ר ב ע ו ן   ל מ ת מ ט י ק ה
ללמוד ולמחקר

בעריכת

דב ירדן

כרך 3

תש"ט-י

ירושלם

R I V E O N   L E M A T E M A T I K A

A Quarterly Journal
Intended to Promote Mathematical Research
Among Students of Mathematics

Dov Jarden
Editor

Volume 3
1949

Jerusalem

ISRAEL

רבעון למתמטיקה

ללמוד ולמחקר

בעריכת דב ירדן

כרך 3 | ירושלים, אדר תש״ט, מרץ 1949 | חוברת 1

תכן

כתבת המערכת: דב ירדן, כנסת החדשה, ירושלים

המחיר 250 מ״ל

על המערכות של נקודות פ ק ט ה של קשת של מעגל [1]

ברוך גרמנסקי

א. תהא נתונה קבוצה אינסופית E של נקודות, חסומה וסגורה, במישור ה z-ים. נקח בתוך E $n\geq 2$ נקודות $z_1, z_2, \ldots, z_n$ וניצור את הממוצע הגאומטרי

$$\sqrt[\binom{n}{2}]{\prod_{1\leq\mu<\nu\leq n} |z_\mu - z_\nu|}$$

של המרחקים ההדדיים שלהן. המכסימום של הממוצע הגאומטרי הזה, כאשר $z_1, z_2, \ldots, z_n$ משתנים בתוך הקבוצה E באופן חפשי, נקרא הקוטר מסדר n של הקבוצה E [2]; הוא מתקבל לכל הפחות בשביל מערכת א ח ת של n נקודות מתוך E וקוראים למערכת נקודות כזאת מערכת של נקודות פ ק ט ה (מערכת-F) מסדר n של E [3]. מערכות-F ממלאות תפקיד יסודי בתורת הקוטר הטרנספיניטי [2] וכן בתורת האפרוכסימציה [4] והאינטרפולציה [5]. מערכות-F היו ידועות עד הופעת עבודתי הנזכרת בהערה [1] רק בשביל הקטע של קו ישר [6] ובשביל המעגל [6] ויחד עם זה בשביל כל קבוצה E ששפתה החיצונית היא מעגל [7]. אנחנו נתעסק בעבודה זו במערכות-F של קשת של מעגל ונביא בה משפטים בנוגע להתחלקות נקודותיהן על הקשת ולמספרן של מערכות-F אלה מסדר נתון. כפי שנראה להלן, בעיתנו בשביל קשת נתונה ו n די גדול מהוה חלק מבעיה יותר כללית, והיא: למצוא מערכת כזאת של $2-n$ נקודות על כ ל המעגל שיחד עם שתי נקודות קבועות הן עושות את הממוצע הגאומטרי הנ"ל למכסימום יחסי על המעגל.

ב. נוכיח קודם את המשפט הבא:

I. תהא A קשת של מעגל היחידה C במישור ה z-ים, שפשוקה הוא α, $0<\alpha<2\pi$. אנחנו מבדילים בין שני מקרים: א) $0<\alpha\leq\pi$; ב) $\pi<\alpha<2\pi$. במקרה א) כ ל מערכת-F של A מכילה את שני הקצות של A, וזה יהיה הדין גם במקרה ב) בשביל כל מערכת-F של A שסדרה n מקיים את התנאי $n\geq 2\pi/(2\pi-\alpha)$, בעוד ששום מערכת-F של A לא תכלול במקרה ב) בבת אחת את שני הקצות של A אם הסדר שלה n מקיים את התנאי: $2\leq n<2\pi/(2\pi-\alpha)$.

היות ובמקרה א) $2\geq 2\pi/(2\pi-\alpha)$ והיות והנחתנו היסודית היא $n\geq 2$, נקבל שבמקרה זה ממילא $n\geq 2\pi/(2\pi-\alpha)$. לכן נוכל לנסח את המשפט I באופן יותר קצר גם כך:

I'. תהא A קשת של מעגל היחידה C במישור ה z-ים שפשוקה הוא α, $0<\alpha<2\pi$. במקרה ש $n\geq 2\pi/(2\pi-\alpha)$ כל מערכת-F של A מהסדר n מכילה את שני הקצות של A, ואילו במקרה $2\leq n<2\pi/(2\pi-\alpha)$ שום מערכת-F של A מהסדר n איננה מכילה בבת אחת את שני הקצות של A [8].

---

1) העבודה הזאת היא הרחבה של עבודתי שהופיעה ב
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences 206(1938), 1163.

2) M. Fekete, Math. Zeitschr. 17(1923), 228-249.

3) Walsh, Interpolation and Approximation, New York, 1935, 176.

4) M. Fekete, Math. Zeitschr. 37(1933), 635.

5) M. Fekete, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 6(1926), 410; Walsh, loc. cit. 6) I. Schur, Math. Zeitschr. 1(1918), 377-402.

7) G. Szegö, Math. Zeitschr. 21(1924), 203-208.

8) נראה להלן שבשביל $2\leq n<2\pi/(2\pi-\alpha)$ יש מספר אינסופי של מערכות-F של A מהסדר n, בעוד שבשביל $n\geq 2\pi/(2\pi-\alpha)$ יש מערכת-F א ח ת ו י ח י ד ה של A מהסדר n.

ג. המשפט I נובע ממשפט העזר

II. כאשר n הנקודות $z_1, z_2, \dots, z_n$ ($2 \leq n$) משתנות על C באופן בלתי-תלוי זו בזו, אזי הבטוי

$$\Delta(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} |z_\mu - z_\nu| \tag{1}$$

מקבל מכסימום י ח ס י רק בשביל אותם ערכי המשתנים $z_1, z_2, \dots, z_n$ המתאימים לקדקדים של מצולע משוכלל בעל n צלעות החסום ב C. (והודות וכל המכסימה היחסיים האלה שוים ביניהם, לכן מהוים הקדקדים של כל מצולע משוכלל כזה גם מערכת-F מסדר n של המעגל C.)

ההוכחה הקצרה הבאה של משפט עזר זה נודעה לי מפי הפרופ' מ. פ ק ט ה:

בשביל $n \geq 2$ נקודות רצוניות $z_1, z_2, \dots, z_n$ על C (נסמן את הצמודים של המספרים האלה ב $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$) קים:

$$\Delta^2(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (z_\mu - z_\nu)(\bar{z}_\mu - \bar{z}_\nu) = \tag{2}$$

$$= \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (z_\mu - z_\nu)\left(\frac{1}{z_\mu} - \frac{1}{z_\nu}\right) = \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{(z_1 z_2 \dots z_n)^{n-1}} \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (z_\mu - z_\nu)^2 .$$

נסמן את הפונקציה הרציונלית האחרונה של המשתנים ה ח פ ש י י ם $z_1, z_2, \dots, z_n$ ב $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$:

$$\frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{(z_1 z_2 \dots z_n)^{n-1}} \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (z_\mu - z_\nu)^2 = F(z_1, z_2, \dots, z_n). \tag{3}$$

פונקציה זו המוגדרת בכל המישורים של המשתנים $z_1, z_2, \dots, z_n$ (מלבד נקודות האפס ונקודות האינסוף של המישורים האלה) מתלכדת, לפי החשבון הקודם, בשביל

$$z_1 = e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = e^{i\varphi_2}, \quad \dots, \quad z_n = e^{i\varphi_n}, \quad 0 \leq \varphi_\nu \leq 2\pi, \quad 1 \leq \nu \leq n, \tag{4}$$

עם הבטוי $\Delta^2(z_1, z_2, \dots, z_n)$. מכיון שבשביל הערכים ה א ל ה של המשתנים $z_1, z_2, \dots, z_n$ הפונקציות $\Delta(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\Delta^2(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ו $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ משיגות את המכסימום שלהן בבת אחת, על כן התאפסות הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_n})}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_n})}{\partial \varphi_n}$$

היא תנאי הכרחי למכסימום יחסי בשביל $\Delta(z_1, z_2, \dots, z_n)$ על C. ואולם בשביל

$$\frac{\partial F(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_n})}{\partial \varphi_\nu} = \frac{\partial F(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_\nu} \cdot \frac{dz_\nu}{d\varphi_\nu} = \frac{\partial F(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_\nu} \cdot iz_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq n$$

על כן, היות ו $1 \leq \nu \leq n$, $z_\nu \neq 0$, התנאים של מכסימום יחסי הם

$$\frac{\partial F(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_\nu} = 0, \quad 1 \leq \nu \leq n \tag{5}$$

נסמן את הערכים של $z_1, z_2, \dots, z_n$ העושים את $\Delta(z_1, z_2, \dots, z_n)$ למכסימום יחסי ב $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. אזי חשבון פשוט מראה שהתנאים (5) הם אקויולנטיים, בשים לב ל (3), למשואות:

$$\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} \frac{-2}{\zeta_\mu - \zeta_\nu} = \frac{n-1}{\zeta_\nu}, \quad 1 \leq \nu \leq n \tag{6}$$

אנחנו מציגים:

$$p(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_n) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n \tag{7}$$

ואז עוברות המשואות (6) להצגות

$$\frac{p''(\zeta_\nu)}{p'(\zeta_\nu)} = \frac{n-1}{\zeta_\nu}\ , \quad 1\leq\nu\leq n \tag{8}$$

מכאן נובע שהפולינום $(n-1)p'(z)-zp''(z)$

שהוא לכל היותר מהמעלה $n-1$ ב z מתאפס ב n הנקודות (השונות זו מזו) ζ_1, $\zeta_2,\dots,\zeta_n$ שבהן הפונקציה $\Delta(z_1,z_2,\dots,z_n)$ מקבלת מכסימום יחסי על C;
ומכאן יוצא שהפולינום הזה מזדהה עם אפס:

$$(n-1)p'(z)-zp''(z)\equiv 0 \tag{9}$$

תנאי זה אקוילנטי לתנאי

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{p'(z)}{z^{n-1}}\right) \equiv 0 \tag{10}$$

ולכן

$$p'(z)=\text{const}\ z^{n-1} \tag{11}$$

מצד שני, לפי ההגדרה דלעיל (7) יוצא ש

$$p'(z)=nz^{n-1}+(n-1)c_1z^{n-2}+\dots+c_{n-1}$$

על כן

$$c_1=c_2=\dots=c_{n-1}=0 \tag{12}$$

או:

$$p(z)=z^n+c_n \tag{13}$$

אבל, לפי (7),

$$c_n=(-1)^n\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n\ ;$$

לכן, אם נתחשב עוד בזה ש $|\zeta_\nu|=1$, $1\leq\nu\leq n$, נקבל

$$|c_n|=1 \tag{14}$$

ומכאן נובע משפט העזר II.

