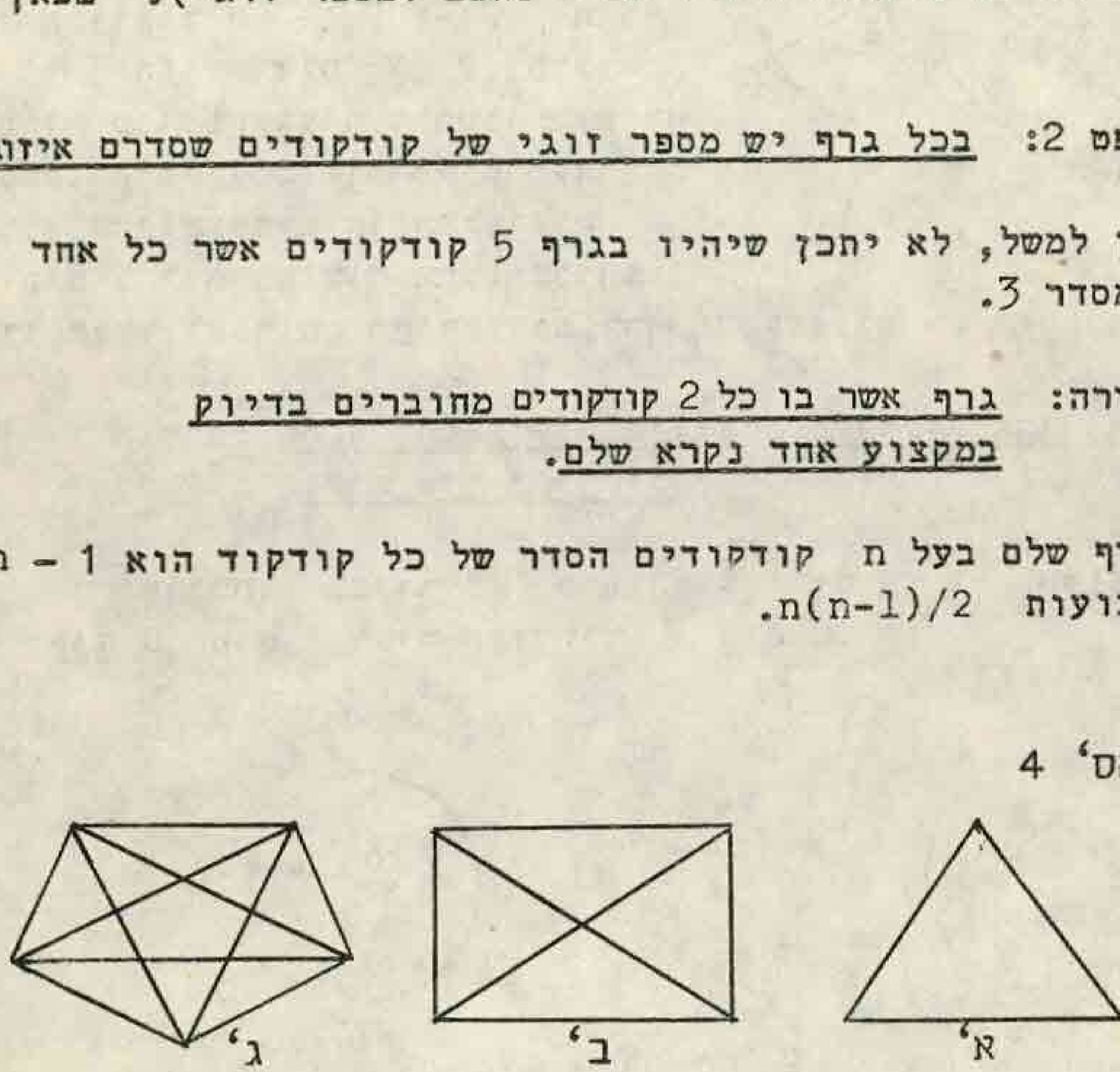
לכן למשל, לא יתכן שיהיו בגרף 5 קודקודים אשר כל אחד מהם יהיה מסדר 3.

הגדרה: <u>גרף אשר בו כל 2 קודקודים מחוברים בדיוק במקצוע אחד נקרא שלם.</u>

בגרף שלם בעל n קודקודים הסדר של כל קודקוד הוא $n - 1$ ומספר המקצועות $n(n-1)/2$.

לדוגמה:

ציור מס' 4



בציור זה 4א' הוא גרף שלם מסדר 3 (אומרים גם משולש שלם); 4ב' הוא גרף שלם מסדר 4 (ארבע-גון שלם) ו-4ג' הוא גרף שלם מסדר 5 (חמש-גון שלם).

שים לב: בהגדרת גרף שלם נדרש שכל 2 קודקודים מחוברים במקצוע אחד ורק במקצוע אחד.

<u>ייצוג גרפים</u>

תופעות שונות יכולות לשמש כמודלים לגרפים. למשל:

1) הקודקודים יכולים להיות מיוצגים ע"י נקודות יישוב

והמקצועות ע"י כבישים המחברים אותן (נוכל להרשות גם כבישים העוברים זה מעל זה בלי להחתך).

.2 הקודקודים - קבוצות כדור-רגל, המקצועות - קיום משחק בין שתי קבוצות.

.3 הקודקודים - אנשים המשתתפים במסיבה, המקצועות - לחיצת ידיים בין 2 אנשים.

.4 הקודקודים - משבצות בשדה השח, המקצועות - מהלך כלי משדה לשדה.

.5 הקודקודים - אנשים, המקצועות - השתיכות 2 אנשים לאגודה משותפת. או להיפך: הקודקודים - אגודות, המקצועות - אדם המשתייך לשתי אגודות.

.6 הקודקודים - איים והמקצועות - גשרים המגשרים ביניהם וכד׳.

במודילים אלה מקבל לפעמים משפט 2 פירוש הנראה לכאורה מפתיע. למשל, במודל מס׳ 3 תהיה המסקנה, שבכל מסיבה מוכרח להיות מספר זוגי של אנשים שלחצו ידיים עם מספר בלתי זוגים של משתתפים.

באופן דומה במודל מספר 1 תתקבל המסקנה, שמוכרח להיות מספר זוגי של נקודות ישוב, שמספר הכבישים היוצאים מהן הוא בלתי זוגי וכו׳.

<u>גרפים אוניקורסליים</u>

ענין מיוחד יש לפעמים בברור האם אפשר לעבור, בהמשך אחד, לאורך כל המקצועות של גרף מסויים בלי לעבור על מקצוע אחד פעמים. גרף שבו הדבר אפשרי נכנה בשם <u>גרף אוניקורסלי</u> או <u>גרף אוילר</u>.

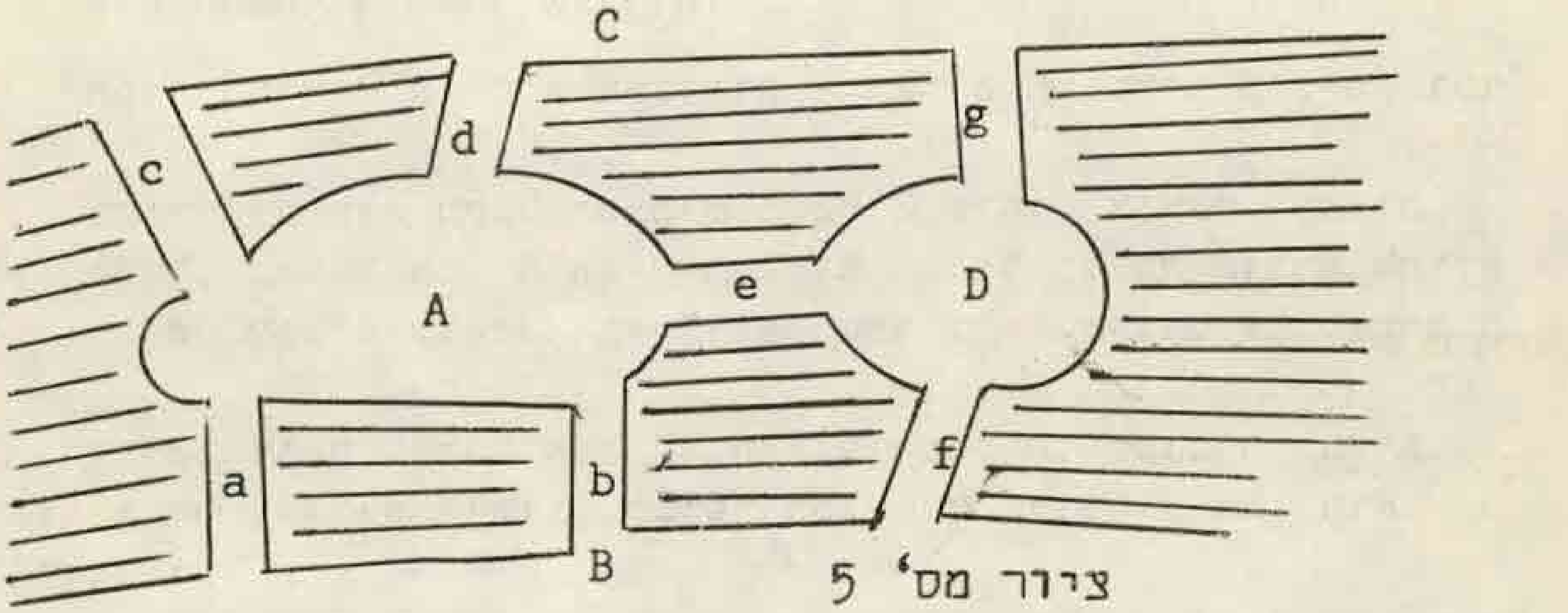
לבעית האבחנה אלו גרפים הם אוניקורסליים עונה המשפט הבא:

משפט 3: <u>כדי שגרף יהיה אוניקורסלי הכרחי שיהיו בו לכל היותר 2 קודקודים מסדר בלתי זוגי.</u>

<u>הוכחה:</u> בכל פעם שבתנועה לאורך מקצועות הגרף אנו עוברים דרך קודקוד כלשהו, הננו מנצלים 2 מקצועות, אחד בכניסה לקודקוד והשני בעזיבתו. רק בהתחלת התנועה - בצאתנו מקודקוד ראשון - הננו מנצלים רק מקצוע אחד וכן בסיום התנועה - בכניסתנו לקודקוד האחרון - הננו מנצלים שוב רק מקצוע אחד. כל קודקוד אחר, חוץ מהראשון והאחרון מוכרח להיות מסדר זוגי. לפיכך אם לגרף אוניקורסלי

יש בכלל קודקודים מסדר אי־זוגי הכרחי שמספר הקודקודים האלה לא יהיה גדול מ־2. במקרה שיש לו 2 קודקודים כאלה והוא אוניקורסלי הרי אחד מהם ישמש להתחלת התנועה ואחד לסיומה. כל הקודקודים האחרים מוכרחים להיות מסדר זוגי. אם אין לגרף אוניקורסלי קודקודים מסדר אי־זוגי הרי קודקוד היציאה מוכרח לשמש גם כקודקוד סיום. משפט זה הוא מן הראשונים בתורת הגרפים והוכחתו שנתנה ע"י אוילר (Leonard Euler 1707 - 1783) באה לפתור בעיה מענינת המכונה בשם "בעית הגשרים".

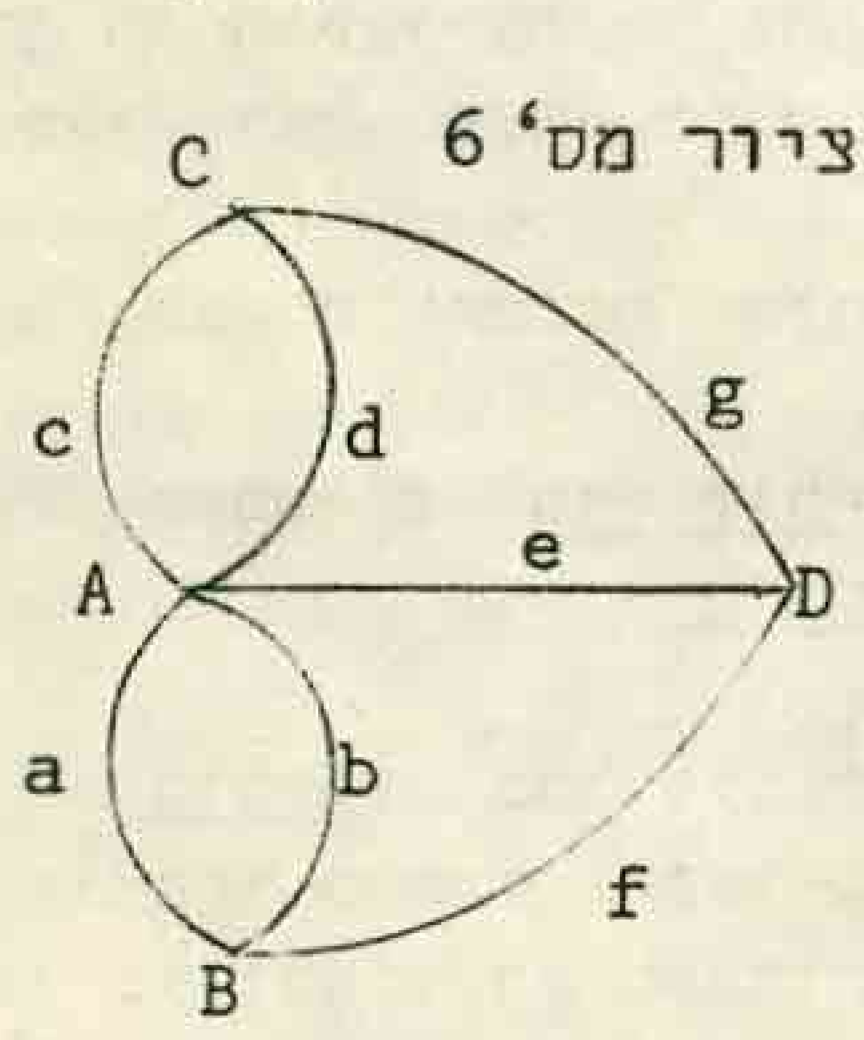
בעיר קניגסברג (כיום קליניגרד בברית המועצות) היו 7 גשרים a,b,c,d,e,f,g שהיו מגשרים בין שני גדות נהר B ו־ C ובין שני איים A ו־ D כפי שמתואר בציור 5.