ד. נוכיח עכשיו, בעזרת משפט העזר II, את המשפט I. נניח שבמקרה א), שבו קיים $0<\alpha\leq\pi$, מערכת-F מסוימת מסדר n מסוים: $\zeta_1, \zeta_2,\dots,\zeta_n$ של A איננה מכילה את שני הקצות של A בבת אחת. אז הנקודות $\zeta_1', \zeta_2',\dots,\zeta_n'$ עם $\zeta_\nu'=\zeta_\nu e^{i\varepsilon}$, $1\leq\nu\leq n$ ועם ε ממשי ובעל ערך מוחלט די קטן מתנות מערכת-F חדשה הנמצאת כולה בפנים A. לכן הן מספקות מכסימום יחסי של $\Delta(z_1,z_2,\dots,z_n)$ על המעגל C. לפי משפט העזר הנקודות $\zeta_1', \zeta_2',\dots,\zeta_n'$ צריכות אז להוות את הקדקדים של מצולע משוכלל בעל n צלעות, החסום בתוך המעגל C. אבל מההנחה $0<\alpha\leq\pi$ נובע שבפנים A אין מקום בשביל כל הקדקדים של מצולע משוכלל בכלל. כי ה"מצולע המשוכלל" בעל מספר הצלעות הקטן ביותר, דהיינו 2, דורש כבר פשוק $\alpha>\pi$ כדי שהוא ימצא בפנים A. לכן הנחתנו היתה בלתי נכונה ומערכת-F הנדונה מכילה במקרה א) את שני הקצות של A בבת אחת.

נפנה עכשיו אל המקרה ב): $\pi<\alpha<2\pi$. כאשר $n\leq 2\pi/(2\pi-\alpha)$, ההוכחה שכל מערכת-F מסדר n של A מכילה את שני הקצות של A בבת אחת היא אנלוגית להוכחה במקרה א). ואילו במקרה $n>2\pi/(2\pi-\alpha)$ או $2\pi/n>2\pi-\alpha$ יש מקום בפנים A למצולע משוכלל בעל n צלעות, והיות והקדקדים של מצולע משוכלל כזה נותנים את המכסימום של $\Delta(z_1,z_2,\dots,z_n)$ בשביל כל המעגל C, הרי הם נותנים a fortiori את המכסימום של $\Delta(z_1,z_2,\dots,z_n)$ בשביל הקשת A. לכן מהוה המערכת של n הקדקדים של כל מצולע משוכלל כזה הנמצא בפנים A מערכת-F מסדר n של A. עכשיו נשים לב לעובדה שכל מערכת של n נקודות של A השונה ממערכת הקדקדים של מצולע משוכלל עושה את $\Delta(z_1,z_2,\dots,z_n)$ קטן מהמכסימום הנזכר וכן לעובדה שמצולע משוכלל כזה יכול להכיל לכל היותר רק קצה אחד של הקשת A ונקבל את התוצאה ששום מערכת-F של A איננה מכילה במקרה הנדון את שני הקצות של A בבת אחת. על ידי כך הוכחנו את המשפט I בשלמותו. בעת ובעונה אחת קבלנו אף את התוצאה שבמקרה הנדון יש מספר אינסופי של מערכות-F מסדר n של A.

ה. כדי ללמוד יותר על התחלקות הנקודות $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ שבמערכת-F מסדר נתון n, $n \geq 3$ של A על הקשת הזאת, במקרה ששתי נקודות של המערכת מתלכדות עם הקצות u ו v של A (משפט I קבע את התנאים ההכרחיים והמספיקים לכך), עד כדי קביעת הנקודות כפונקציות של n, u ו v, נטפל בבעית המכסימום הכללית הבאה, שמערכת-F במקרה הנזכר איננה אלא פתרון אחד שלה: למצוא n נקודות $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ על מעגל היחידה $A+\bar{A}=C$ שתים מהן, נגיד ζ_1 ו ζ_n, מתלכדות בהתאמה עם u ו v ושאר $n-2$ הנקודות $\zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}$ עושות את $\Delta(u, z_2, \dots, z_{n-1}, v)$ למכסימום יחסי, כאשר $z_2, \dots, z_{n-1}$ משתנים באופן חפשי על C, חלק מהן על A והשאר על $\bar{A}$ ($\bar{A}$ היא הקשת המשלימה של A ב C). את המטרה שהעמדנו לפנינו לעיל נשיג על ידי אפיון משותף של המערכות המכסימליות $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ המהוות את פתרונות בעית המכסימום הנזכרת בהקימנו משואה דיפרנציאלית בשביל הפולינום

$$p(z) = \prod_{v=1}^{n} (z - \zeta_v) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n; \quad \zeta_1 = u, \ \zeta_n = v, \ n \geq 3. \tag{15}$$

מכיון ש $\zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}$ עושים את $\Delta(u, z_2, \dots, z_{n-1}, v)$ למכסימום יחסי, כאשר $z_2, \dots, z_{n-1}$ משתנים על C באופן הנזכר וקימת הזהות

$$\Delta^2(u, z_2, \dots, z_{n-1}, v) = F(u, z_2, \dots, z_{n-1}, v)$$

כאשר הערך המוחלט של כל אחד מהמספרים $u, z_2, \dots, z_{n-1}, v$ שוה לאחד (השוה סעיף ג), קים בהכרח

$$\frac{\partial F(u, z_2, \dots, z_{n-1}, v)}{\partial z_v} = 0, \quad 2 \leq v \leq n-1,$$

כאשר

$$z_v = \zeta_v, \quad 2 \leq v \leq n-1$$

על כן (השוה סעיף ג) $p(z)$ צריך בהכרח לקים את המשואות:

$$(n-1)p'(\zeta_v) - \zeta_v p''(\zeta_v) = 0, \quad 2 \leq v \leq n-1.$$

במלים אחרות, הנקודות $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ הן נקודות אפס לפולינום

$$(n-1)p'(z) - zp''(z) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \mu(n-\mu) c_\mu z^{n-1-\mu} \tag{16}$$

ממעלה $n-2$ ב z. מצד שני אלה הן נקודות האפס לפולינום

$$\frac{p(z)}{(z-u)(z-v)} = z^{n-2} + \dots$$

על כן $p(z)$ מקים את המשואה הדיפרנציאלית

$$(n-1)p'(z) - zp''(z) = \lambda \frac{p(z)}{(z-u)(z-v)} \tag{17}$$

שבה λ הוא ערך קבוע המתאים למערכת המכסימלית שממנה יצאנו. נוסף לזה מקים $p(z)$ את תנאי הלואי (תנאי-גבול):

$$p(u) = p(v) = 0. \tag{18}$$

ו. נוכיח עכשיו שלהפך λ זה קובע מצדו את $p(z)$ או, מה שהינו הך, את המערכת המכסימלית $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, כאשר קימים (15), (17) ו (18). באמת, נשוה ב (17) את מקדמי החזקות $z^{n-2}, z^{n-3}, \dots, z^0, z^{-1}$ בשני אגפיה של משואה זו, בשים לב ל (16) ולפתוח הבא של האגף הימני לפי חזקות יורדות של z:

$$\lambda \frac{p(z)}{(z-u)(z-v)} = \lambda p(z) \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{\omega_\rho}{z^{\rho-2}} = \lambda z^{n-2} + \lambda(c_1 + \omega_1) z^{n-3} + \lambda(c_2 + \omega_1 c_1 + \omega_2) z^{n-4} + \dots \tag{19}$$

$$+ \lambda(c_{\sigma-1} + \omega_1 c_{\sigma-2} + \dots + \omega_{\sigma-2} c_1 + \omega_{\sigma-1}) z^{n-\sigma-1} + \dots + \lambda(c_{n-2} + \omega_1 c_{n-3} + \dots + \omega_{n-3} c_1 + \omega_{n-2}) +$$

$$+ \lambda(c_{n-1} + \omega_1 c_{n-2} + \dots + \omega_{n-2} c_1 + \omega_{n-1}) + \dots$$

שבו

$$\omega_0 = 1, \omega_1 = u+v, \omega_2 = u^2 + uv + v^2, \dots, \omega_{\sigma-1} = u^{\sigma-1} + u^{\sigma-2} v + \dots + uv^{\sigma-2} + v^{\sigma-1}, \dots, \tag{20}$$

$$\omega_{n-1} = u^{n-1} + u^{n-2} v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}, \dots.$$

נקבל אז את ההצגות

$$\begin{aligned}
&1(n-1)c_1=\lambda\\
&2(n-2)c_2=\lambda(c_1+\omega_1)\\
&3(n-3)c_3=\lambda(c_2+\omega_1c_1+\omega_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sigma(n-\sigma)c_\sigma=\lambda(c_{\sigma-1}+\omega_1c_{\sigma-2}+\dots+\omega_{\sigma-2}c_1+\omega_{\sigma-1})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(n-1).1c_{n-1}=\lambda(c_{n-2}+\omega_1c_{n-3}+\dots+\omega_{n-3}c_1+\omega_{n-2})
\end{aligned}\tag{21}$$

$$0=\lambda(c_{n-1}+\omega_1c_{n-2}+\dots+\omega_{n-2}c_1+\omega_{n-1})\tag{22}$$

מההצגות (21) נוכל לחשב בזה אחרי זה את הערכים של c_1, c_2, ..., c_{n-1} בתור פולינומים $q_1(\lambda)$, $q_2(\lambda)$, ..., $q_{n-1}(\lambda)$ מהמעלות המדויקות 1, 2, ..., $n-1$ עם מקדמים שהם פולינומים ב ω_1, ω_2, ..., ω_{n-2} שמקדמיהם הם שוב מספרים רציונליים חיוביים התלויים ב n. הפולינומים האלה $q_\sigma(\lambda)$, $1\leqslant\sigma\leqslant n-1$, המתחלקים לפחות בחזקה הראשונה של λ, הם:

$$c_\sigma=q_\sigma(\lambda)=\frac{\lambda^\sigma}{\sigma!(n-\sigma)(n-\sigma+1)\dots(n-1)}+\dots=\lambda r_\sigma(\lambda),\ 1\leqslant\sigma\leqslant n-1.\tag{23}$$

בהציבנו במקום c_σ, $1\leqslant\sigma\leqslant n-1$ את הפולינומים $q_\sigma(\lambda)$ במשואה (22) נקבל ש λ מקים בהכרח את המשואה האלגברית:

$$\lambda(q_{n-1}(\lambda)+\omega_1q_{n-2}(\lambda)+\dots+\omega_{n-2}q_1(\lambda)+\omega_{n-1})=0\tag{24}$$

שמעלתה המדויקת היא n. אנו טוענים ש λ מקים גם את המשואה

$$q_{n-1}(\lambda)+\omega_1q_{n-2}(\lambda)+\dots+\omega_{n-2}q_1(\lambda)+\omega_{n-1}=0.\tag{25}$$

דבר זה הוא ברור כאשר $\lambda\neq0$. במקרה $\lambda=0$ מלמדים אותנו (16) ו (17) שבהכרח

$$c_1=c_2=\dots=c_{n-1}=0\tag{26}$$

ומפני זה

$$p(z)=z^n+c_n\tag{27}$$

מצד שני נותנים (27) יחד עם (18)

$$u^n-v^n=p(u)-p(v)=0$$

על כן, לפי (20)

$$\omega_{n-1}=u^{n-1}v+\dots+uv^{n-1}=\frac{u^n-v^n}{u-v}=0$$

ומכאן, בשים לב ל (23) אנו מקבלים ש $\lambda=0$ הוא שורש של (25).

(23) מראה ש c_1, ..., c_{n-1} נקבעים על ידי λ באופן חד-ערכי. כדי לאמת את הוכחת טענתנו בשלמותה יש עוד לחשב את c_n בתור פונקציה של λ. לשם כך נציב בשני האגפים של (17) במקום z את הערך 0; נקבל, בתוקף (16) ש

$$(n-1)c_{n-1}=\lambda\frac{c_n}{uv}.$$

לפי (23) זה נותן

$$\lambda c_n=\lambda uv(n-1)r_{n-1}(\lambda).\tag{28}$$

מכאן ההצגה המבוקשת

$$c_n=(n-1)uvr_{n-1}(\lambda)\tag{29}$$

בתנאי $\lambda\neq0$ ואמנם ההצגה הזאת היא נכונה גם במקרה $\lambda=0$. באמת, כמו שהראינו לעיל $\lambda=0$ גורר אחריו את (27) וזה, יחד עם (18) נותן

$$c_n=-u^n=-v^n\tag{30}$$

מצד שני, הפולינומים $q_\sigma(\lambda)$, $1\leqslant\sigma\leqslant n-1$ קשורים זה בזה על ידי הזהות

$$(n-1)q_{n-1}(\lambda)=\lambda(q_{n-2}(\lambda)+\omega_1q_{n-3}(\lambda)+\dots+\omega_{n-3}q_1(\lambda)+\omega_{n-2})$$

ומכאן, בגלל (23) נובעת הזהות:

$$(n-1)r_{n-1}(\lambda)=q_{n-2}(\lambda)+\omega_1q_{n-3}(\lambda)+\dots+\omega_{n-3}q_1(\lambda)+\omega_{n-2}\tag{31}$$

בהציבנו ב (31) במקום λ את הערך 0 נקבל, בתוקף (23):

$$(n-1)r_{n-1}(0)=\omega_{n-2}\tag{32}$$

ואולם, לפי (20) ו (30)

$$\omega_{n-2} = \frac{u^{n-1}-v^{n-1}}{u-v} = \frac{-v^n v^{-1}-(-u^n)u^{-1}}{u-v} = \frac{c_n v^{-1}-c_n u^{n-1}}{u-v} = \frac{c_n}{uv}.$$

וזה, יחד עם (32) מראה ש (29) קיים גם בשביל $\lambda=0$. נעיר עוד שבגלל

$$uv = \omega_1^2-\omega_2$$

אפשר לכתוב את ההצגה (29) גם בצורה

$$c_n = (n-1)(\omega_1^2-\omega_2)r_{n-1}(\lambda),$$

זאת אומרת שאפשר לבטא גם את c_n בתור פולינום ב λ שמקדמיו הם פולינומים ב $\omega_1, \dots, \omega_{n-2}$ עם מקדמים מספריים רציונליים חיוביים התלויים ב n.

ז. נביא עכשיו בחשבון שלמשואה האלגברית (25) אין יותר מ n-1 שרשים שונים זה מזה ושאם כן אין יותר מ n-1 מערכות מכסימליות $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ מהסוג הנדון. מצד שני בודאי יש לכל הפחות מערכת מכסימלית אחת מכל אחד מ n-2 הסוגים דלהלן: מערכת M_0: $\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}$ עם $u=\xi_1^{(0)}$ ו $v=\xi_n^{(0)}$ שבה אף אחת מ n-2 נקודותיה $\xi_2^{(0)}, \dots, \xi_{n-1}^{(0)}$ אינה שיכת ל $\bar{A}$ (וכולן שיכות ל A); מערכת M_1: $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}$ עם $u=\xi_1^{(1)}$ ו $v=\xi_n^{(1)}$ שבה נקודה אחת מהנקודות $\xi_2^{(1)}, \dots, \xi_{n-1}^{(1)}$ שיכת ל $\bar{A}$ והשאר ל A; וכו'; מערכת M_k: $\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)}$ עם $u=\xi_1^{(k)}$ ו $v=\xi_n^{(k)}$ שבה K נקודות מבין n-1 נקודותיה $\xi_2^{(k)}, \dots, \xi_{n-1}^{(k)}$ שיכות ל $\bar{A}$ ושאר n-k-2 הנקודות מבין הנקודות האלה שיכות ל A; וכו'; עד M_{n-2}: $\xi_1^{(n-2)}, \dots, \xi_n^{(n-2)}$ עם $u=\xi_1^{(n-2)}$ ו $v=\xi_n^{(n-2)}$, שבה כל n-2 הנקודות $\xi_2^{(n-2)}, \dots, \xi_{n-1}^{(n-2)}$ שיכות ל $\bar{A}$. (מציאותן של המערכות המכסימליות מהסוגים השונים האלה היא תוצאה של העובדה ש $\Delta(u,z_2,\dots,z_{n-1},v)$ היא פונקציה חסומה ורציפה של המשתנים $z_2,\dots,z_{n-1}$ כאשר z-ים אלה משתנים על C ומשועבדים להגבלה ש k מהם משתנים על הקשת $\bar{A}$ ושאר n-k-2 – על A.) מהאמור לעיל יוצא שיש בדיוק מערכת מכסימלית אחת ויחידה M_k, $0\leqslant k\leqslant n-2$. נזכור עכשיו שאם הפסוק α של הקשת A מקים את התנאי $n\geqslant 2\pi/(2\pi-\alpha)$ אזי (ראה משפט I) כל מערכת-F מסדר n של A היא בהכרח מערכת מכסימלית מהסוג M_0 של C. על כן קים המשפט

III. יהא n מספר טבעי, $n\geqslant 2$, ותהא A קשת של מעגל היחידה C שפסוקה α מקים את התנאי: $n\geqslant 2\pi/(2\pi-\alpha)$ או $0<\alpha\leqslant 2\pi[(n-1)/n]$. אזי יש מערכת-F מסדר n אחת ויחידה השיכת ל A.

ח. מיחידות כל אחת מהמערכות המכסימליות M_k, $0\leqslant k\leqslant n-2$ נובעת העובדה שאם הקשת A היא סימטרית לגבי הציר הממשי של מישור ה z-ים זאת אומרת $v=\bar{u}$, אזי גם הנקודות של המערכות המכסימליות הן סימטריות לגבי הציר ההוא ועל כן המקדמים $c_\nu^{(k)}$ של הפולינומים

$$p_k(z) = \prod_{\nu=1}^{n}(z-\xi_\nu^{(k)}) = z^n + c_1^{(k)}z^{n-1}+\dots+c_{n-1}^{(k)}z+c_n^{(k)} \qquad (34)$$

הם כולם מספרים ממשיים המקימים את התנאים [9]

$$c_n^{(k)} = (-1)^{n-k};\quad c_\nu^{(k)} = (-1)^{n-k}c_{n-\nu}^{(k)},\quad 1\leqslant\nu\leqslant n-1. \qquad (35)$$

ומכיון שבמקרה $n\geqslant 2\pi/(2\pi-\alpha)$ המערכת המכסימלית M_0 אינה אלא מערכת-F מסדר n השיכת לקשת A, התנאי $v=\bar{u}$ גורר אחריו שבמקרה זה מערכת-F מסדר n של A גם היא סימטרית לגבי הציר הממשי של מישור ה z-ים ושמקדמי הפולינום המתאים, $c_1^{(0)}, \dots, c_n^{(0)}$ הם מספרים ממשיים המקימים את התנאים $c_n^{(0)} = (-1)^n$, $c_\nu^{(0)} = (-1)^n c_{n-\nu}^{(0)}$, $1\leqslant\nu\leqslant n-1$. התנאי הזה גם מבטיח בברור ש $\omega_1, \dots, \omega_{n-2}$ הם מספרים ממשיים ועל כן המשואה (25) ששרשיה $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ קובעים, כפי שראינו, את המערכות המכסימליות $M_0, \dots, M_{n-2}$ היא במקרה $v=\bar{u}$ משואה

9) לעובדה הכלולה במשואה (35) הפנה את תשומת לבי הפרופ' מ. פ ק ט ה. הוכחתה היא פשוטה.