ציור מס' 5

התעורר ויכוח, האם אפשר לערוך טיול ולעבור את כל שבעת הגשרים בלי לעבור על גשר אחד פעמיים.

את בעיה זו פתר אוילר ע"י כך, שהפך את המערכת יבשות (גדות הנהר והאיים) - גשרים לגרף, שבו היבשות מיצגות קודקודי הגרף והגשרים - מקצועותיו. במודל זה מתקבל הגרף שבציור מס' 6 והבעיה היא האם זהו גרף אוניקורסלי. לפי משפט 3, ברור, שאין הדבר כן, כי בגרף זה כל 4 הקודקודים A,B,C ו־ D הם מסדר אי־זוגי ולכן הוא <u>איננו אוניקורסלי</u>, ז"א אין אפשרות לבצע את הטיול לפי התנאים הנ"ל.

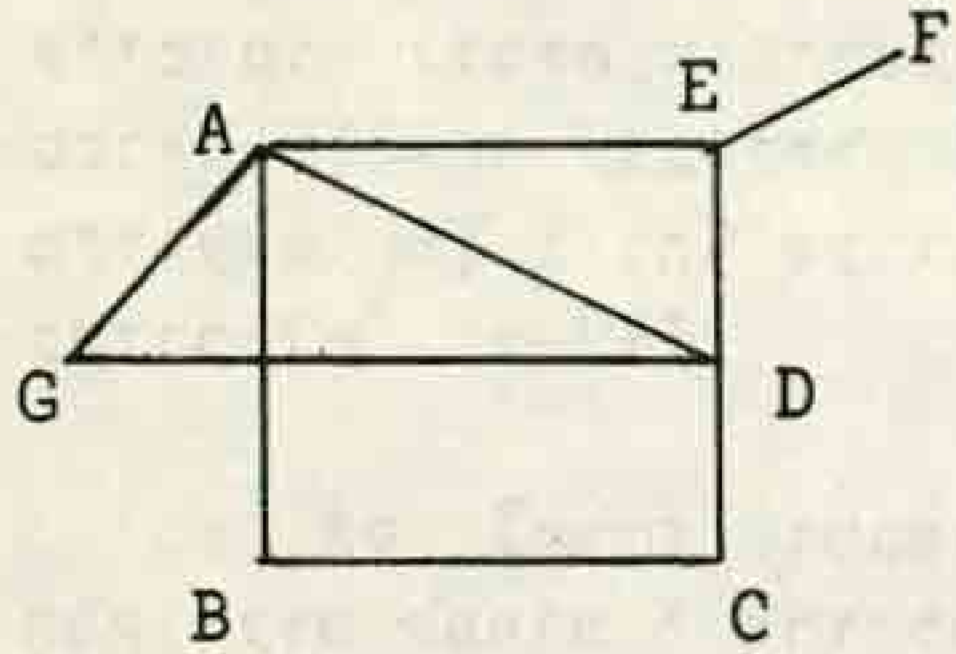


ציור מס' 6

בזאת פתר אוילר את "בעית הגשרים"

מתעוררת השאלה האם התנאי הנ"ל הוא גם תנאי מספיק, ז"א האם מספיק שיהיו בגרף לא יותר מ־2 קודקודים מסדר אי־זוגי, כדי שיהיה אוניקורסלי. על כך נענה בהמשך במשפט 7.

מ ע ג ל י ם



צירור מס' 7

הגדרה: מסלול, המורכב מהמקצועות של גרף, כך שכל מקצוע מופיע בו פעם אחת בלבד, והיוצר קו סגור, נקרא מעגל.
בגרף שבציור 7 ישנם 6 מעגלים והם: ADGA, ADEA, ABCDA
AEDGA, ABCDGA, ABCDEA.

במודל של ערים וכבישים פירושו של מעגל הוא כל מערכת כבישים היוצאת מעיר מסויימת ומובילה בחזרה לעיר הזאת בלי להשתמש בכביש אחד פעמיים. במודל של אנשים ואגודות ייווצר מעגל למשל במצב הבא:

A הוא בהפועל ובהסתדרות המהנדסים, B הוא בהסתדרות המהנדסים ובקלוב לסקר לשחמט ו- C הוא בקלוב לסקר לשחמט ובהפועל.
בעיות רבות, בתורת הגרפים, ביניהן כאלה שלא נפתרו עד היום, קשורות במעגלים. הבעיה העיקרית היא, מתן תנאי הכרחי ומספיק לכך שגרף יכיל (או לא יכיל) מעגלים. להלן 2 משפטים הקשורים בבעיה זו.

משפט 4: תנאי מספיק לכך שגרף יכיל מעגל הוא שיהיה בגרף לכל היותר קודקוד אחד מסדר 1.

הוכחה: אם יש בגרף קודקוד מסדר 1, נתחיל את השרשרת ממנו. אם אין קודקוד כזה נתחיל מקודקוד כלשהו שאיננו מסדר 0. מהקודקוד שהתחלנו (בשני המקרים) נעבור לקודקוד A כלשהו הקשור אתו במקצוע. לפי הנתון A הוא לפחות מסדר 2 (הוא ודאי לא מסדר 0 ואף איננו יכול להיות מסדר 1) ולכן יש לפחות עוד מקצוע אחד היוצא ממנו (נוסף למקצוע בו נכנסנו). כך נעבור לקודקוד C כלשהו וכו'. הואיל ומספר הקודקודים הוא סופי, הרי בהמשך התנועה ייתכנו 2 אפשרויות.

א. נחזור לקודקוד ממנו יצאנו,

ב. נחזור לקודקוד שכבר עברנו אותו.

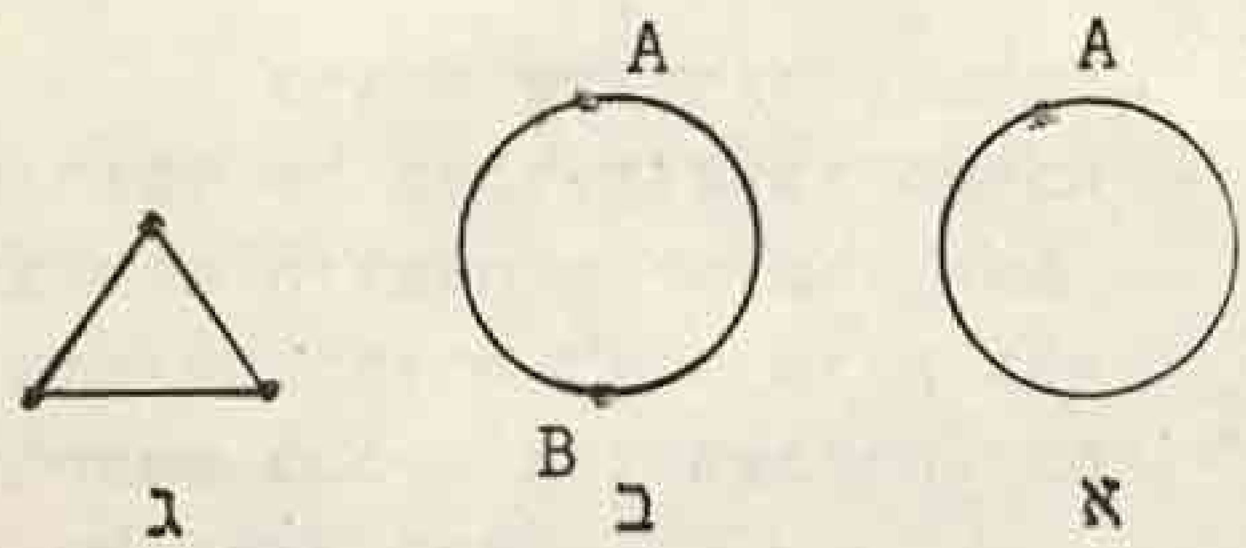
בכל אחד משני המקרים קבלנו מעגל ובזה הוכח המשפט.

תנאי מספיק אחר לקיום מעגל הננו מוצאים במשפט הבא.

<u>משפט 5</u>: תנאי מספיק לכך שיהיה בגרף מעגל הוא שמספר המקצועות יהיה לא קטן ממספר הקודקודים שבו.

<u>הוכחה</u>: ברור שמספיק להוכיח בשביל המקרה שמספר המקצועות שוה למספר הקודקודים, כי הוספת מקצועות אינה יכולה לקלקל מעגלים קיימים. נוכיח את המשפט ע"י אינדוקציה לגבי מספר הקודקודים n. בשביל $n = 1$ ובשביל $n = 2$. המשפט נכון כי הגרפים בעלי מספר מקצועות קטן ביותר שעבורם יתקיימו תנאי המשפט, הם אלה הנתונים בציור 7א' ו-7ב'.

ציור 7



אם $n = 3$ ומספר המקצועות לפחות 3 הרי לפי תנאי השאלה זהו או תלת-גון שלם היוצר מעגל - ציור 7ג' או שהגרף מכיל מעגל מן הצורות 7א' או 7ב'.

נניח עתה שהמשפט נכון בשביל כל גרף בעל n קודקודים ולפחות n מקצועות.

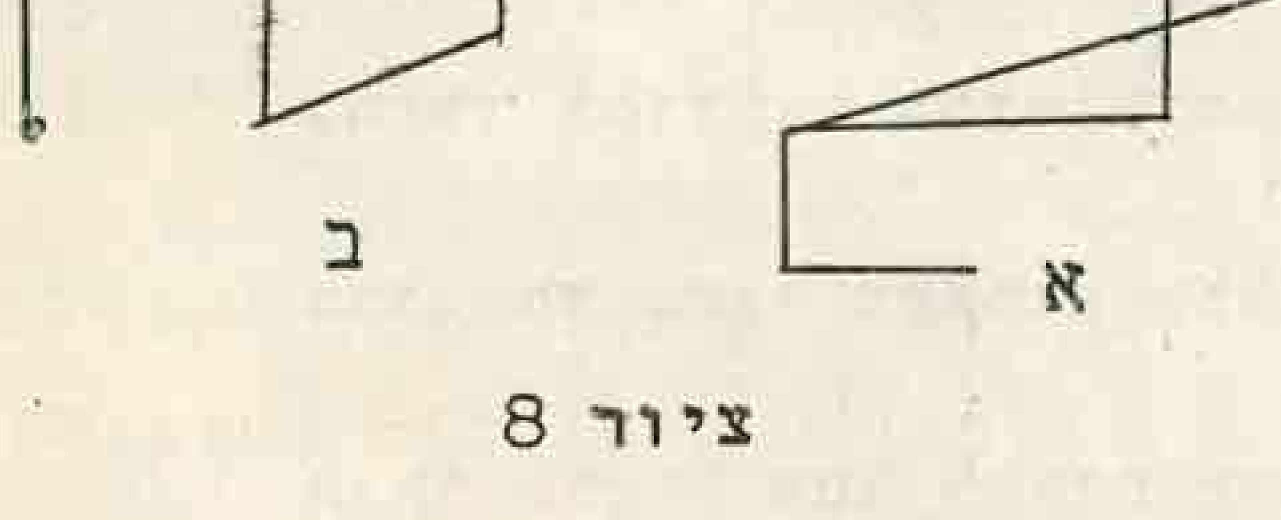
יהי נתון גרף בעל $n + 1$ קודקודים ולפחות $n + 1$ מקצועות. אם בגרף אין בכלל קודקודים מסדר 1 נכונות הטענה נובעת ממשפט 4.

אם בגרף יש לפחות קודקוד 1 מסדר 1 נמחק קודקוד זה ואת המקצוע היוצא ממנו ויישאר גרף בעל n קודקודים ולפחות n מקצועות ועבורו - לפי הנחת האינדוקציה - המשפט נכון, ז"א גרף זה מכיל מעגל. אבל מעגל זה שייך גם לגרף המקורי. בזה הוכח המשפט.

<u>גרפים קשירים</u>

<u>הגדרה</u>: גרף נקרא קשיר אם אפשר לעבור מכל קודקוד שלו לכל קודקוד אחר ע"י שרשרת של מקצועות.

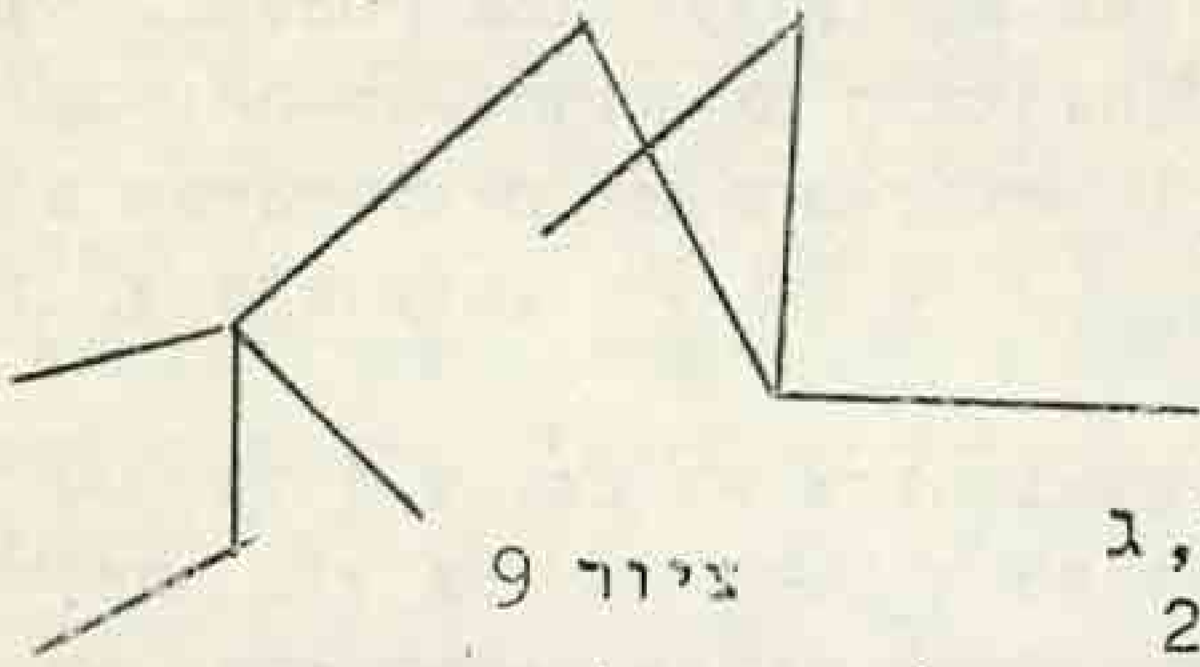
לדוגמה: הגרף שבציור 8א' הוא קשיר; הגרף שבציור 8ב' איננו קשיר.