אלגברית בעלת מקדמים ממשיים והשרשים הנ"ל גם הם כולם מספרים ממשיים (שונים זה מזה) לפי ההצגה:

$$(n-1)c_1^{(k)} = \lambda_k \qquad (36)$$

(ראה את ההצגה הראשונה במערכת (21)). כדאי עוד להעיר שאם נציב

$$u=e^{i\varphi},\ v=e^{-i\varphi},\ 2\varphi=\alpha$$

אז המספרים $\omega_1, \dots, \omega_{n-2}$ מקבלים את הצורה הפשוטה

$$\omega_\nu = (\sin(\nu+1)\varphi)/\sin\varphi,\ 1\leq\nu\leq n-2. \qquad (37)$$

ט. בשני הסעיפים האחרונים של עבודה זו אני מביא הערות משלימות השייכות בעקרן לפרופ׳ מ. פ ק ט ה.

במקרה הסימטריות ($v=\bar{u}$) רואים ת״ף שאת פתירתה של המשואה (25) אפשר להעמיד על פתירתן של שתי משואות אלגבריות אחרות ממעלה יותר נמוכה שמקדמיהן הם שוב פולינומים של המשתנים $\omega_1, \dots, \omega_{n-2}$. באמת, מההצגה (35) נובע, בשביל n זוגי ו k אי-זוגי, $\nu = n/2$, ש

$$2c_{n/2}^{(k)} = 0$$

מה שלפי (23) אקויולנטי להצגה

$$r_{n/2}(\lambda_k) = 0 \qquad (38)$$

בעוד שבמקרה ש n זוגי ו k זוגי, אותה הצגה (35) נותנת, בשביל $\nu=\frac{n}{2}-1$

$$c_{(n/2)-1}^{(k)} = c_{(n/2)+1}^{(k)}$$

או

$$r_{(n/2)-1}(\lambda_k) = r_{(n/2)+1}(\lambda_k) \qquad (39)$$

באופן דומה מקבלים, בתנאי ש n אי-זוגי ו k אי-זוגי (k זוגי),

$$r_{(n-1)/2}(\lambda_k) \mp r_{(n+1)/2}(\lambda_k) = 0 \qquad (40)$$

את חשוב הערכים λ_k הקובעים את המערכות M_k אפשר אפוא לבצע על ידי פתירתם של זוגות של משואות אלגבריות, ממעלה $[n/2]$ לכל היותר, בכל המקרים. במלים אחרות, הפולינום המהוה את האגף השמאלי במשואה (25) מתפרק בכל המקרים לשני גורמים פולינומיאליים.

י. ואולם שאלה מענינת ביותר היא השאלה הבאה: איזה שרש מבין n-1 שרשי המשואה (25) שיך למערכת M_0 (כלומר בתנאים הידועים לנו כבר למערכת-F מסדר n של הקשת A), איזה ל M_1 וכו׳, מבלי לבנות בעזרת השרשים ההם את כל n-1 הפולינומים $p(z)$ ומבלי לחשב את כל נקודות האפס שלהם? התשובה על שאלה זאת היא זו. די לסדר את השרשים של (25), במקרה שהקשת A נמצאת ימינה מהקשת $\bar{A}$, לפי גודל עולה; אזי הראשון הוא השיך ל M_0, השני הוא השיך ל M_1 וכו׳ והשרש הגדול ביותר, האחרון בסדרה ההיא, הוא השיך ל M_{n-2}. את העובדה הזאת גלה פרופ׳ מ. פ ק ט ה עוד בשנת 1938 וההוכחה המסתמכת על השנוי הרציף של המערכות M_k עם שנוי ה φ (או ה α) ועל יחידות המערכות האלה בשביל כל φ מסוים, $0<\varphi<\pi$, תתפרסם בהקדם האפשרי.

נספח לעבודתי "אכסיומות של המספרים הטבעיים"

ברוך גרמנסקי

בעבודתי הנזכרת (רבעון למתמטיקה 1, עמוד 13) הצעתי את מערכת האכסיומות הבאה, **המובאת** כאן בעקר בנסוח שנתן לה על ידי מר ק ו ר ט ב י נ ג (שם, עמוד 21).

מערכת האכסיומות Γ.

עצמים ראשוניים של Γ: קבוצה G, עצם 1, יחס דו-מקומי R.

G, 1 ו R מקימים את האכסיומות הבאות:

1. $1\in G$.
2. אם $1\in G$, אז יש אבר u של G בעל התכונות הבאות: $uR1$; $u\neq 1$; מן $yR1$ נובע $u=y$.
3. אם $x\in G$, $x\neq 1$, אז ישנם אברים u,v של G בעלי התכונות הבאות: uRx; vRx; $u\neq x$; $v\neq x$; $u\neq v$; מן yRx נובע: $u=y$ או $v=y$.
4. מן yRx נובע xRy (היחס R הוא יחס סימטרי).
5. אם A ו B הן קבוצות חלקיות לא-ריקות של G המקימות $G=B+A$, אז ישנם אברים x ו y של G כך שקים: $x\in A$; $y\in B$; yRx או xRy.

בעבודתו הנזכרת מוכיח מר ב י נ ג בין השאר את המשפט הבא:

"אם I היא קבוצה חלקית של G בעלת התכונות הבאות:
1. I אינה ריקה,
2. אם $x\in I$ ו yRx, אז $y\in I$,
- אז $G=I$."

אני מעיר עכשו שאם נמחק ממערכת האכסיומות Γ את האכסיומה האחרונה 5 ונצרף אליה את המשפט הזה של מר בינג בתור אכסיומה חדשה ("אכסיומה מוחלפת של אינדוקציה שלמה"), נקבל מערכת אכסיומות חדשה האקויולנטית למערכת האכסיומות Γ. היות ומר בינג הוכיח בעצם שממערכת האכסיומות החדשה נובעת ממערכת האכסיומות Γ, נשאר לנו רק להוכיח שמערכת האכסיומות Γ נובעת ממערכת האכסיומות החדשה. ולשם כך עלינו להוכיח שממערכת האכסיומות החדשה נובעת האכסיומה 5 של מערכת האכסיומות Γ בתור משפט.

די להוכיח את המשפט הבא על סמך מערכת האכסיומות החדשה:

אם A ו B הן קבוצות חלקיות של G' (G' בא במערכת האכסיומות החדשה במקום G) המקימות את התנאי $A+B=G'$ ואם בשביל כל זוג x,y של אברים של G' המקימים את התנאים $x\in A$ $y\in B$ אין קים yRx או xRy, ואם, למשל, הקבוצה A היא לא-ריקה, אזי הקבוצה B היא ריקה.

ההוכחה של המשפט הזה היא פשוטה מאד. נקח בתור הקבוצה I של האכסיומה המוחלפת של אינדוקציה שלמה את הקבוצה A. זה מוצדק כי 1. A היא לפי ההנחה לא-ריקה ו 2. אם $x\in A$ ו yRx, אזי גם $y\in A$. כי B איננו מכיל, לפי ההנחה, שום אבר y של G', באפן ש yRx או xRy. אבל היות ו A ו B יחד ממצים את כל האברים של G', מוכרחת הקבוצה A להכיל כל אבר y של G' הממלא את התנאי yRx או xRy. לכן נובע מהאכסיומה המוחלפת של אינדוקציה שלמה: $A=G'$. אבל B איננו יכול להכיל שום אבר של A. כי לכל אבר של G' ישנו אבר b של G' באפן ש bRa או aRb. זה נובע מהאכסיומות 2 ו 3. לכן B היא קבוצה ריקה.

אנו מנסחים בזה שוב את האכסיומה החמישית של מערכת האכסיומות החדשה:

5 (אכסיומה מוחלפת של אינדוקציה שלמה). אם I היא קבוצה חלקית של G' בעלת התכונות הבאות:

א. I אינה ריקה,

ב. אם $x\in I$ ו yRx, אזי $y\in I$,

- אז $I=G'$.

על כמה שאלות סגירה

שמואל שריבר

תהיינה נתונות שלש נקודות a_0, b_0, c_0 על קו ישר. תהי a_1 הנקודה הרביעית ההרמונית של a_0 לגבי b_0, c_0, כמו כן b_1 הנקודה הרביעית ההרמונית של b_0 לגבי c_0, a_0 ובאופן דומה נגדיר את c_1. מתוך השלישיה $a_0b_0c_0$ קבלנו בדרך זו שלישיה חדשה $a_1b_1c_1$ וטבעי לשאול שתי שאלות:

א) מהי השלישיה $a_2b_2c_2$, ובאופן כללי, לכל n טבעי, מהי השלישיה $a_nb_nc_n$? היינו, מהו התהליך הכללי לבנית השלישיות האלה?

ב) נתונות a_1, b_1, c_1, כיצד נמצא את a_0, b_0, c_0? במלים אחרות כיצד הופכים את התהליך הזה?

הפתרון האנליטי לשאלות אלה הוא מידי. ואמנם, מאחר שהתהליך הוא פרויקטיבי ומאחר שכל שלישיה של נקודות נפרדות בישר הפרויקטיבי אקויולנטית לכל שלישיה אחרת, לא נגביל את הכלליות אם נצא מהשלישיה הבאה $a_0=0, b_0=1, c_0=\infty$ ואז נקבל $a_1=2, b_1=-1, c_1=\frac{1}{2}$; אם נמשיך את החשבון לגבי שלישיה זו נקבל שוב $a_2=0, b_2=1, c_2=\infty$. מצאנו איפוא, אם נסמן את השלישיה שלנו בT_0, כי $T_0=T_2$. אותו דבר יהיה נכון לגבי כל שלישיה, ובמיוחד $T_1=T_3$, $T_2=T_4$ וכן הלאה. השלישיות $T_0=T_2=\ldots=T_{2n}$ מצד אחד ו $T_1=T_3=\ldots T_{2n+1}$ נמצאות ביחס אינבולוטורי. במקרה הכללי אנו מקבלים

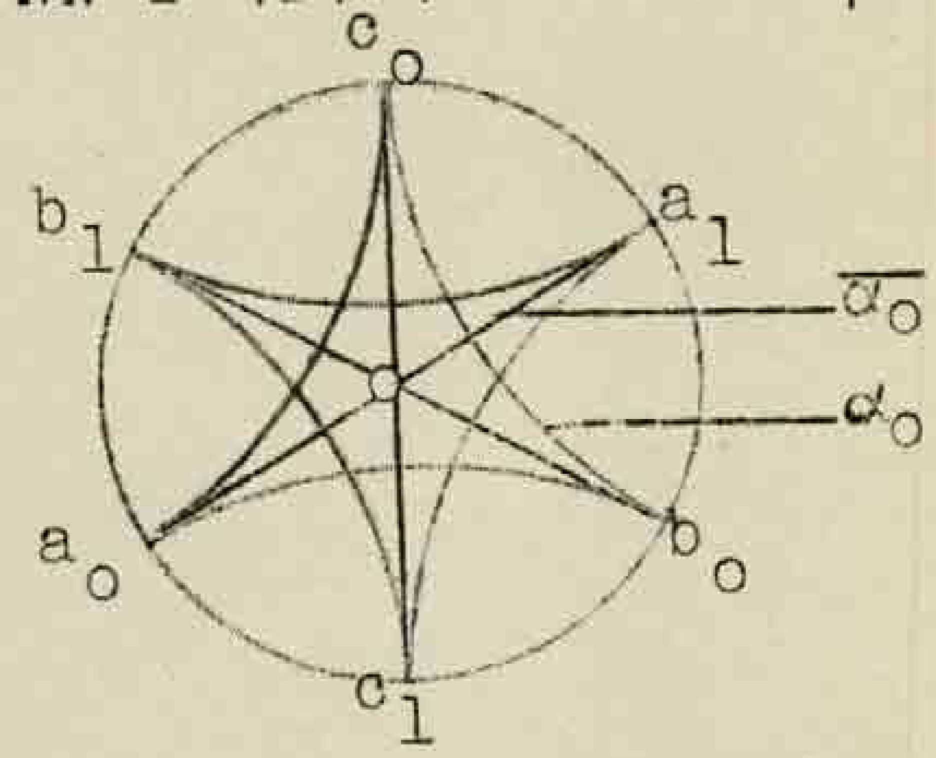
$$a_1=\frac{a_0(b_0+c_0)-2b_0c_0}{2a_0-(b_0+c_0)}$$

ובאופן דומה את b_1 ואת c_1.

את הנקודות $a_0b_0c_0$ נוכל להטיל מהישר הטלה סטריאוגרפית על שניונית בלתי מנוונת C שמישורה מכיל את הישר, ונקבל שלש נקודות $a_0'b_0'c_0'$. כדאי לראות מהן ההטלות של $a_1b_1c_1$ על אותה שניונית. נזכור שארבע נקודות שונות על שניונית מוטלות מכל נקודה אחרת עליה ביחס כפול קבוע, לכן יש מקום לדבר על הנקודה a_1', הרביעית ההרמונית של a_0' לגבי b_0', c_0' על השניונית, וזו תהיה, ממילא, ההטלה של a_1 עליה. תהי M הקוטב של $b_0'c_0'$ ותהי N הנקודה בה נפגשים $a_0'M, b_0'c_0'$ ותהי α הנקודה בה פוגש $a_0'M$ את השניונית; אזי, לפי הגדרת הקטביות, הנקודות $a_0'\alpha MN$ מהוות רביעיה הרמונית. את זו נוכל להטיל על השניונית מ b_0' ואז M תתן את b_0' עצמו (משיק!) ו N תתן את c_0', יוצא כי $a_0'\alpha, b_0'c_0'$ הן רביעיה הרמונית ולכן $a_1'=\alpha$. מכאן (נוותר על התגים): בכדי למצא את הרביעית ההרמונית של a_0 על השניונית לגבי b_0, c_0, עלינו לחבר את a_0 לקוטב $\overline{a_0}$ של הישר b_0c_0, ונקודת הפגישה של $a_0\overline{a_0}$ עם השניונית, a_1, היא הרביעית ההרמונית הדרושה.

נצייר לנו איפוא את השניונית C ועליה שלש נקודות $a_0b_0c_0$, נעביר בהן את המשיקים. שיפגשו ב $\overline{a_0}, \overline{b_0}, \overline{c_0}$ ונעביר את הישרים $a_0a_1\overline{a_0}, b_0b_1\overline{b_0}, c_0c_1\overline{c_0}$. לפנינו מקרה מנוון של משפט בריאנשון, ושלשת הישרים יפגשו איפוא בנקודה אחת O. הישרים b_0c_0 ו $\overline{b_0c_0}$ יפגשו בנקודה a^* שהיא הקוטב של $a_0\overline{a_0}$ מאחר ש b_0c_0 קטבי ל $\overline{a_0}$ ו $\overline{b_0c_0}$ הוא המשיק ב a_0. קיימת הומולוגיה של המישור, בעלת המרכז a^* והציר $a_0\overline{a_0}$, השומרת על השניונית. הומולוגיה זו מחליפה את b_0 ואת c_0 ביניהן, אך שומרת על O שהיא נקודה על הציר, לכן היא מחליפה ביניהם את הישרים b_0O ו c_0O ואת b_1 ב c_1, ומכאן שהישר b_1c_1 עובר אף הוא את a^*; יוצא ש b_1, c_1 מפרידות באופן הרמוני את a_1, a_0 או במלים

אחרות a_0 היא הרביעית ההרמונית של a_1 לגבי b_1 ו c_1, והוא הדבר שהוכחנו קודם באופן אנליטי. (ד"ר ת. מוצקין העיר שאת שש הנקודות $a_0b_0c_0a_1b_1c_1$ על השניונית אפשר תמיד להעביר באופן פרויקטיבי לקדקדי משושה משוכלל החסום במעגל.) את מה שהוכחנו לעיל בדרך אנליטית ופרויקטיבית אפשר גם להוכיח באופן הבא בדרך אנלגמטית, המצטיינת במוחשיות. את הנקודה הרביעית ההרמונית אפשר לבנות בעזרת מעגלים נצבים כדלקמן: תהיינה a_0,b_0,c_0 שלש נקודות על הישר l, יהי α_0 המעגל הנצב ל l העובר דרך b_0c_0 ויהי $\bar{\alpha}_0$ המעגל דרך a_0 הנצב ל l ול α_0, אזי $\bar{\alpha}_0$ פוגש את l גם בנקודה a_1 שהיא הרביעית ההרמונית של a_0 ביחס ל b_0,c_0. נבנה איפוא את המעגלים $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$, את המעגלים $\bar{\alpha}_0,\bar{\beta}_0,\bar{\gamma}_0$ ואת הנקודות a_1,b_1,c_1. באופן דומה נבנה את המעגלים $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ ובכדי להוכיח את ההדדיות עלינו להראות שהמעגל דרך a_1 הנצב ל l ול α_1 עובר גם דרך a_0, ז.א. מתלכד עם $\bar{\alpha}_0$. לשם כך נעשה השתקפות במעגל $\bar{\alpha}_0$. כאן b_0 מתחלפת עם c_0 ו a_0 נשמרת, ולכן γ_0 מתחלף עם β_0; הזויות נשמרות, לכן $\bar{\gamma}_0$ מתחלף עם $\bar{\beta}_0$ ולכן גם c_1 מתחלפת עם b_1, ומכאן שכל מעגל דרך b_1,c_1 ובמיוחד α_1, נצב ל $\bar{\alpha}_0$, מה שהיה להוכיח. יתר על כן, $\bar{\gamma}_0$ ו $\bar{\beta}_0$, מכיוון שהם מתחלפים ביניהם ע"י שיקוף ב $\bar{\alpha}_0$, פוגשים אותו בשתי נקודות OO' ויוצרים אתו זויות שוות, שמטעמי סימטריה הן שוות ל60^0.



אם נעשה אינברסיה בעלת המרכז O', נקבל את התצורה הבאה.

שאלות מעין זו שטפלנו בה בישר אפשר לשאול גם במישור, ביחס ל4 אלמנטים. נעסוק לראשונה בהרחבה פרויקטיבית של השאלה, שהיא נוחה יותר לגישה.