ציור 8

<u>הגדרה:</u> גרף קשיר שאינו מכיל אף מעגל נקרא עץ.

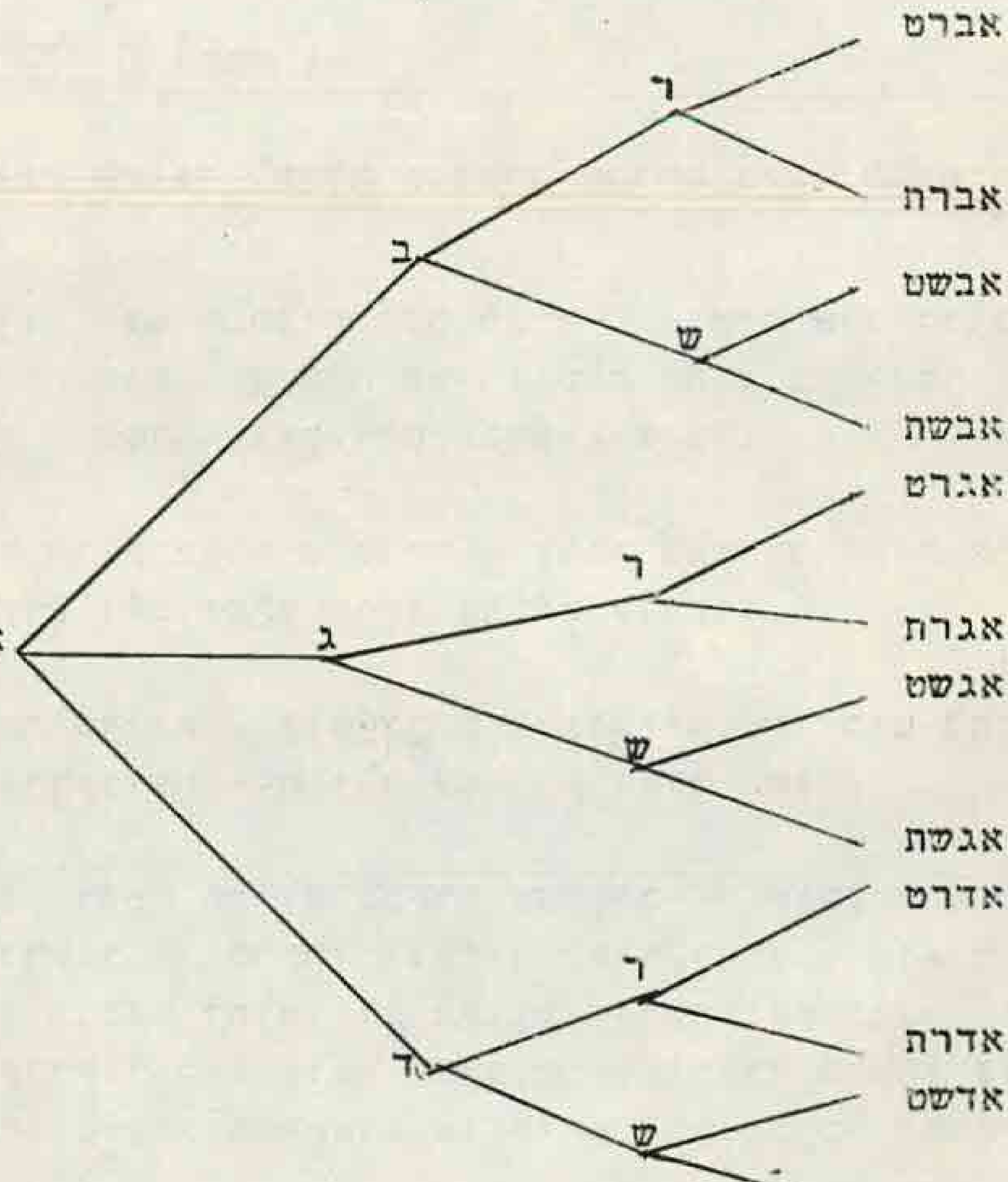
לדוגמה: הגרף בציור 9 הוא עץ.



ציור 9

מודל לעץ הוא למשל צרוף אפשרויות שונות.

<u>לדוגמה:</u> ל-א 3 חברים ב, ג ו-ד. הם גרים בישוב שישנם בו 2 בתי קולנוע "רוך" (להבא ר׳) ו"שביט" (להבא ש׳). ראובן יוצא מביתו מחליט ללכת אל אחד מחבריו לצאת אתו יחד לקולנוע ואחרי הקולנוע או ללכת לטייל (להבא ט׳) או ללכת לתנועה (להבא ת׳). האפשרויות השונות יתוארו ע"י העץ הבא:



המשפט הבא קובע את הקשר בין מספר הקודקודים והמקצועות בעצים. תחילה נשים לב לעובדה כי בכל עץ מוכרחים להיות לפחות 2 קודקודים מסדר 1. כי אילו היה בעץ לא יותר מקודקוד אחד מסדר 1 הרי לפי משפט 4 היה הוא מכיל מעגל, מה שלא ייתכן.

<u>משפט 6:</u> בכל עץ בעל n קודקודים יש בדיוק n-1 מקצועות.

<u>הוכחה:</u> נוכיח את המשפט ע"י אינדוקציה.

לא קיים עץ כאשר n=1 ; כאשר n = 2 מספר המקצועות הוא 1 = 2-1.

נניח כי המשפט נכון בשביל עץ בעל n קודקודים, ויהי נתון עץ בעל $n + 1$ קודקודים. כפי שראינו מכיל העץ לפחות 2 קודקודים מסדר 1. נמחק אחד הקודקודים האלה ואת המקצוע היוצא ממנו. ע"י מחיקה זאת לא נהרוס את הקשירות. נקבל עץ בעל n קודקודים. לפי הנחת האינדוקציה ישנם בעץ זה $n - 1$ מקצועות, מכאן שבעץ המקורי היו n מקצועות.

נעיר שמשפט זה ברור באופן אינטואיטיבי. בגלל הגדרתו של עץ קשיר אין אפשרות להוסיף מקצוע שיקשור 2 קודקודים קיימים, כלומר, בכל הוספת מקצוע לעץ הקשיר הננו מוסיפים גם קודקוד חדש. הואיל ובצעד ההתחלתי ישנם שני קודקודים ומקצוע אחד, מכאן שברגע שיהיו n קודקודים, מספר המקצועות יהיה $n - 1$.

<u>גרפים אוניקורסליים</u> (המשך)

ניתן עתה תשובה לשאלה שנשארה פתוחה בקשר להיפוכו של משפט 3. נוכיח

<u>משפט 7</u>: תנאי מספיק לכך שגרף Γ יהיה אוניקורסלי הוא, שיהיה קשיר ושלא יהיו בו יותר משני קודקודים מסדר איזוגי.

אם אין לו קודקודים מסדר איזוגי אפשר להתחיל את המעבר מכל קודקוד שהוא ומסיימים אותו באותו קודקוד.

אם בגרף בדיוק 2 קודקודים איזוגיים, חייבים להתחיל את המעבר באחד מקודקודים אלה ולסיימו בקודקוד השני.

<u>הוכחה</u>: נטפל תחילה במקרה שאין ב-Γ קודקודים מסדר אי-זוגי. נצא מקודקוד A כלשהו ונעבור לקודקוד B. הואיל ו-B זוגי הרי לכל מקצוע הנכנס לתוכו יש מקצוע שני היוצא ממנו. נצא מ-B ונמשיך. כל קודקוד הוא זוגי ובהכנסנו לקודקוד כלשהו נוכל תמיד לצאת ממנו במקצוע שלא השתמשנו בו עדיין, לכן נוכל להמשיך עד שנחזור ל-A.

אם ע"י כך ניצלנו את כל המקצועות, הרי הראינו שהגרף אוניקורסלי. אולם ייתכן, שיצרנו רק מעגל Γ_1 שהוא חלק מ-Γ ושנותרו קודקודים, שמהם יצאו מקצועות שלא השתמשנו בהם. הואיל ו-Γ קשיר יש לקבוצת קודקודים אלה (שיש בהם מקצועות שלא השתמשנו בהם) קודקודים משותפים עם Γ_1. נצא מקודקוד אחד כזה למשל M לאורך מקצוע שלא השתמשנו בו עדיין, ונתקדם כל הזמן רק לאורך מקצועות כאלה (זה שוב אפשרי בגלל הזוגיות). מסיבות דומות

לעיל הכרחי שנחזור ל-M – באופן זה נוצר מעגל Γ_2 נוכל עתה להרחיב את המעגל החלקי Γ_1 כך שברגע שאנו מגיעים בו ל-M נעבור את Γ_2 נשוב ל-M ואח"כ נשלים את Γ_1. באופן דומה נוכל בהדרגה להרחיב את המעגל עד שנגיע למסלול המקיף את כל Γ

אם ב- Γ שני קודקודים מסדר איזוגי, נתחיל באחד מהם. המסלול הראשוני מוכרח להגמר בשני. אם ע"י כך עברנו על כל Γ גמרנו. אם לאו, נעבור את הדיון בדומה לעיל.

בגרפים אוניקורסליים הבעיה היא ליצור מסלול שיעבור את כל המקצועות. כפי שראינו, נתן אוילר פתרון מלא של הבעיה, ע"י זה שהוכיח תנאי הכרחי ומספיק לכך שגרף יהיה אוניקורסלי.

משפט 4 ו-7 אפשר לאחד למשפט אחד:

<u>גרף הוא אוניקורסלי אם ורק אם יש בו לכל היותר 2 קודקודים מסדר איזוגי.</u>

בעיה דומה אבל הרבה יותר קשה העמיד המתמטיקאי האירי המילטון (William Rowan Hamilton 1805 – 1865) המילטון שאל מה הם התנאים לכך שגרף Γ יכיל מעגל המכיל את כל הקודקודים של Γ, כל קודקוד פעם אחת בלבד. במלים אחרות, הבעיה היא מה הם התנאים לכך, שבגרף נתון אפשר יהיה לבנות מסלול העובר דרך כל הקודקודים של הגרף – בלי לעבור דרך קודקוד אחד פעמיים. (מובן שבמסלול כזה ייתכנו מקצועות שלא יעברו דרכם).

במודל של ערים – קודקודים, כבישים – מקצועות פירוש הבעיה היא, מציאת תנאי לאפשרות לבנות מסלול נסיעה העובר דרך כל עיר שבקבוצה בדיוק פעם אחת.

בעיית המילטון לא נפתרה עד היום. (בשביל גרפים מסויימים נבנו מסלולי המילטון בעזרת מחשבים).

<u>ת ר ג י ל י ם :</u>

1. במסיבה מסויימת השתתפו 37 מוזמנים. חלק מהנוכחים לחצו ידיים זה עם זה בהופיעם למסיבה. הוכח, כי במסיבה מוכרח להיות לפחות אדם אחד שלחץ ידיים עם מספר זוגי של משתתפים. שים לב! 0 הוא מספר זוגי).

2. נתון גרף קשיר לא אוניקורסלי. מהי הדרך הפשוטה ביותר להפוך גרף כזה לאוניקורסלי.

3. הוכח כי בבעית גשרי קניגסברג הוספת גשר אחד במקום כלשהו יאפשר מעבר דרך כל הגשרים לפי התנאים הדרושים.

4. הוכח כי בגרף קשיר אפשר ליצור התאמה חד ערכית בין כל מקצוע לבין אחד מקודקודיו אם ורק אם הגרף מכיל לכל היותר מעגל אחד.

(המשך בחוברת הבאה)

פתרון הבעיה מעמוד 1

ברור כי הטור הראשון מסמן אך ורק את המספר הסידורי של כל שורה ושורה. אם מתרגמים את שאר השורה לפי שיטת ה-60 מקבלים (בשיטה עשרונית).

1	65	97
2	119	120
3	3367	4825
4	4601	6649
5	12709	18541

הצד השווה לכלם הוא כי ההפרש בין הריבועים של שני המספרים בכל שורה גם הוא רבוע משכלל. למשל,

$$97^2 - 65^2 = 72^2$$

$$6649^2 - 4601^2 = 4800^2$$

$$18541^2 - 12709^2 = 1350^2$$

וכו׳.

למעשה מהווה מה שהצגנו רק חלק מהכתבה המכילה 15 שורות כאלה. זה ועוד, הכתבה המקורית היתה, כנראה עוד יותר ארוכה, אבל החרס שבור ועדיין לא נתגלו שרידים נוספים משבריו. אם נשים לב לעובדה כי לזוגות בטבלא אין מחלק משותף, נגיע למסקנה כי לבבלים היתה נוסחה לפתירת משולשים פיתאגוריאנים, וזה יותר מאלף שנים לפני פיתאגוראס.