נזכיר את מושג ההרמוניקלה לפי צ'יבה: יהי נתון משולש $b_0c_0d_0$ ונקודה a_0 שאינה על אף אחת מצלעותיו. נסמן את נקודת הפגישה של a_0b_0 עם c_0d_0 ב b_0' ותהי b_0'' הרביעית ההרמונית של b_0' לגבי c_0,d_0; באופן דומה נבנה את c_0'' ואת d_0''. שלש הנקודות $b_0''c_0''d_0''$ נמצאות על ישר אחד α_0 שהוא נקרא <u>ההרמוניקלה</u> של a_0 לגבי המשולש $b_0c_0d_0$ וכמו כן a_0 היא הקוטב ההרמוני של α_0 לגבי המשולש הזה. ובכן: נתונות במישור 4 נקודות שאף 3 מהן אינן חלות באותו ישר, ונקרא להן $a_0b_0c_0d_0$. נבנה את α_0 שהוא ההרמוניקלה של a_0 לגבי $b_0c_0d_0$, ובאופן דומה את $\beta_0,\gamma_0,\delta_0$. נמשיך לבנות את a_1 שהיא הקוטב ההרמוני של α_0 לגבי המשולש בעל <u>הצלעות</u> $\beta_0,\gamma_0,\delta_0$, וכן את b_1,c_1,d_1. נסמן בדרך כלל רביעית נקודות ב Q ורביעית ישרים ב R. אנו בונים את הרביעיות: $Q_0,R_0\cdots Q_n,R_n$. וכאן טבעי לשאול לדרך כללית להמשכת התהליך וגם להיפוכו, לאמור: נתונה R_0 (רביעית הישרים), בנה את Q_0 ובאופן דואלי, נתונה Q_1, בנה את R_0. נוכל כעת שוב להפיק תועלת מהעובדה שכל הרביעיות הבלתי תלויות של נקודות או ישרים במישור הן אקויולנטיות, ולכן נוכל לצאת מרביעית נקודות Q_0 הנוחה לחשבון ולעקוב אחר התהליך באופן אנליטי. נבחר (לפי הצעת ד"ר מוצקין) את Q_0 באופן הבא:

$a_0=(-1,0)$, $b_0=(+1,0)$, $d_0=(0,-1)$, $c_0=(0,+1)$,

ואז יתן לנו החשבון

$b_0'=(0,0)$, $b_0''=(0,\infty)$, $c_0'=(+\frac{1}{0},+\frac{1}{0})$, $c_0''=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ $\wedge$ $\alpha_0\equiv x=\frac{1}{2}$

ומטעמי סימטריה $\delta_0\equiv y=\frac{1}{2}$, $\gamma_0\equiv y=-\frac{1}{2}$, $\beta_0\equiv x=-\frac{1}{2}$. כעת

$\gamma_0''\equiv x-y+1=0$, $\gamma_0'\equiv x+y=0$, $\beta_0''\equiv y=0$, $\beta_0'\equiv(\infty)$ ומכאן יוצא $a_1=(-1,0)=a_0$.

באותו אופן $b_1=b_0$, $c_1=c_0$, $d_1=d_0$ ובד"כ $R_0=R_n$, $Q_0=Q_n$. בזאת נפתרה השאלה הפרויקטיבית שהעמדנו לנו במישור, ונעבור להרחבה בכיוון אחר של השאלה המקורית על השלישיות.

תהי נתונה על הישר אינבולוציה $I_1 \equiv (x-b)(y-c)+(x-c)(y-b)=0$ ולה נקודות השבת הניתנות ע"י המשואה $(z-b)(z-c)=0$. אם $b \neq c$ האינבולוציה נקראת בלתי מנוונת. לעומת זאת $I_0 \equiv (x-a)(y-a)=0$ הוא אינבולוציה מנוונת, ונקודות השבת שלה ניתנות ע"י $(z-a)^2=0$. אם נחפש את הצירוף הליניארי $\lambda_0 I_0+\lambda_1 I_1$ הנותן שוב אינבולוציה מנוונת, נקבל $(x-a')(y-a')=0$ באשר a,a' מפרידים בצורה הרמונית את b,c. את מציאת הנקודה הרביעית ההרמונית נוכל איפוא לפרש בתור צירוף ליניארי של אינבולוציה מנוונת עם אינבולוציה בלתי מנוונת, בצורה כזו שהתוצאה תהיה אינבולוציה מנוונת, ומוצדק לקרא לאינבולוציה המנוונת השניה תמונתה של הראשונה לגבי הבלתי מנוונת. באפן דומה נוכל לעשות במישור האויקלידי: מהמעגל הבלתי מנוון $(\underline{z-p})^2 - r^2 = 0$ והמעגל המנוון $(\underline{z-q})^2=0$ נעשה צרוף ליניארי מנוון; זה יתן לנו את $(\underline{z-q_1})^2=0$ באשר $\underline{q}_1$ תהיה הנקודה המשוקפת של $\underline{q}$ במעגל $\underline{p},r$.

תהיינה נתונות 4 נקודות $a_0b_0c_0d_0$ במישור האויקלידי או הקונפורמי, בצורה כזו שלא תמצאנה ארבעתן על אותו מעגל. דרך $b_0c_0d_0$ נעביר את המעגל α_0 וכאשר נשקף בו את a_0 נקבל את הנקודה a_1. באופן אנלוגי נקבל את b_1,c_1,d_1. מן הרביעיה Q_0 הגענו איפוא לרביעיה חדשה Q_1. וכאן אנו מגיעים לבעיה שהציג ד"ר מוצקין ברבעון למתימטיקה, כרך א׳, עמ׳ 60: א) מה תהיה הצורה הכללית של Q_n? ב) האם נחזור פעם לרביעיה Q_n המתלכדת עם Q_0? ג) נתונה Q_1, איך נמצא את Q_0 או, במלים אחרות, איך הופכים את התהליך? שאלה זו קשה הרבה יותר מהקודמות, בראש וראשונה משום כך שכאן לא כל הרביעיות אקויולנטיות. ואמנם, טרנספורמציה פרויקטיבית כללית תעביר את הרביעיה שלנו לרביעיה כללית אחרת, אך היא גם תשנה את הנקודות המעגליות של המישור. נוכל גם לראות את הרביעיה שלנו בתור ארבע נקודות במישור של גאוס (לאמר, בישר הפרויקטיבי המרוכב) ואז הנחתנו שדרשה שלא תמצאנה ארבעתן על אותו מעגל נותנת בהכרח שהיחס הכפול שלהן (בתור מספרים מרוכבים) יהיה מרוכב. ע"י טרנספורמציה ליניארית תעבורנה ל4 נקודות בעלות אותו יחס כפול $p+iq$ כך שיש לנו ∞^2 רביעיות שונות באופן קונפורמי אם נספור פרמטרים ממשיים.- בכדי לעמוד קצת על הקושי של היפוך התהליך נציג לשם הדגמה את השאלה הבאה, הפשוטה יותר: נתונות (בסימון לעיל) a_0,b_1,c_1,d_1, למצא את b_0,c_0,d_0. נוכל כאןע"י טרנספורמציה לשלוח את a_0 ל ∞ ואז המעגלים דרכה יהפכו לישרים, ולשאלה שלנו יהיה המובן הבא: נתון המשולש $b_1c_1d_1$ המתקבל מהמשולש $b_0c_0d_0$ ע"י שיקוף כל קדקד בצלע שממולו, למצא את המשולש המקורי. שאלה זו מופיעה בספרות (V.d. Waerden, Math. Ann. 1934) ומובילה למשואה ממעלה ששית. לעשות את הדבר עוד יותר פשוט, נתונות $a_0b_0c_1d_1$ ועלינו למצא את c_0d_0; שיקפנו במשולש $b_0c_0d_0$ את הקדקדים c_0d_0 בצלעות שממולן וקבלנו את c_1,d_1, עלינו לחזור לc_0,d_0. וכאן אנו רואים מיד שהתשובה היא תלת ערכית, כי למעשה עלינו לחלק לשלש את הזוית $d_1b_0c_1$ ולשקף את c_1 ואת d_1 בטריסקטריסות, אך נקבל תשובות נכונות גם אם לכל אחת מהזויות החלקיות נוסיף $\frac{2\pi}{3}$ או $\frac{4\pi}{3}$.

בכדי להקל על הניסוח האנליטי של השאלה שלפנינו עשה ד"ר מוצקין את הסטנדרדיזציה הבאה: את 4 הנקודות $a_0b_0c_0d_0$ אנו מעבירים (מה שתמיד אפשרי) לקדקדים של מקבילית ועי"כ בחירה מתאימה של הצירים ושל קנה המדה נוכל להעביר אותן לנקודות $z_0,-z_0,\frac{1}{z_0},-\frac{1}{z_0}$, באשר z_0 מספר מרוכב שערכו המחלט שונה מיחידה; ואז, מטעמי סימטריה, תהיה הרביעיה החדשה אף היא מהצורה $z_1,-z_1,\frac{1}{z_1},-\frac{1}{z_1}$. אם נשים $z_0=\rho e^{i\varphi}$ יתן לנו החשבון