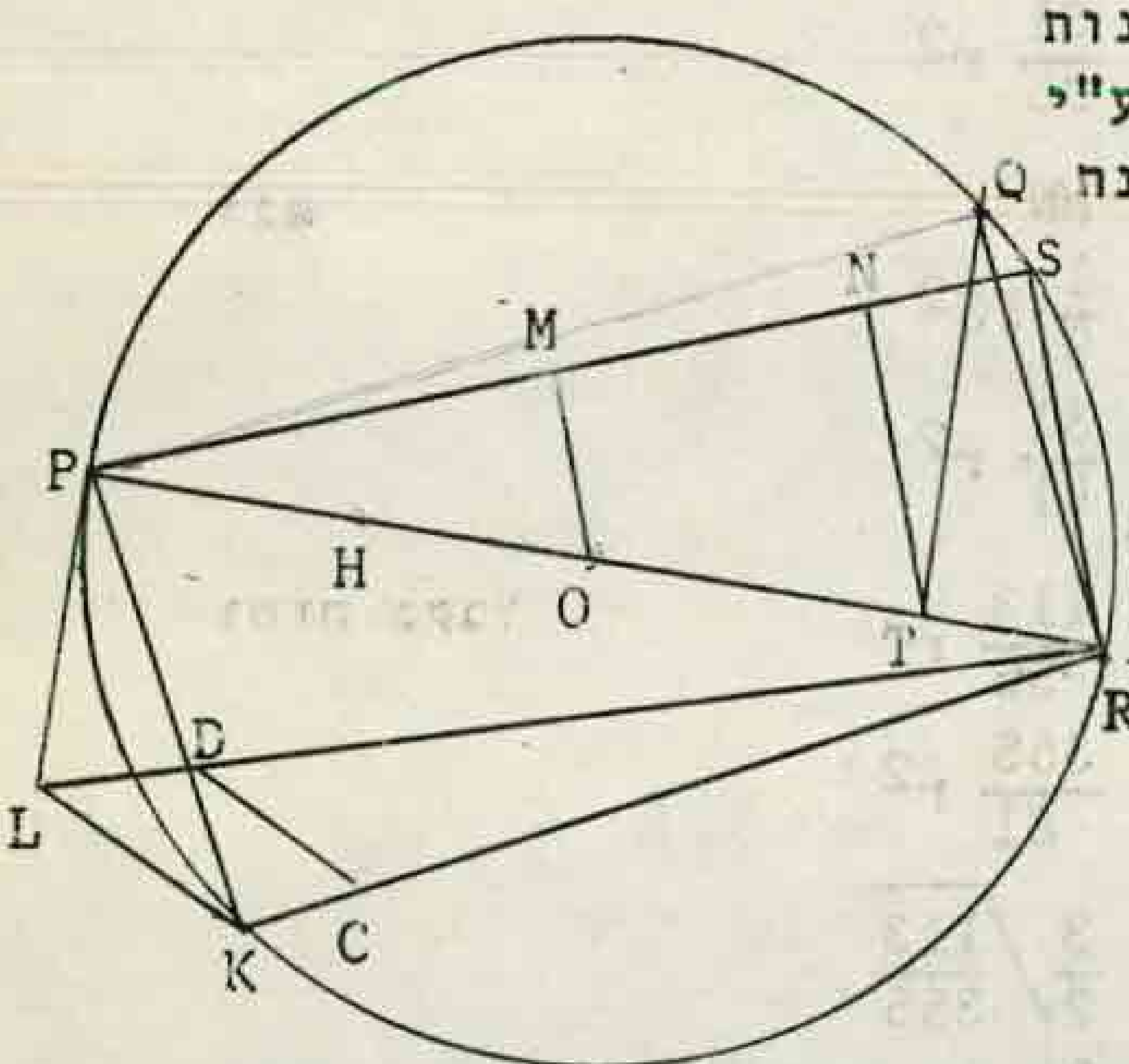
* *

*

<u>רבוע המעגל</u>

הבעיה לבנות רבוע בעל שטח שווה לזה של מעגל נתון העסיקה מתמטיקאים עוד בימי קדם, והיוונים הקדישו עבודה רבה במאמצים לפתור אותה. הגם שכל המאמצים האלה לא הצליחו לפתור את הבעיה המקורית, יש לציין כי תוך כדי המחקרים השונים פותחו תחומים רחבים של ידיעות מתמטיות. למעשה, יש יסוד לדעה כי דוקא כשלון המאמצים לפתור את ריבוע המעגל תרם יותר להתפתחות המדע, ממה שהיתה תורמת הצלחה מוקדמת! בכל אופן ההיסטוריה הארוכה של בעית רבוע המעגל הגיעה לקיצה בשנת 1882 כשהוכיח לינדמן כי אי אפשר לבנות את הרבוע המבוקש תוך שמוש בסרגל ובמחוגה לבד.

עם זה נשארה השאלה של בניית רבוע אשר שטחו יהיה בקירוב טוב לזה של המעגל, ואחד הפתרונות היפים ביותר לבעיה זו ניתן ע"י המתמטיקאי ההודי רמנוג'ן בשנת 1913. נציג כאן את הבניה.



יהיה O מרכז המעגל הנתון ו-PR קוטר. נסמן ב-H את אמצע PO וב-T את הנקודה על OR המקיימת TR = 1/3 OR. עכשיו נקים TQ ניצב ל-PR שפוגש את המעגל ב-Q, וניקח S על המעגל, כך שהמיתר TQ = RS.

מחברים PS ולוקחים עליו M ו-N כך ש-OM ו-TN יהיו מקבילים ל-RS. קובעים K על המעגל, כך שהמיתר PM = PK ואת המשיק PL באורך MN. מחברים RL, RK, KL וקובעים C על RK כך ש-RC = RH. עכשיו בונים קטע ישר CD מקביל ל-KL עם D על RL.

נוכיח כי הרבוע על הבסיס RD שווה בקירוב לשטח המעגל.

<u>הוכחה:</u> מאחר והמשולשים PTQ, QTR דומים, יש לנו

$$\frac{QT}{PT} = \frac{TR}{QT}$$

ולכן

$$RS^2 = QT^2 = PT \cdot QT$$
$$= \frac{5}{3} r \cdot \frac{1}{3} r$$
$$= \frac{5}{9} r^2$$

ומזה נובע כי

$$PS^2 = (2r)^2 - RS^2$$
$$= \frac{31}{9} r^2$$

ולכן

$$PK^2 = PM^2$$
$$\frac{1}{4} PS^2$$
$$= \frac{31}{36} r^2$$

וגם

$$PL^2 = MN^2$$
$$= \frac{1}{9} PS^2$$
$$= \frac{31}{81} r^2$$

ומזה נקבל

$$RK^2 = (2r)^2 - PK^2 = \frac{113}{36} r^2$$
$$RL^2 = (2r)^2 + PL^2 = \frac{355}{81} r^2$$
$$\frac{RC}{RD} = \frac{RK}{RL} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{113}{355}}$$

אבל

$$RC = RH = \frac{3}{2} r$$

ולכן

$$RD = \sqrt{\frac{355}{113}}\, r$$

השבר $\frac{355}{113}$ מהווה קירוב טוב מאד ל- π למעשה

$$\frac{355}{113} = 3.14159292...$$
$$\pi = 3.14159265$$

השגיאה היחסית היא איפוא קטנה מ-1 ב-10^8, ולכן השגיאה היחסית בלקיחת RD במקום $\sqrt{\pi}$r קטנה מ-1 ב-2×10^8. לדוגמא אילו היינו משתמשים בשיטה זו לקבוע רבוע אשר שטחו שווה לזה של המעגל המוגדר ע"י קו המשווה היינו טועים בפחות מ-50 מטר בצלע הרבוע.

פונקציות של תורת-המספרים

ב. פרוינד (הטכניון)

א. מבוא

קיימות בתורת-המספרים פונקציות המוגדרות עבור מספרים שלמים או טבעיים. והתלויות בעיקר בגורמיו הראשוניים של המספר. בדרך כלל קשה למצוא חוקיות בפונקציות כאלו, כי גורמיו הראשוניים של המספר $n+1$ למשל, שונים מאלו של n באופן קיצוני. אין לפונקציות האלו תכונות של מונטוניות או מחזוריות הידועות, למשל מפונקציות אלגבריות או טריגונומטריות. כדי להבדיל פונקציות אלו מהפונקציות הרגילות של האנליזה, קוראים להן פונקציות של תורת-המספרים, (Number - Theoretic Functions) ומסמנים אותן בדרך-כלל באותיות-יווניות.

במאמר זה נעסוק בשתי פונקציות מתורת המספרים. האחת - המסומנת ב- $\tau(n)$ מוגדרת כמספר המחלקים הטבעיים של המספר הטבעי n. השניה - המסומנת ב- $\sigma(n)$ מוגדרת כסכום המחלקים הטבעיים של המספר הטבעי n. דוגמאות:

$$\tau(8) = w \quad ; \quad \sigma(8) = 15$$
$$\tau(66) = 8 \quad ; \quad \sigma(66) = 144$$

כי מחלקיו של המספר 8 הם 1, 2, 4 ו-8, וסכומם 15. ומחלקיו של 66 הם 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66 וסכומם 144. אם P הוא מספר ראשוני, ברור ש- $\tau(P) = 2$, ו- $\sigma(P) = P+1$, כי P מתחלק ב-1 ובעצמו.

מגדירים: $\tau(1) = 1$; $\sigma(1) = 1$. בהמשך נראה תכונות נוספות של פונקציות τ ו- σ אך קודם לכן יש להזכיר משפט אשר עליו מתבססות כל התכונות של פונקציות מתורת-המספרים.

<u>משפט:</u> אם n הוא מספר טבעי גדול מ-1, הרי n ניתן להצגה בצורה: $n = P_1^{a_1} \cdot P_2^{a_2} \cdots P_k^{a_k}$ הרי כאשר כל ה-P-ים הם ראשוניים, $P_i \neq P_j$ עבור כל i ו- j וה- a-ים הם מספרים טבעיים. הצגה זו של n היא יחידה.

משפט זה ידוע כמשפט-היסודי של האריתמטיקה. הוכחתו אינה קשה, אך היא אינה שייכת לנושא המאמר, ולכן נוותר עליה.

כאשר n מבוטא בצורה $n = P_1^{a_1}\cdot P_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot P_k^{a_k}$ אומרים ש- n כתוב בצורתו הסטנדרטית. לדוגמה. צורתו הסטנדרטית של 24 היא $24 = 2^3 \cdot 3^1$, של 210 – $210 = 2^1\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^1$ וכו'. נעיר עוד ש-1 איננו נחשב כמספר ראשוני, ולכן אין לראות מספר הכתוב בצורה: $n = 1^m\cdot P_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot P_k^{a_k}$ ככתוב בצורה סטנדרטית.

בהמשך נזדקק למושג נוסף מתורת-המספרים, הוא המושג של מחלק-משותף גדול ביותר. אם a ו- b הם מספרים טבעיים, ו-d הוא המספר הטבעי הגדול ביותר המחלק את שניהם, אומרים ש- d הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של a ו- b ומסמנים: $d = (a,b)$.

(שים-לב ש- d גם הוא פונקציה מתורת-המספרים, הפעם של שני משתנים!). שני מספרים טבעיים a ו- b ייקראו זרים אם $(a, b) = 1$.

אם $a = P_1^{a_1}\cdot P_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot P_k^{a_k}$ ו- $b = q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot\ldots\cdot q_s^{b_s}$

הרי $(a,b) = 1$ אם ורק אם $P_i \neq q_j$ עבור כל i ו- j, כי רק אז לא יהיה ל- a ו- b גורם משותף פרט ל-1.

ב. פונקציות מכפלתיות.

נגדיר עתה את המושג של פונקציה מכפלתית (Multiplicative-Function), אשר עליו נבסס את תכונות $\tau(n)$ ו- $\sigma(n)$. פונקציה של משתנה טבעי $f(n)$ תקרא מכפלתית אם $f(ab) = f(a)\cdot f(b)$ עבור כל זוג a, b המקיימים $(a,b) = 1$.

דוגמאות:

הפונקציה $f(n) = 1$ (עבור כל n) היא מכפלתית בברור, כי $f(a)=1$; $f(b)=1$ ו- $f(ab)=1$. במקרה זה המכפלתיות מתקיימת אפילו אם $(a,b) > 1$, דבר שאיננו מפריע להגדרה. גם הפונקציה $f(n) \equiv n$ היא בברור מכפלתית.

תכונה מיידית של פונקציה מכפלתית הנובעת מההגדרה היא: $f(1) = 1$ אלא אם כן $f(n) \equiv 0$ עבור כל n. הוכחה: אם $f(n)$ איננו אפס עבור כל n נבחר ב-n אשר עבורו $f(n) \neq 0$. אז: $f(n) = f(1\cdot n) = f(1)\cdot f(n)$ ומכאן: $f(1) = 1$. כי ברור ש- $(n,1) = 1$ עבור כל n.

נוכיח עתה את המשפט החשוב הבא:

<u>משפט:</u> אם $f(n)$ היא פונקציה מכפלתית, אזי תהיה גם הפונקציה $F(n)$ מכפלתית, כאשר $F(n)$ מוגדרת ע"י $F(n) = \Sigma f(d)$ כאשר הסכום נעשה על כל המחלקים הטבעיים d_i של המספר n.

הוכחה: תהיה s קבוצת כל מחלקי המספר הטבעי a, אשר נסמנם ב- d.
" s' " " " " " b, " " ב- d'.
" s'' " " " " " ab, " " ב- d''.

אזי $F(a) = \sum_{s} f(d)$; $F(b) = \sum_{s'} f(d')$; $F(ab) = \sum_{s''} f(d'')$.

נסמן ב-s^* את קבוצת כל המספרים הטבעיים מהצורה dd' כאשר d הוא איבר כללי של s ו-d' של s'. מטרתנו היא להראות כי כאשר $(a,b) = 1$ s'' ו-s^* זהות.