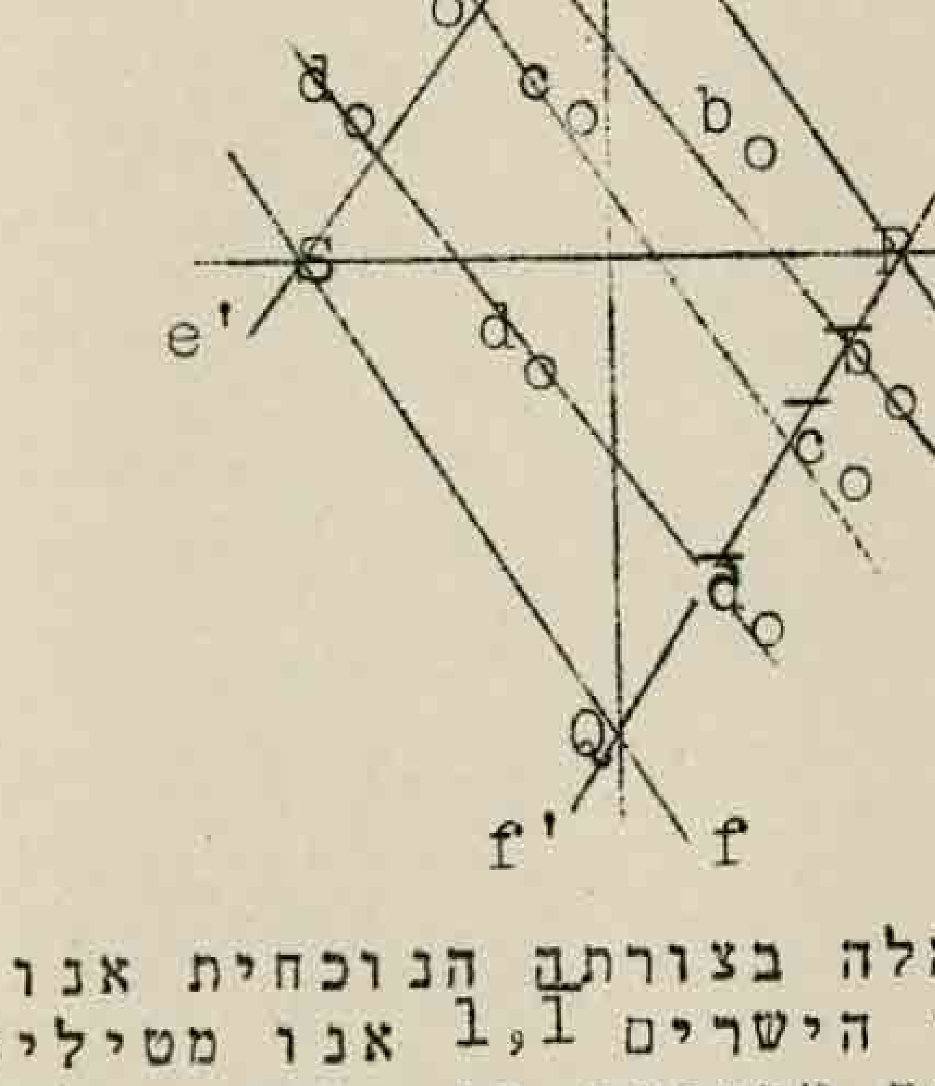
$$z_1= \rho e^{i\varphi}\frac{2-\rho^4-e^{4i\varphi}}{\rho^4+e^{4i\varphi}-2\rho^4 e^{4i\varphi}}.$$

מנוסחה זו אנו למדים, למשל, שאם $z_0=3^{\frac{1}{4}}\cdot e^{i\pi/4}$ (המקבילית היא אז מעוין בעל זויות $\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}$) אז $z_1=-z_1=0$, $\frac{1}{z_1}=\frac{-1}{z_1}=\infty$, ותמונת המקבילית מתנוונת.

כמו כן, אם z_0 נמצא עלהעקומה $\sin^2 2\varphi = \dfrac{(\rho^4-1)^2}{8\rho^6+6\rho^4+8\rho^2}$, אזי z_1 ימצא על מעגל היחידה כלומר המקור של מעגל היחידה במעבר $z_0 \to z_1$ איננו חד-ערכי. השאלה בצורתה הכללית מחכה עדיין לפתרונה.

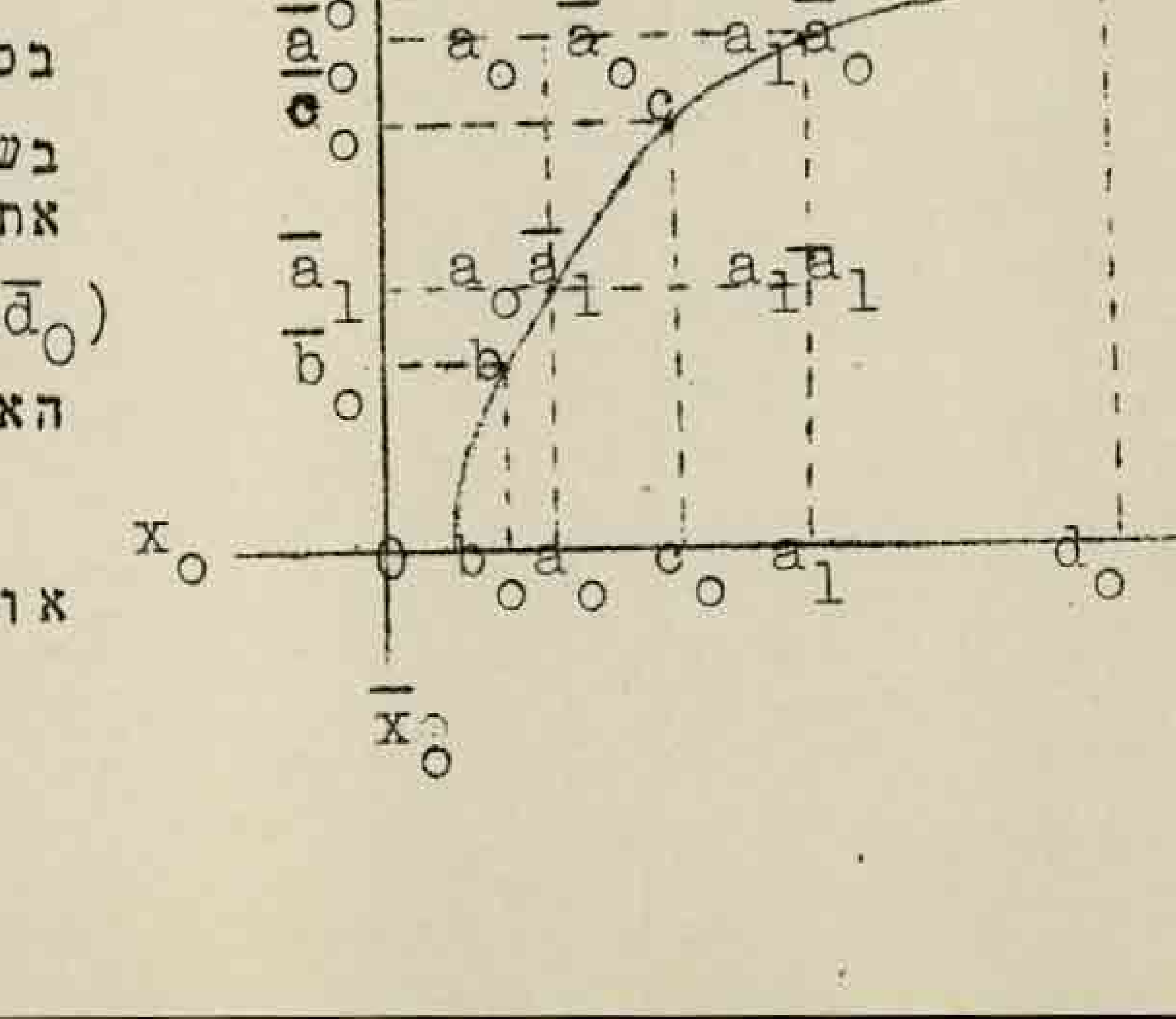
ונכנס לבסוף שאלה במרחב של 3 ממדים: יהיו נתונים 4 ישרים $a_0b_0c_0d_0$ שאינם נחתכים ואינם נמצאים על מעטפת אותה השניונית. דרך $b_0c_0d_0$ נעביר את השניונית α_0 ולישר הקטבי ל a_0 ביחס ל α_0 נקרא a_1. באופן אנלוגי נבנה את b_1, c_1, d_1 והרי לפנינו 4 ישרים חדשים. נקרא לרביעיה הראשונה R_0 ולשניה R_1 ונשאל, כמו קודם, להמשך התהליך, לאפשרות של סגירה ולאפשרות של היפוך. לכאורה אין בין שאלה זו ושאלתו של ד"ר מוצקין ולא כלום, פרט למספר 4.

נזכור נא כיצד בונים את הישר הקטבי לישר נתון ביחס לשניונית נתונה. הישר a_0 יפגוש את השניונית α_0 בשתי הנקודות P,Q. דרך P עוברים היוצרים e,e' באשר e הוא ממשפחת b_0,c_0,d_0 ו e' מהמשפחה השניה, ודרך Q היוצרים f,f' כנ"ל. e ו f' נפגשים בנקודה R וכמו כן e' ו f בנקודה S, ואז $a_1 = RS$. אנו רואים ראשית כל ש $a_0b_0c_0d_0$ וגם a_1 (ולכן גם b_1, c_1, d_1) פוגשים את שני הישרים f', e'. כל הישרים מן הרביעיה החדשה R_1 והבאות אחריה יפגשו כולם את שני הישרים e', f', ז.א. ישתיכו לקונגרואנציה ליניארית בעלת ישרי המוקד e', f'. - ידוע לנו כעת ש4 יוצרים מאותה המעטפה של שניונית פוגשים כל יוצר אחר ביחס כפול קבוע. ננהיג מערכת שיעורים x על e' ומערכת שיעורים $\bar{x}$ על f' כך שכל ישר מהקונגרואנציה יתן ע"י זוג ערכים $x, \bar{x}$.



מן הציור: $(S, b_0\ c_0\ d_0) = (Q, \bar{b}_0\bar{c}_0\bar{d}_0)$ ולכן $(a_1b_0c_0d_0) = (\bar{a}_0\bar{b}_0\bar{c}_0\bar{d}_0)$ כמו כן $(R\bar{b}_0\bar{c}_0\bar{d}_0) = (Pb_0c_0d_0)$ ולכן $(\bar{a}_1\bar{b}_0\bar{c}_0\bar{d}_0) = (a_0b_0c_0d_0)$. מכאן שאנו יכולים להעביר את השאלה ל4 זוגות של נקודות $x, \bar{x}$ על שני ישרים $1, \bar{1}$. אנו מניחים $(a_0b_0c_0d_0) \neq (\bar{a}_0\bar{b}_0\bar{c}_0\bar{d}_0)$ (ולא, הישר a_0 בשאלה המקורית היה נמצא על אותה מעטפה עם $b_0c_0d_0$) ואז, כפי שראינו, הזוג $a_1\bar{a}_1$ ניתן באופן חד-ערכי ע"י שתי המשואות לעיל.