א. מאחר ש-d'' מחלק את ab (כפי הגדרת d'') כל גורם ראשוני של d'' יחלק את ab ולכן יצטרך לחלק או את a או את b. לכן d'' הוא מהצורה $d'' = d \cdot d'$ כאשר d מחלק את a ו- d' מחלק את b, ז.א. כל איבר של s'' הוא גם איבר של s^*.

ב. מהעובדה ש- $a = dk$; $b = d'k'$ נובע: $ab = d \cdot d' \cdot k \cdot k'$ ולכן $d \cdot d'$ הוא מחלק של ab. לכן dd' שהוא איבר של s^* הוא גם איבר של s''.

מ- א. ו- ב. עדיין לא נובע ש-$s^* \equiv s''$, כי ב-s^* תתכנה כפילויות ז.א. שיופיע בו איזה מספר פעמיים או יותר, בעוד שאת s'' הגדרנו ללא כפילויות. נראה עתה שהדרישה $(a,b) = 1$ מבטיחה שגם ב-s^* אין כפילויות.

ג. ברור ש- (d,d') מחלק את (a,b) ולכן אם $(a,b) = 1$, גם $(d,d') = 1$. נניח, שקיימים מספרים d, d_1, d' ו- d_1' המקיימים $dd' = d_1 \cdot d_1'$ ונראה שבמקרה זה $d = d_1$ ו- $d' = d_1'$, דבר המבטיח את אי-קיומן של כפילויות. ואמנם אם $d \cdot d' = d_1 \cdot d_1'$, הרי d מחלק את d_1, כי d זר ל- d_1'. ובאותה צורה d_1 מחלק את d, כי d_1 זר ל- d'. לכן $d = d_1$. בדיוק באותה צורה נקבל: $d' = d_1'$. מכאן ש- $s^* \equiv s''$.

עתה נגש להוכחת העובדה הכלולה במשפט. ראינו ש - $(d,d') = 1$ ו- $f(n)$ היא פונקציה מכפלתית. לכן: $f(d) \cdot f(d') = f(dd')$. כלומר:

$$F(a) \cdot F(b) = \sum_{s} f(d) \cdot \sum_{s'} f(d') = \sum_{s,s'} f(d) \cdot f(d') = \sum_{s^*} f(d \cdot d') = \sum_{s''} f(d'') = F(a \cdot b)$$

לכן $F(n)$ היא פונקציה מכפלתית. מ.ש.ל.

עתה נראה כיצד מקבלים בדרך פשוטה נוסחאות עבור $\tau(n)$ ו-$\sigma(n)$ בעזרת המשפט שהוכחנו למעלה:

א. נניח: $n = P_1^{a}\cdot P_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot P_k^{a_k}$. ראינו מקודם ש- $f(n) \equiv 1$ היא פונקציה מכפלתית, לכן הפונקציה $F(n) = \Sigma f(d)$ היא מכפלתית. אבל $\Sigma f(d) = 1+1+\ldots+1$ כאשר מספר המחוברים הוא בדיוק כמספר מחלקיו הטבעיים של n ולכן $F \equiv \tau(n)$. אבל המחלקים של $P_i^{a_i}$ הם $1, P_i, P_i^2, \ldots, P_i^{a_i}$ ולכן $\tau(P_i^{a_i}) = a_i+1$.

ממכפלתיותה של $\tau(n)$ מתקבל:

$$\tau(n) = \tau(P_1^{a_1}\cdot P_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot P_k^{a_k}) = \tau(P_1^{a_1})\cdot\tau(P_2^{a_2})\cdot\ldots$$
$$\ldots\tau(P_k^{a_k}) = (a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)$$

קבלנו נוסחה לחשוב $\tau(n)$ עבור כל n טבעי על-פי צורתו הסטנדרטית. לדוגמה: $60 = 2^2\cdot 3^1\cdot 5^1$ ולכן $\tau(60) = (2+1)(1+1)(1+1) = 12$ ואמנם מחלקיו של 60 הם: 1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60, אשר מספרם 12.

ב. נניח שוב: $n = P_1^{a_1}\cdot P_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot P_k^{a_k}$. ראינו כבר ש- $g(n) \equiv n$ היא פונקציה מכפלתית. נגדיר פונקציה $G(n)$ ע"י: $G(n) = \Sigma g(d)$, כאשר ה-d-ים הם כל מחלקי n הטבעיים. ברור ש: $G(n) = d_1+d_2+\ldots d_t$, דהיינו: סכום כל מחלקי n. לכן $G(n) \equiv \sigma(n)$ ו-$\sigma(n)$ היא איפוא פונקציה מכפלתית.

עכשיו:

$$\sigma(P_i^{a_i}) = g(1) + g(P_i) + g(P_i^2) + \ldots + g(P_i^{a_i}) =$$
$$= 1 + P_i + P_i^2 + \ldots + P_i^{a_i} = \frac{P_i^{a_i+1} - 1}{P_i - 1}$$

לפי נוסחת הטור הגיאומטרי. מכאן:

$$\sigma(n) = \frac{P_1^{a_1+1} - 1}{P_1 - 1} \cdot \frac{P_2^{a_2+1} - 1}{P_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{P_k^{a_k+1} - 1}{P_k - 1}$$

קבלנו נוסחה לחישוב $\sigma(n)$ לפי צורתו הסטנדרטית של n

לדוגמה: $\sigma(60) = \frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}\cdot\frac{5^2-1}{5-1} = 168$ ואמנם:

$$1+2+3+4+5+6+10+12+15+20+30+60 = 168$$

ג. מספרים משוכללים

לסיום המאמר נראה את שמוש $\sigma(n)$ במציאת מספרים משוכללים. מספר משוכלל הוא מספר השווה לסכום מחלקיו הקטנים ממנו, ז.א. ל- $\sigma(n) - n$ ולכן $\sigma(n) = 2n$. נמצא תנאים הכרחיים ומספיקים לכך שמספר זוגי n יהיה משוכלל.

נניח $n = 2^{k-1}\cdot A$ כאשר $k \geqslant 2$ ו- A אי-זוגי. n הוא לפי ההנחה מספר משוכלל. לכן: $\sigma(2^{k-1}\cdot A) = 2n = 2^k \cdot A$, מכיון ש- $\sigma(n)$ היא פונקציה מכפלתית, ו- $(2^{k-1}, A) = 1$ מקבלים:

$$\sigma(2^{k-1}\cdot A) = \sigma(2^{k-1}) \cdot \sigma(A) = 2^k \cdot \sigma(A)$$

לפי הנוסחה של $\sigma(n)$ מקבלים $\sigma(2^{k-1}) = 2^k - 1$

ולכן: $(2^k - 1) \cdot \sigma(A) = 2^k \cdot A$

נרשום: $\sigma(A) = A+x$ כאשר x הוא סכום כל מחלקי A הקטנים מ- A מקבלים:

$$(2^k - 1)(A + x) = 2^k \cdot A$$

$$2^k \cdot A - A + (2^k - 1)x = 2^k \cdot A$$

ולכן $(2^k - 1)x = A$

x הוא איפוא מחלק של A, ומכיון ש- $2^k-1 > 1$ $(k \geqslant 2)$ נובע ש- x קטן מ- A. אבל x הוא גם סכום מחלקי A הקטנים מ- A, ולכן הוא היחידי כזה.

מאחר ול- A יש רק מחלק אחד x השונה מ-A. נובע כי A הוא מספר ראשוני, ו- $x=1$. אבל אז מקבלים: $A = 2^k-1$, כאשר A מספר ראשוני. קבלנו את משפט-אוילר (Euler): תנאי הכרחי לכך שמספר זוגי יהיה משוכלל הוא ש- n הוא מהצורה $n = 2^{k-1}(2^k-1)$ כאשר 2^k-1 מספר ראשוני. נראה עתה שזהו גם תנאי מספיק. נתון: $n = 2^{k-1}(2^k-1)$, ו- 2^k-1 ראשוני. אזי:

$$\sigma(n) = \sigma[2^{k-1}\cdot(2^k-1)] = (2^k-1)(2^k-1+1) = 2^k(2^k-1) = 2n$$

מ. ש. ל.

מספרים ראשוניים מהצורה $M_k = 2^k-1$ נקראים מספרי-מרסן על שמו של המתמטיקאי הצרפתי מרסן (Mersenne) אשר ערך רשימה (בלתי מדוייקת) של מספרים כאלה. מספרי-מרסן הראשונים הם:

$M_2 = 3$ $Q_2 = 6$

$M_3 = 7$ $Q_3 = 28$

$M_5 = 31$ $Q_5 = 496$

$M_7 = 127$ $Q_7 = 8128$

ה-Q_k-ים הם המספרים המשוכללים הנובעים ממספרי-מרסן המתאימים. נעיר עוד שתנאי הכרחי לכך שמספר מהצורה $2^k - 1$ יהיה ראשוני, הוא ש- k עצמו יהיה ראשוני, כי אם $k = st$, ו- $s \neq 1$ ו- $t \neq 1$ מקבלים:

$$2^k-1 = 2^{st}-1 = (2^s)^t-1$$

ומספר זה מתחלק כידוע ב- 2^s-1. עם זאת, תנאי זה איננו מספיק.

מספרי מרסן הבאים אחרי M_7 הם: M_{13}; M_{17}; M_{19}; M_{31}; M_{61}; M_{89}; M_{107}; M_{127}.

לבסוף נעיר שלא ידוע על קיום או אי-קיום מספרים משוכללים אי-זוגיים. מה שהוכח הוא כי, מספר כזה, אם קיים, לא יוכל להיות קטן מ- $1{\cdot}4\times10^{14}$ ומספר גורמיו הראשוניים השונים יהיה לפחות 6.

בעיה בארבעה מעגלים

נניח כי יש לנו ארבעה מעגלים, אשר כל אחד מהם נוגע בשלושת האחרים (ראה ציור). אם הרדיוסים של המעגלים הם r_1, r_2, r_3, r_4 נוכיח כי

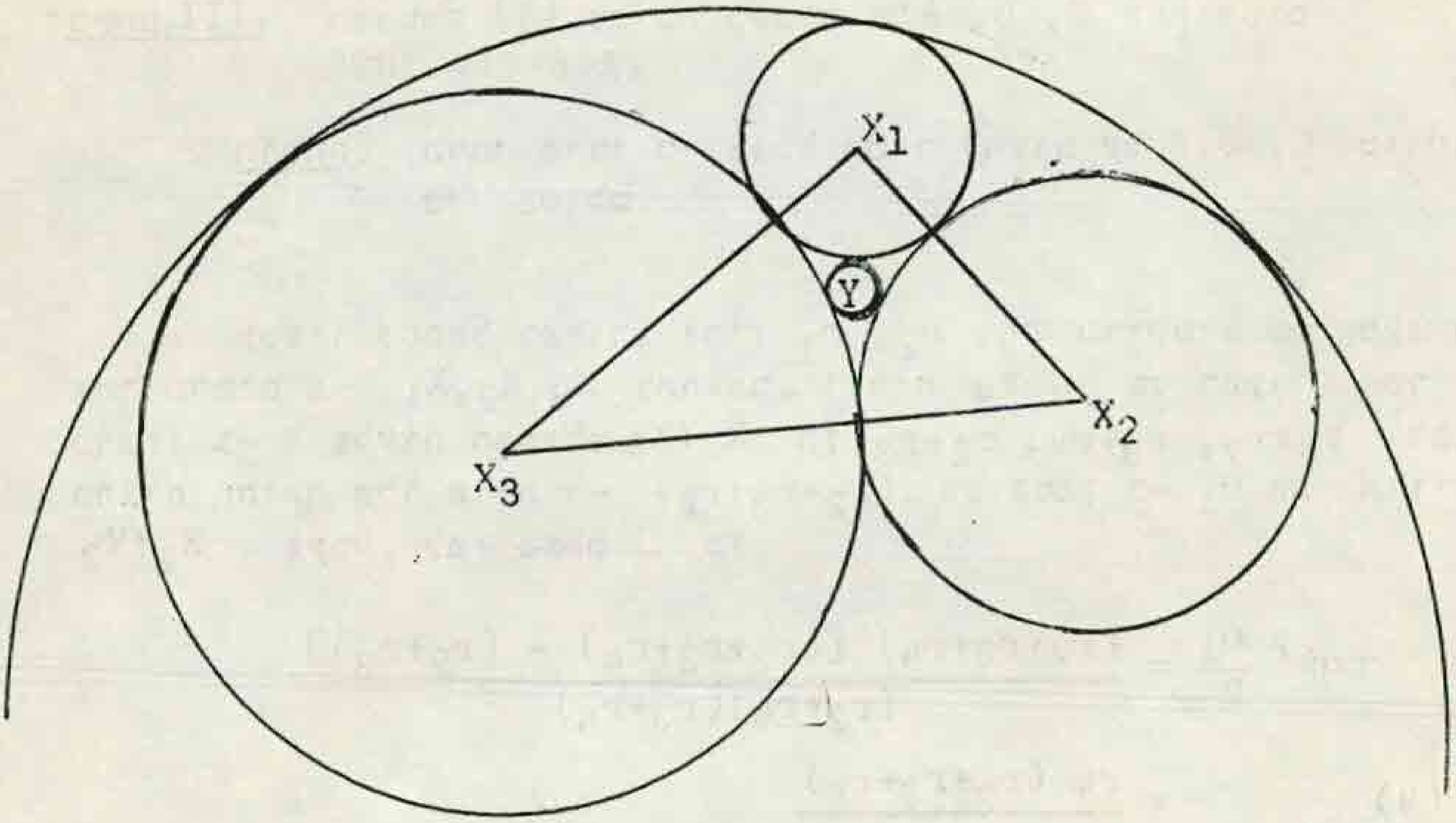
$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}\right)$$

הנוסחה היפה והסימטרית הזאת הומצאה ע"י פרידריק סודי (1877 - 1956), פיסיקאי בריטי שהתפרסם בנעוריו בגלל מחקריו החלוציים באיזוטופים. לעת זקנתו התמסר בעיקר למחקר מתמטי.

בכל משולש ABC נסמן את אורכי הצלעות BC, CA, AB ע"י a,b,c בהתאמה, וב- R את הרדיוס של המעגל החוסם את המשולש. נניח את הנוסחאות הבאות מטריגונומטריה אלמנטרית:-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \tag{1}$$

$$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \tag{2}$$



נכתוב $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. נוכיח משפט אלמנטרי וידוע:-

משפט I: $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$, $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$

כי $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos A)$

$= \frac{1}{2}[1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}]$ לפי (1)

$= \frac{(b+c)^2-a^2}{4\,bc}$ והמסקנה מידית.

כמו כן $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos A)$

$= \frac{a^2-(b-c)^2}{4\,bc}$

משפט II. (3) $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$

הוכחה. המשפט נובע ישר מהמשוואות (1) ו-(2).

משפט III. הנוסחה (3) נכונה בשביל כל A, B, C המקיימים $A+B+C = 180°$.

הוכחה. הדבר מידי כי נוכל תמיד לחשוב על A, B, C כזויות של משולש.

עכשיו נסתכל בציור. יהיו r_1, r_2, r_3 הרדיוסים של המעגלים אשר מרכזם ב- X_1, X_2, X_3 בהתאמה, ויהיה r_4 זה של המעגל אשר מרכזו ב- Y צלעות המשולש X_2YX_3 הן r_2+r_3, r_3+r_4, r_4+r_2 ולכן מחצית היקף שלו שווה ל- $(r_2+r_3+r_4)$. אם נסמן ב- θ_1 את הזוית X_2YX_3 נקבל, לפי משפט I, כי

$$\cos^2\frac{\theta_1}{2} = \frac{(r_2+r_3+r_4)\,[(r_2+r_3+r_4)-(r_2+r_3)]}{(r_2+r_4)(r_3+r_4)}$$

$$= \frac{r_4\,(r_2+r_3+r_4)}{(r_2+r_4)(r_3+r_4)} \qquad (4)$$

ובדרך דומה

$$(5) \qquad \sin^2 \frac{\theta_1}{2} = \frac{r_2r_3}{(r_2+r_4)(r_s+r_4)}$$

אם נסמן את $X_3YX_1 >$ ו- $X_1YX_2>$ ב- θ_2, θ_3 בהתאמה, נקבל כמו כך כי

$$(6) \qquad \sin^2 \frac{\theta_2}{2} = \frac{r_3r_1}{(r_3+r_4)(r_1+r_4)}$$

$$(7) \qquad \sin^2 \frac{\theta_3}{2} = \frac{r_1r_2}{(r_1+r_4)(r_2+r_4)}$$

אבל $\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} = 180^\circ$ ולכן, לפי משפט III

$$(8) \quad \sin^2 \frac{\theta_1}{2} = \sin^2 \frac{\theta_2}{2} + \sin^2 \frac{\theta_3}{2} - 2 \sin\frac{\theta_2}{2} \sin\frac{\theta_3}{2} \cos\frac{\theta_1}{2}$$

נציב מהנוסחאות (4), (5), (6), ו-(7) ב-(8) ונקבל

$$\frac{r_2r_3}{(r_2+r_4)(r_3+r_4)} = \frac{r_3r_1}{(r_3+r_4)(r_1+r_4)} + \frac{r_1r_2}{(r_1+r_4)(r_2+r_4)} -$$

$$- 2 \sqrt{\frac{r_3r_1}{(r_3+r_4)(r_1+r_4)} \circ \frac{r_1r_2}{(r_1+r_4)(r_2+r_4)} \circ \frac{r_4\ (r_2+r_3+r_4)}{(r_2+r_4)(r_3+r_4)}}$$

ז.א.

$$r_2r_3(r_1+r_4) = r_3r_1(r_2+r_4)+r_1r_2(r_3+r_4)-2r_1 \sqrt{r_2r_3r_4(r_2+r_3+r_4)}$$

אם נחלק כאן ב- $r_1r_2r_3r_4$ נקבל

$$\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_3} - 2\sqrt{\frac{1}{r_3r_4} + \frac{1}{r_2r_4} + \frac{1}{r_2r_3}}$$

ולכן

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{r_3r_4} + \frac{1}{r_2r_4} + \frac{1}{r_2r_3}\right)$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{r_1r_4} + \frac{1}{r_2r_4} + \frac{1}{r_3r_4} + \frac{1}{r_1r_3} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_1r_2}\right)$$

$$2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}+$$

$$+2\left(\frac{1}{r_1r_4}+\frac{1}{r_2r_4}+\frac{1}{r_3r_4}+\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_2}\right)$$

ז.א.

$$(9)\quad 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2$$

וזה מה שרצינו להוכיח.

בציור לקחנו r_1, r_2, r_3 שווים ליחידה אחת, 2 יחידות, ו-3 יחידות בהתאמה. נוכל לראות את (9) כמשוואה ריבועית עבור $\frac{1}{r_4}$, ואמנם מקבלים $2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{r_4^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{r_4}\right)^2$

ומכאן, אחרי פישוט $23\,r_4^2+132\,r_4-36=0$

ז.א. $(r_4+6)(23\,r_4-6)=0$

שרשי המשוואה הריבועית הם איפוא -6, $r_4=\frac{6}{23}$. השורש $\frac{6}{23}$ נותן את המעגל אשר מרכזו ב- Y. השורש השני מתאים למעגל הגדול המסובב את הציור, והסימן השלילי מבטא את העובדה כי המגע הוא עכשיו מבפנים ולכן יש לראות את הטימן של r_4 כמנוגד לזה של r_1, r_2, r_3.

בעיות חדשות

הבעיות המצויינות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' ו-י' בלבד (אין פרוש הדבר שהן קלות). את הפתרונות יש להגיש למערכת (בצרוף הטופס מעמוד 33) עד 15.1.66 . המספר בסוגריים אחרי מספר כל שאלה, הוא מספר הנקודות המוצעות עבור פתרון מלא ומדוייק של השאלה.

ת.256 (3) להוכיח כי עבור $7<\lambda<12$ ו- x, y ממשיים כלשהם לא יוכל $x^6-x^5y+4x^4y^2+\lambda x^3y^3-4x^2y^4-xy^5+y^6$ להיות שלילי.

ת.257 (2) הוכח כי ערך הפונקציה $\tan^3\theta\ \cot\theta$ לא יכול להימצא בין $\frac{1}{3}$ ל- 3.

ת.258 (2) הוכח כי $\log_{10} 3$ איננו מספר ראציונלי, ז.א. כי אין למצוא מספרים שלמים a, b כך ש- $\log_{10} 3 = a/b$.

ת.259* (4) ניתנת קבוצת נקודות במישור בעלת מספר איברים סופי, והמרחקים בין זוגות הנקודות כולם שונים אחד מהשני. מחברים כל נקודה מהקבוצה לשכנתה הקרובה ביותר. הוכח כי אין לצרף מבין הקטעים הנוצרים מצולע סגור וכי אין שנים מבין הקטעים החותכים זה את זה.

ת.260* (3) הסדרה u_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ מוגדרת ע"י $u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+1} = nu_n+u_{n-1}$ $(n=1,2,\ldots)$. הוכח כי, עבור כל n, u_n+u_{n+3} מתחלק ב-3.

ת.261* (2) אם a ו-b חיוביים הוכח כי $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$ וכי השוויון מתקיים אך ורק כש- $a=b$.

ת.262* (3) מספר מסויים הוא בעל שלוש ספרות, כשמציגים אותו לפי בסיס 7, ובעל אותן הספרות בסדר הפוך, כשמציגים אותו לפי בסיס 9. חשב את המספר ואת הצגתו לפי בסיס 10.

ת.263* (3) כמה שלישיות של מספרים שלמים (x,y,z) קיימות הממלאות את התנאים הבאים:- $x+y+z = 19$; $y+z \geqslant x$, $z+x \geqslant y$, $x+y \geqslant z$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$?

ת.264* (2) הוכח כי עבור כל מספר טבעי מתחלק $3^{2n+1}+2^{n+2}$ ב-7.

ת.265 (2) הוכח כי עבור כל מספר טבעי n, $2^n \geqslant 1 + n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$ (הוצע ע"י צ. דימנט).

ת.266* (3) במרובע $ABCD$, E ו-F הם אמצעי הצלעות AB ו-CD בהתאמה, ו-G אמצע EF. DG חותך את EC בנקודה H ו-AH חותך את BC ב-N. להוכיח כי N הוא אמצע BC. (הוצע ע"י ח. מרדיקס).

ת.267* (4) אדם מחלק בין בניו סכום של 407 ל"י ומספר קטן יותר של ספרים. החלוקה נעשית בצורה הבאה: עבור כל ספר שאין הבן מקבל הוא מקבל כתמורה 2 ל"י, אבל עליו לשלם 3 ל"י בחזרה לקופה עבור כל ספר שהוא מקבל. אין שני בנים מקבלים אותו מספר ספרים אבל כל אחד מהם מקבל לפחות ספר אחד, ובסוף החלוקה לא נשאר כסף בקופה. למצוא את מספר הבנים ואת חלקו של כל אחד בכסף ובספרים (הוצע ע"י ח. מרדיקס).

ת.268* (3) למצוא את המקום הגיאומטרי של נקודה אשר מרחקה מהבסיס BC של משולש שווה שוקיים ABC שווה לממוצע ההנדסי בין מרחקיה מהשוקיים AC,AB (הוצע ע"י מ. וקס).

ת.269 (2) הנקודות N,M,L נמצאות על הצלעות AB,CA,BC בהתאמה של משולש ABC והישרים CN,BM,AL נפגשים בנקודה אחת O.
הוכח כי $\frac{OL\cdot OM\cdot ON}{AL\cdot BM\cdot CN} < \frac{1}{27}$. מתי יתקיים שוויון?
(הוצע ע"י א. סיגלר).

ת.270* (3) להתיר את המשוואה $QR^2 = PQQR$ כש- QR, PQQR הם מוצגים לפי הבסיס 10 (הוצע ע"י ח. מרדיקס).

פתרון הבעיות ת. 226 - 240

בבעיות אלה נפלו שתי שגיאות דפוס מצערות. אי השוויון ב-229 היה צריך להיות:

$$bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) > 6\ abc$$

וההגדרה של F_n ב-239 צריכה להיות $F_n = 2^{2^n}+1$. אנו מבקשים סליחת הקוראים אשר מספר ניכר מביניהם עמדו בעצמם על השגיאות. זיכינו במספר המלא של נקודות על השאלות האלה את כל הפותרים אשר ניסו את כוחם בהם.

ת.226 מאחר ש- $x^2 + z^2 = 2y^2$ רואים מיד כי כל מספר ראשוני אי-זוגי המחלק את x ואת z יחלק גם את y. אבל הוא הדין גם לגבי המחלק 2. כי אם x ו- z זוגיים יוצא כי $x^2 + z^2$ יתחלק ב-4 ולכן y יצטרך להיות זוגי. מאחר והנחנו כי $(x,y,z) = 1$ יוצא כי גם $(x,z) = 1$, ומהזוגיות של $x^2 + z^2$ נובע כי x ו- z יהיו שניהם אי-זוגיים.

נוכל איפוא לכתוב $y^2 = (\frac{z+x}{2})^2 + (\frac{z-x}{2})^2$ כש- $\frac{z\pm x}{2}$ שניהם שלמים. כל מחלק משותף של $\frac{z\pm x}{2}$ יחלק גם את $\frac{z+x}{2} \pm \frac{z-x}{2}$ ז.א. את y ואת x. אבל $(z,x) = 1$ ולכן גם $(\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2}) = 1$.

מכאן כי $[\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2}, y]$ מהווה שלישיה פיתאגוראנית ולכן

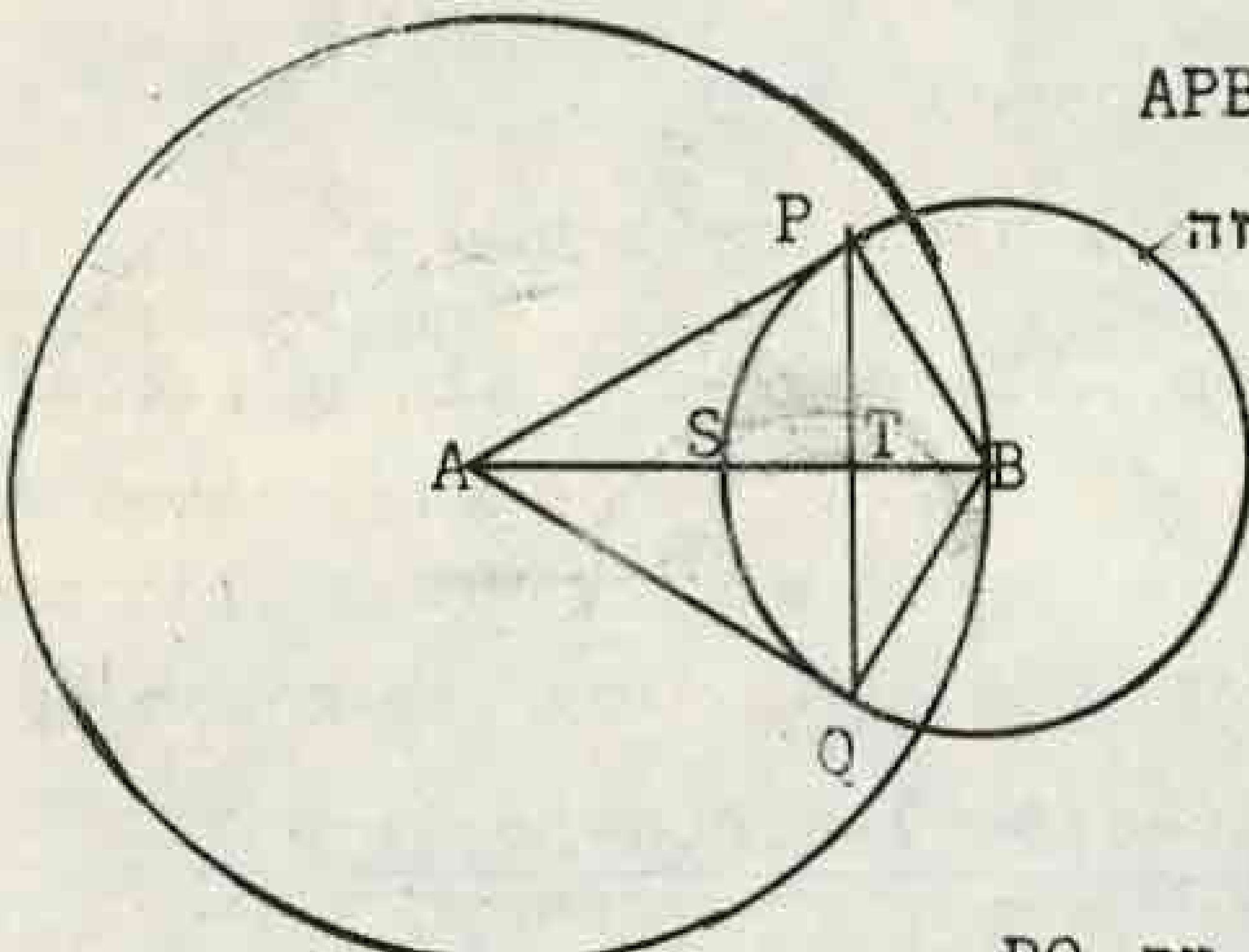
מתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:-

א) קיימים מספרים שלמים n, m כך ש- $\frac{z+x}{2} = 2mn$; $\frac{z-x}{2} = m^2-n^2$, $y = m^2+n^2$.

ב) קיימים m,n כך ש- $\frac{z+x}{2}=m^2+n^2$, $\frac{z-x}{2} = 2mn$, $y = m^2+n^2$

במקרה הראשון יהיו $y \pm \frac{z+x}{2} = (m\pm n)^2$ ובמקרה השני $y \pm \frac{z-x}{2} = (m\pm n)^2$.

ת.227 אם נפרק את המספר לגורמיו הראשוניים, נגיד $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}\ldots$, יהיה מספר חלקיו $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots$. מכאן שהאפשרויות במקרה שלנו עבור $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ הן (i) 99 , (ii) 49,1 (iii) 24,1,1 , (iv) 24,3 , (v) 4,4,3 , (vi) 4,4,1,1.
אם נבדוק את כל האפשרויות האלה, נראה כי המספר הכי קטן הממלא את התנאים הוא $2^4\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7 = 45,360$.



ת.228 במשולש APB הזוית APB ישרה ו- $\frac{BP}{AB} = \frac{1}{2}$. מזה נובע כי $\sphericalangle PAB = 30^\circ$ ולכן $\sphericalangle PAQ = 60^\circ$. מאידך AP = AQ ומכאן ש- APB הוא משולש שווה צלעות.

עכשיו נסמן ב- T את הנקודה בה נפגש AB עם PQ וב- S את מפגשו עם המעגל הקטן. $AP = \sqrt{AB^2-BP^2} = R\sqrt{3}$

ו- $\frac{AT}{AP} = \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ מכאן ש- $AT = \frac{3R}{2}$ ו- $AS = \frac{2}{3}AT$.
המסקנה מידית.

ת.229 עבור כל x חיובי קיים $x + \frac{1}{x} - 2 = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 > 0$, ושוויון אך ורק כש- $x = 1$. נוכל איפוא לכתוב

$$bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) = abc\ [(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})]$$
$$\geqslant abc\ (2+2+2)$$
$$= 6\ abc$$

התנאי לשוויון הוא ש- $\frac{c}{a} = \frac{a}{c} = 1$, $\frac{b}{c} = \frac{c}{b} = 1$

ו- $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$, ז.א. $a = b = c$.

<u>230.ת</u> $2^{4x+4} \cdot 3^{-y} = 2^{2x} \cdot 3^{-y} = 8$ ולכן $\frac{1}{2} = (\frac{16}{3})^y$;

ומכאן המסקנה.

<u>231.ת</u> לפי הנתון

$$\sin^4\sigma \cos^2\alpha + \cos^4\sigma \sin^2\alpha = \sin^2\alpha \cos^2\alpha$$

ולכן $\cos^2\alpha(1-\cos^2\sigma)^2 + \cos^4\sigma(1-\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)$

ז.א. $(\cos^2\sigma - \cos^2\alpha)^2 = 0$

ובכן $\cos^2\alpha = \cos^2\sigma$ ומזה נובע גם כי $\sin^2\alpha = \sin^2\sigma$

$$\sin^{2n+2}\sigma/\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n+2}\sigma/\cos^{2n}\alpha = \sin^2\sigma + \cos^2\sigma = 1$$

<u>232.ת</u> קל לראות כי, עבור כל α,β,γ קיים

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{1}{4}[\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+ + \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

ולכן $\sin kx \sin (k+1)x \sin (k+2)x =$

$$= \frac{1}{4}[\sin(k+3)x+\sin(k+1)x+\sin(k-1)x-\sin(3k+3)x]$$

אבל, עבור כל θ וכל p,q טבעיים

$$\sum_{r=p}^{q} \sin r\theta = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \sum_{r=p}^{q} [\cos(r-\frac{1}{2})\theta - \cos(r+\frac{1}{2})\theta]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} [\cos(p-\frac{1}{2})\theta - \cos(q+\frac{1}{2})\theta] = \frac{\sin\frac{q-p+1}{2}\theta \sin\frac{q+p}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

מכאן

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k+3)x = \sum_{m=4}^{n+3} \sin mx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+7}{2}x}{\sin\frac{7}{2}}$$

ובדרך דומה

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k+1)x = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+3}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}, \quad \sum_{1}^{n} \sin(k-1)x = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n-1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

וגם

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(3k+3)x = \sum_{m=2}^{n+1} \sin(m\cdot 3x) = \frac{\sin\frac{3nx}{2}\sin\frac{3n+9}{2}x}{\sin\frac{3x}{2}}$$

הסכום המבוקש הוא איפוא

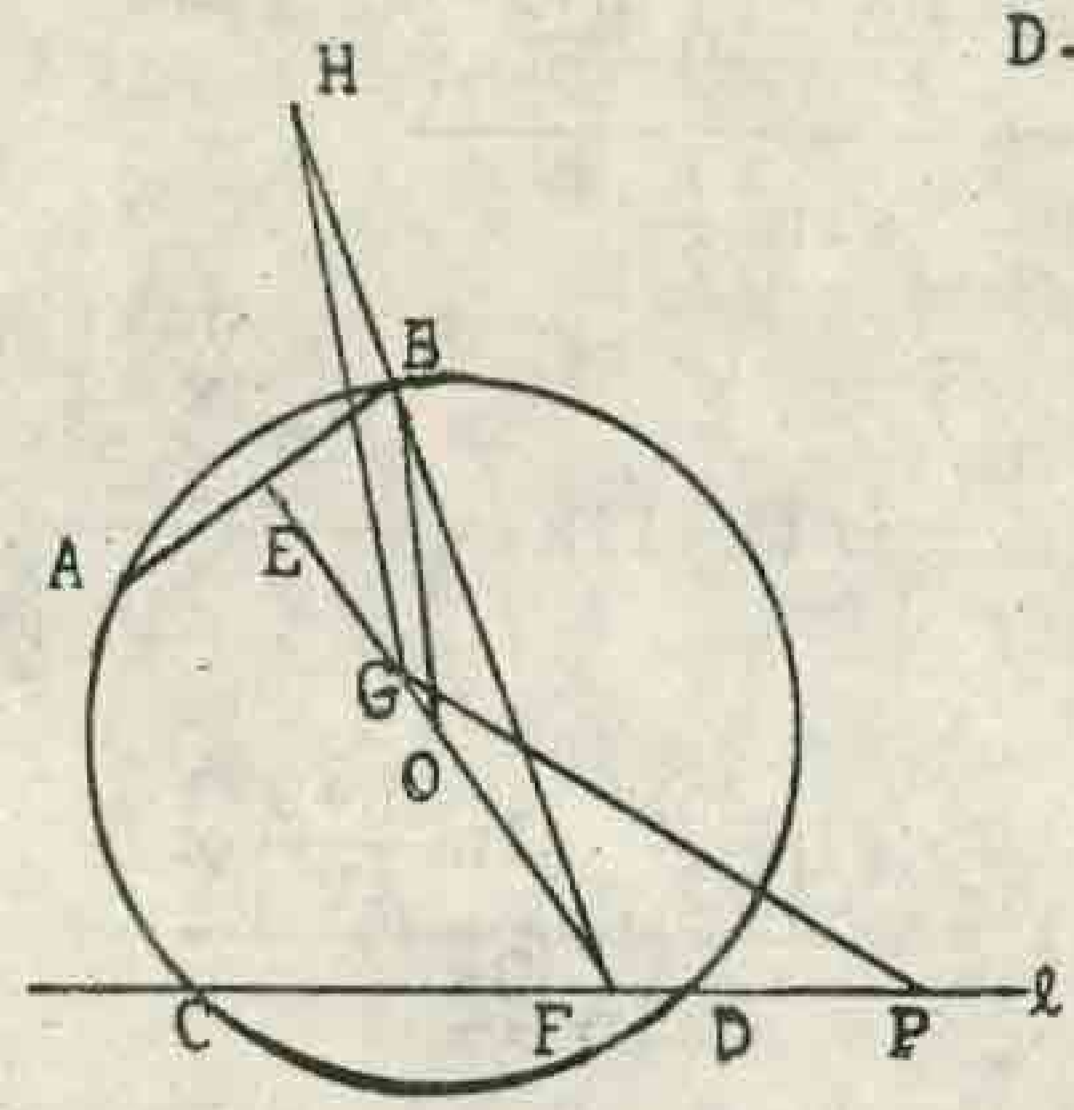
$$\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{n+7}{2}x + \sin\frac{n+3}{2}x + \sin\frac{n-1}{2}x\right] + \frac{\sin\frac{3nx}{2}\sin\frac{3n+9}{2}x}{\sin\frac{3x}{2}}$$

$$= \frac{2\cos 2x+1}{4\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+3}{2}x + \frac{\sin\frac{3nx}{2}\sin\frac{3n+9}{2}x}{\sin\frac{3x}{2}}$$

ת.233 לפי משפט צ'יבא קיים $BP\cdot CQ\cdot AR=PC\cdot QA\cdot RB$ אבל אנחנו יודעים כי $BP\cdot BP' = RB\cdot R'B$, $PC\cdot P'C = CQ\cdot CQ'$, $QA\cdot Q'A = AR\cdot AR'$.
מארבע משוואות אלה נובע כי $BP'\cdot CQ'\cdot AR' = P'C\cdot Q'A\cdot R'B$.

ת.234 לפי משפט הממוצעים יהיה הממוצע ההנדסי של המספרים $1,2,\ldots,n$
קטן מהממוצע החשבוני, ולכן $(n!)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}(1+2\ldots+n) = \frac{n+1}{2}$
יוצא כי $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n} < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$

ת.235 יהיה EF האנך האמצעי של AB, ו-F נקודת מפגשו עם ℓ.
נקח נקודה שרירותית P על ℓ ונעשה את הזוית $\sphericalangle FPG = 90^\circ-\alpha$,
כש- G על EF. עכשיו נחבר FB ונמשיך אותו עד H כש-
$GP = GH$, ונקבע את O על EF כך ש- $BO \parallel GH$.



נצייר את המעגל בעל מרכז ב-O
ורדיוס OA, ונסמן ב-C ו-D
את הנקודות בהן הוא פוגש
את ℓ. נוכיח כי
$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \alpha$.

<u>הוכחה.</u> נחבר את OD, קיים

$$\frac{OF}{OD} = \frac{OF}{OB} = \frac{GF}{GH} = \frac{GF}{GP}$$

ולכן $GP \parallel OD$.

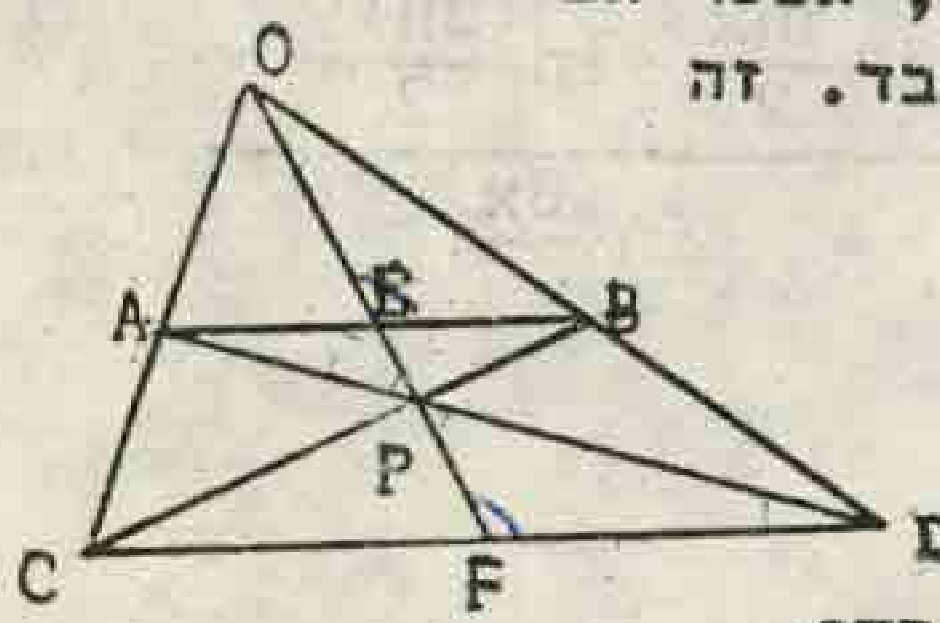
יוצא כי

$$90^\circ - \alpha = \sphericalangle FPG = \sphericalangle OCD = \sphericalangle ODF$$

ומכאן כי $\sphericalangle COD = 2\alpha$

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \frac{1}{2} \sphericalangle COD = \alpha$$

<u>ת.236</u> (i) נתונים שני קטעים מקבילים, אפשר תמיד
למצוא את אמצעיהם ע"י סרגל בלבד. זה
נובע ישר מהציור. יהיו CD, AB



הקטעים AC, BD נפגשים ב- Q
ו- BC, AD ב- P. הישר
PQ חוצה את AB ואת CD.
כי המשולשים AEP, DFP
דומים וכמו כן המשולשים BEP, CFP

ולכן $\frac{AE}{FD} = \frac{EP}{FP} = \frac{EB}{FC}$

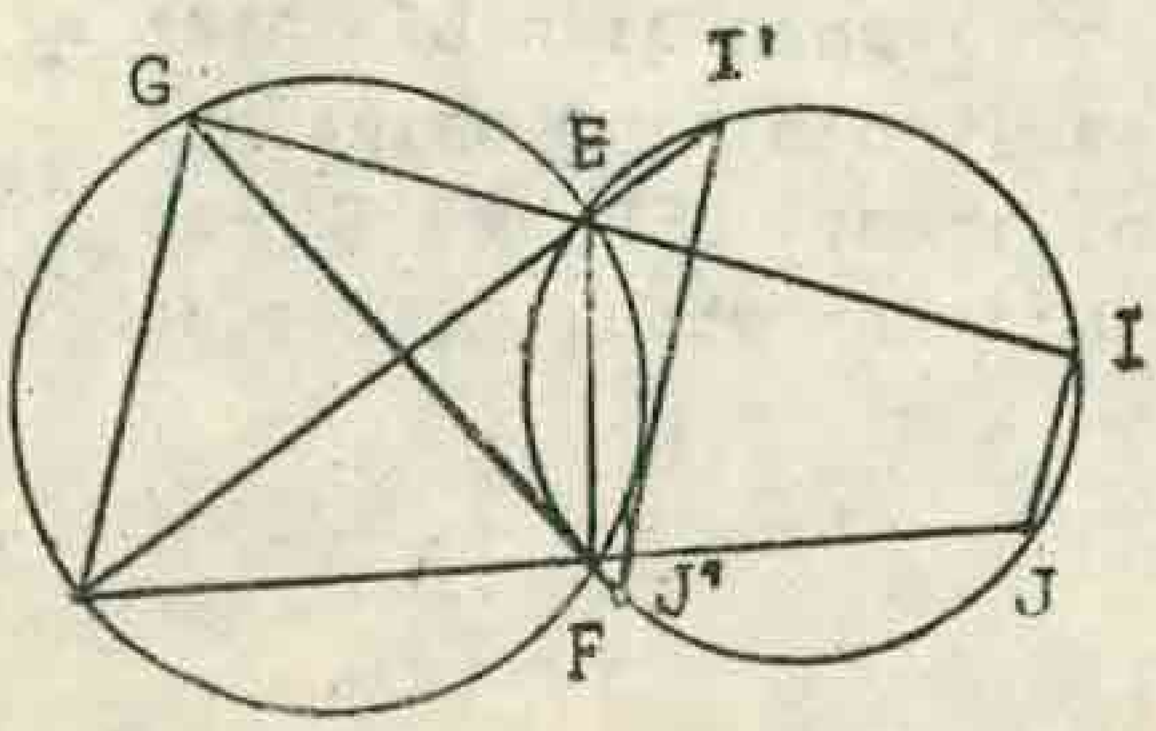
ז.א. $AE \cdot FC = FD \cdot EB$

מאידך $\frac{AE}{FC} = \frac{QE}{QF} = \frac{EB}{ED}$

ומזה $AE^2 = EB^2$

$$AE = EB$$

(ii) נתונים שני מעגלים
הנפגשים ב-E, F. יהיו G, H
שתי נקודות כלשהן על
אחד המעגלים.



נניח כי GE פוגש את
המעגל השני שוב ב-I
ו-HF פוגש אותו ב-J.
אזי $GH \parallel IJ$

הוכחה.

$$<EGH = 180^\circ - <EFH = <EFI = 180^\circ - <EIJ$$

כמו כן אם נקבל את I', J' בדרך דומה ע"י חיבור של G עם F ושל H עם E יתקיים גם ש- $I'J' \parallel GH$.

(iii) עכשיו ניגש לבניה.

ניקח שתי נקודות G,H על אחד המעגלים וע"י השיטה המתוארת ב-(ii) נבנה שני מיתרים מקבילים $IJ, I'J'$ במעגל השני.

ע"י התהליך שב-(i) נשיג קו ישר החוצה את $IJ, I'J'$ וברור כי זה יעבור דרך מרכז המעגל. נבצע בניה דומה משתי נקודות אחרות, G', H', על המעגל הראשון וכך נקבל קו ישר שני העובר דרך מרכז המעגל השני. משני הישרים האלה יש לנו המרכז. את מרכז המעגל הראשון אפשר לקבל בדרך דומה אבל אפשר עכשיו להקל קצת על הבניה, אם ננצל את המרכז הידוע כבר של המעגל השני, את זה נשאיר לקורא.

ת.237 כש- $n=1$ מקבלים אי-השוויונים את הצורה $\frac{1}{\alpha+1}<1<\frac{2^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$ השמאלי ברור. באשר לימיני נפתח $2^{\alpha+1} = (1+1)^{\alpha+1}$ לפי משפט הבינום ונקבל $\alpha+2$ איברים אשר כל אחד מהם הוא מספר חיובי שלם. לכן $\alpha+2 < 2^{\alpha+1}$ וזה אי-השוויון. כדי להוכיח את המשפט עבור $n>1$ נשתמש באינדוקציה. המעבר האינדוקטיבי מ-n עד $n+1$ יתאפשר אם נוכיח כי

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < (n+1)^\alpha < \frac{(n+2)^{\alpha+1}-(n+2)}{\alpha+1} - \frac{(n+1)^{\alpha+1}-(n+1)}{\alpha+1}$$

ז.א.

$$(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} < (\alpha+1)(n+1)^\alpha < (n+2)^{\alpha+1} - (n+1)^{\alpha+1} - 1$$

ידוע כי, עבור כל b,a וכל m טבעי, קיים

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2 \ldots + b^{m-1})$$ ולכן

$$\begin{aligned}(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1} &= [(n+1)-n][(n+1)^\alpha+(n+1)^{\alpha-1}\cdot n+(n+1)^{\alpha-2}\cdot n^2+\ldots] \\ &< (n+1)^\alpha+(n+1)^{\alpha-1}(n+1)+(n+1)^{\alpha-2}(n+1)^2+\ldots \\ &= (\alpha + 1)(n + 1)^\alpha\end{aligned}$$

מאידך

$$\begin{aligned}(n+2)^{\alpha+1} &= (n+1+1)^{\alpha+1} \\ &= (n+1)^{\alpha+1}+\binom{\alpha+1}{1}(n+1)^\alpha+\binom{\alpha+1}{2}(n+1)^{\alpha-1}\ldots+\binom{\alpha+1}{\alpha}(n+1)+1\end{aligned}$$

לפי משפט הבינום, ולכן

$$\begin{aligned}(n+2)^{\alpha+1}-(n+1)^{\alpha+1}-1 &= \binom{\alpha+1}{1}(n+1)^\alpha+\binom{\alpha+1}{2}(n+1)^{\alpha-1}\ldots \\ &> \alpha+1)(n+1)^\alpha\end{aligned}$$

ת.238 נמשיך את $P''B$ שיפגוש את $B''C''$ ב-X ואת $P'A'$ שיפגוש את $A'C'$ ב-Y. נמשיך את PC שיחתוך את AB ב-Z ואת $P'P''$ ב-W.

ברור כי $BX = PC = P''B$ ולכן $BXPC$, $BP''WZ$ הם שתי מקביליות על בסיסים שווים ובין אותם המקבילים PC, BX. יוצא כי $S_{BXPC} = S_{BP''WZ}$ מאידך $BXPC$, $BB''C''C$ הן מקביליות

על הבסיס המשותף BC ובין המקבילים BC, $B''C''$ ולכן $S_{BXPC} = S_{BB''C''C}$ משני אלה נובע כי $S_{BB''C''C} = S_{BP''WZ}$

בדרך דומה נוכל להוכיח כי $S_{AC'A'A} = S_{AZWP'}$, והמסקנה מידית.

ת.239 אנחנו מתבססים על הנוסחה

$$x^{2p}-1 = (x^2-1)(x^{2p-2}+x^{2p-4}\dots+x^2+1)$$
$$= (x-1)(x+1)(x^{2p-2}+x^{2p-4}\dots+1)$$

אשר ממנה נובע כי $x^{2p}-1$ מחלק ב- $(x+1)$. עכשיו נניח כי $m<n$. אזי נקבל $F_n-2 = 2^{2^n} - 1 = (2^{2^m})^{2^{n-m}} - 1$ וזה מחלק, לפי האמור לעיל ב- F_m ז.א. כי $F_n = KF_m+2$ כש-K הוא שלם. לכן כל גורם משותף של F_m, F_n יחלק גם את F_n-KF_n, ז.א. 2. מאחר ו-F_m, F_n הם אי-זוגיים, יוצא כי אין להם גורם משותף (פרט ל-1).

ת.240

$$\tan x + \tan 5x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \frac{\sin 6x}{\cos x \cos 5x}$$
$$= \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\cos x \cos 5x}$$

ולכן המשוואה נותנת

$$2\sin 3x \cos^2 3x + \sin 3x \cos x \cos 5x = 0$$

פתרון אחד הוא $\sin 3x=0$, ז.א. $x = \frac{k\pi}{3}$. פרט לפתרון זה יש לנו

$$2 \cos^2 3x + \cos x \cos 5x = 0$$

ז.א.

$$3 \cos 6x + \cos 4x + 2 = 0$$

ומכאן

$$12 \cos^3 2x + 2 \cos^2 2x - 9 \cos 2x + 1 = 0$$

הנותן

$$\cos 2x = -1, \ \frac{5 \pm \sqrt{13}}{12}$$

את השורש $\cos 2x = -1$ נוכל להזניח כי זה היה נותן $x=(n+\frac{1}{2})\pi$ ואז המשוואה המקורית איננה בעלת משמעות. נשאר איפוא $\cos 2x = \frac{5\pm\sqrt{13}}{12}$ ולכן $2x = 2n\pi \pm 44°10'$ או $2m\pi \pm 83°41'$

הפתרון המלא הוא איפוא

$$x = \frac{k\pi}{3} \quad , \quad n\pi \pm 22°05' \quad , \quad m\pi \pm 41°50'$$

רשימת פותרי השאלות מס. 226 - 240.

(בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר)

.1	אגד דוב	יב׳,	תיכון עירוני א׳, ת"א	(16)
.2	אליאס אורי	י׳,	תיכון, כפר-חסידים	(39)
.3	איש-שלום אריאל	יא׳,	תיכון עירוני ה׳, ת"א	(25)
.4	אשכנזי מכס	יא׳,	בי"ס אחד-העם, פתח-תקוה	(4)
.5	בן-ארצי חגי	י׳,	תיכון, קרית טבעון	(41)
.6	בן-גור אורי		בי"ס לקציני ים, עכו	(8)
.7	בן-שחר ברק	יא׳,	גימנסיה עברית, ירושלים	(6)
.8	בר-יהושוע דוד	יא׳,	בי"ס מקצועי ליד הטכניון	(27)
.9	גולדברג צבי	יא׳,	תיכון עירוני ט׳, ת"א	(17)
.10	גולדברג מרדכי	יא׳,	בי"ס ריאלי, חיפה	(36)
.11	גולדפרב אלי	יא׳,	תיכון עירוני ה׳, ת"א	(16)
.12	גלדמן יהושוע		צה"ל	(8)
.13	גרוס רוני	יב׳,	תיכון עירוני א׳, ת"א	(14)
.14	דימנט דוד	יב׳,	בי"ס ריאלי, חיפה	(28)
.15	דרוקר אביגדור	יב׳,	בי"ס טשרניחובסקי, נתניה	(47)
.16	הראל יהודה	יא׳,	תיכון, קרית מוצקין	(4)
.17	הראל צבי	י׳,	בי"ס ריאלי, חיפה	(47)
.18	ווייס יצחק	יא׳,	תיכון, קרית-עמל	(23)
.19	וינד עמנואל	י׳,	בי"ס ריאלי, חיפה	(15)
.20	וקס מתי	יב׳,	בי"ס טשרניחובסקי, נתניה	(45)
.21	טייכר מרדכי	יב׳,	גימנסיה שלוה, ת"א	(33)
.22	טליל אורי	יב׳,	בי"ס ריאלי, חיפה	(9)
.23	יעקב יגאל	יא׳,	תיכון עירוני ט׳, ת"א	(17)
.24	נמרוד מגידו	יב׳,	גימנסיה הרצליה, ת"א	(20)
.25	סוריך אנדרי	יא׳,	תיכון מקצועי, חיפה	(14)
.26	סתוי יונתן		תל-אביב	(48)
.27	עמית מיכה	יא׳,	תיכון, קרית מוצקין	(37)
.28	ענבל צבי		טכניון, חיפה	(22)
.29	קוריצי אריה	י׳,	בי"ס ריאלי, חיפה	(13)
.30	רובל דורית	יב׳,	תיכון, קרית מוצקין	(9)
.31	רחמים שאול		רמת-גן	(17)
.32	רייך שמעון	יא׳,	בי"ס ריאלי, חיפה	(49)
.33	שבירו גד	יא׳,	גימנסיה עברית, י"ם	(6)
.34	שור אריה	יב׳,	בי"ס טשרניחובסקי, נתניה	(25)
.35	שטרן רפאל	יב׳,	תיכון דתי, חיפה	(34)
.36	שמר עדו	יא׳,	תיכון עירוני א׳, ת"א	(35)

ה ת כ ן

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.