את השאלה בצורתה הנוכחית אנו יכולים למלא תוכן מוחשי אחר בצורה הבאה: את שני הישרים $1, \bar{1}$ אנו מטילים על מישור Π ורואים אותם בתור צירי מערכת שיעורים אפינית או נצבת. לישר הכללי של הקונגרואנציה התאמנו קודם את זוג השיעורים $x, \bar{x}$ שהוא קובע על שני ישרי המוקד; כעת נתאים לזוג השיעורים $x, \bar{x}$ את הנקודה במישור Π אשר השיעורים האפיניים או הנצבים שלה הם $x, \bar{x}$. ההנחה $(a_0b_0c_0d_0) \neq (\bar{a}_0\bar{b}_0\bar{c}_0\bar{d}_0)$ פירושה כעת שאת 4 הנקודות במישור $(a_0, \bar{a}_0), (b_0, \bar{b}_0), (c_0, \bar{c}_0), (d_0, \bar{d}_0)$ אין רואים באותו יחס כפול מנקודת הא"ס של ציר ה x ומנקודת הא"ס של ציר ה $\bar{x}$, או, לפי משפט ידוע, שארבע הנקודות ושתי נקודות הא"ס של הצירים אינן נמצאות על אותו קו ממעלה שניה.



בכדי לבנות את הנקודה $(a_1\bar{a}_1)$ נשתמש בשתי המשואות לעיל. נבנה לראשונה את השניונית α_0 המכילה את $(b_0, \bar{b}_0), (c_0, \bar{c}_0), (d_0, \bar{d}_0)$ ואת שתי נקודות הא"ס של הצירים. המשואה

$$(a_1b_0c_0d_0) = (\bar{a}_0\bar{b}_0\bar{c}_0\bar{d}_0)$$

אומרת לנו שהנקודה $(a_1, \bar{a}_0)$ נמצאת על

השניונית. אם כן: אנו מטילים את $(a_0\overline{a_0})$ על השניונית מ $x=\infty$ ומעבירים ישר בין ההטלה ובין $\overline{x}=\infty$; כמו כן אנו מטילים את $(a_0\overline{a_0})$ על השניונית מ $x=\infty$ ומעבירים ישר בין ההטלה ובין $x=\infty$. שני הישרים האלה יפגשו בנקודה $(a_1\overline{a_1})$, תמונתה של $(a_0\overline{a_0})$.

אולם כעת אנו יכולים לעשות במישור II מעבר פרויקטיבי ולהעביר את שתי נקודות הא"ס של הצירים לשתי הנקודות המעגליות של המישור. אז השניונית α_0 תהיה למעגל, והתהליך שתיארנו אותו כרגע לא יהיה אחר מאשר שיקוף הנקודה $(a_0\overline{a_0})$ במעגל α_0, כפי שקל מאד להוכח. בזאת בנינו התאמה חד-חד ערכית ואיזומורפית בין השאלה על 4 ישרים במרחב לבין שאלת ד"ר מוצקין על 4 נקודות במישור הקונפורמי והוכחנו את האקויולנציה ביניהן.

עוד גורמים חדשים של מספרי פבונצ׳י

אלכסנדר כץ

בהמשך ל"גורמים חדשים של מספרי פבונצ׳י" (רבעון למתמטיקה 2 (1947-8), 35) מאת דב ירדן ואלכסנדר כץ, יהיה:

$U_{117}=2.233.\underline{29717}.135721.\underline{673024656781}$ $\qquad V_{73}=\underline{151549}.\underline{11899937029}$

$V_{108}=2.7.23.\underline{6263}.103681.\underline{177962167367}$ $\qquad V_{109}=\underline{128621}.(\underline{468102440577163981})$

$V_{128}=\underline{119809}.(\underline{469816763452337987 5583})$

הגורמים הראשוניים של המחלק עלום-הפרוק של U_n גדולים מ 200000, כאשר
n= 79,83, 89, 91, 93,97,101,103,107,109,111,113,115,119,121,123,125,127
מספר המחלקים הראשוניים מהצורות הלינאריות המתאימות עד 200000 הוא בהתאמה
109,96,101,115,157,92, 94, 83, 86, 91,127, 81,101, 91, 87,110, 87, 75

הגורמים הראשוניים של המחלק עלום-הפרוק של V_n גדולים מ 200000, כאשר
n= 74, 76, 79, 83, 86, 88, 89, 91, 92,94, 96,97, 98,100,101,103,104,
106,107,109,110,112,113,116,117,118,119,121,122,123,124,126,127,128
מספר המחלקים הראשוניים מהצורות הלינאריות המתאימות עד 200000 הוא בהתאמה
256,259,113,100,105,230,104,120,206,99,266,96,105,222, 88, 83,202,
84, 85, 82,101,178, 86,169,120, 75, 93, 71, 83,124,153,129, 72,142

מספר המחלקים הראשוניים מהצורות הלינאריות המתאימות עד השרש הרבועי של
$673024656781=820380^2+1312381$ (מחלק של U_{117}) הוא 435; ושל
$177962167367=421855^2+526342$ (מחלק של V_{108}) הוא 505.

הצורות הלינאריות נקבעו בהתאם ללוחות הצורות הנתונים במאמר של דב ירדן, על פרוק מספרי פבונצ׳י, רבעון למתמטיקה 2 (1947-8), 61-62.
השתמשתי בעקר בלוח המספרים הראשוניים עד 200000 הנתון בספרו של L. Poletti, Tavole dei numeri primi, 1920. את החלוקות בצעתי בעזרת 3 מכונות-חשבון (אחת חשמלית) שפעלו באפן משלים אחת לשניה.

בסכום העובדות מלוח זה ומ"גורמים חדשים של מספרי פבונצ׳י" הנ"ל נוכל לומר:

הגורמים הראשוניים של המחלק עלום-הפרוק של U_n ו V_n עד n=128 בכלל גדולים מ 200000. בסך הכל יש עד מקום זה 52 מחלקים עלומי-פרוק, שציוניהם נתנו למעלה.

סדרות דסיונקטיביות

דב ירדן

בשם ס ד ר ה ד ס י ו נ ק ט י ב י ת נקרא לסדרה של מספרים שלמים שכל שנים מהם זרים ביניהם. בשם כפולת-d של סדרה דסיונקטיבית נקרא לסדרה הנהפכת לדסיונקטיבית לאחר שמחלקים כל אחד מאבריה ב d. להלן נתן שתי שיטות לבנית סדרות דסיונקטיביות ונחקור תכונות של סדרות אלו.

(א) <u>שיטה ראשונה</u>.

<u>משפט 1</u>. הסדרה

$$x_1,\ x_2=f_1(x_1),\ x_3=f_2(x_2),\dots,\ x_{n+1}=f_n(x_n),\dots, \qquad (1)$$

שבה x_1 הוא מספר שלם, $f_n(x)$ הוא פולינום במקדמים שלמים (היכול להיות תלוי גם ב n), באבר חפשי $c_n\neq0$ כך ש $(x_1,c_n)=(x_2,c_n)=\dots=(x_n,c_n)=d$ ו $f_n(c_{n-1})=c_n$ לכל $n\geq2$, או $f_n(c_{n-1})=f_n(-c_{n-1})=-c_n$ לכל $n\geq2$, היא כפולת-d של סדרה דסיונקטיבית.

<u>הוכחה</u>. מתוך ההגדרה נובע כי $x_{n+1}=f_n(x_n)\equiv c_n \pmod{x_n}$ ומכאן $x_{n+2}=f_{n+1}(x_{n+1})=f_{n+1}(f_n(x_n))\equiv f_{n+1}(c_n)=\pm c_{n+1} \pmod{x_n}$.
אם $x_{n+k}\equiv\pm c_{n+k-1} \pmod{x_n}$, יהיה גם

$$x_{n+k+1}=f_{n+k}(x_{n+k})\equiv f_{n+k}(\pm c_{n+k-1})\equiv\pm c_{n+k} \pmod{x_n}.$$

מ $x_{n+1}\equiv c_n \pmod{x_n}$ יוצא כי גדל המחלקים המשותפים של כל שני אברים תכופים הוא d. מ $x_{n+k+1}\equiv\pm c_{n+k} \pmod{x_n}$ יוצא כי גם גדל המחלקים המשותפים של כל שני אברים בלתי תכופים הוא d.

<u>משפט 2</u>. הסדרה (1), שבה x_1 הוא מספר שלם, $f_n(x)$ הוא פולינום במקדמים שלמים (היכול להיות תלוי גם ב n), באבר חפשי ק ב ו ע $c\neq0$ כך ש x_1 ואחד המקדמים זרים ל c והמקדמים האחרים מתחלקים ב c, וכך ש $f_n(c)=c$ לכל $n\geq2$, או $f_n(c)=f_n(-c)=-c$ לכל $n\geq2$, היא סדרה דסיונקטיבית.

<u>הוכחה</u>. באנדוקציה לפי n מוכח $(x_{n+1},c)=(f_n(x_n),c)=1$ לכל n. משפטנו יוצא אפוא ממשפט 1.

<u>משפט 3</u>. הסדרה (1), שבה x_1 הוא מספר שלם, $f_n(x)$ הוא פולינום במקדמים שלמים (היכול להיות תלוי גם ב n), שסכום מקדמיו וכן אברו החפשי שוים 1, או $f_n(x)$ הוא פולינום ז ו ג י במקדמים שלמים (היכול להיות תלוי גם ב n), שסכום מקדמיו וכן אברו החפשי שוים -1, היא סדרה דסיונקטיבית.

<u>הוכחה</u>. בתנאי המשפט קים $f_n(1)=1$, או $f_n(\pm1)=-1$, לכל $n\geq2$. משפטנו יוצא אפוא ממשפט 2.

<u>משפט 4</u>[1]. הסדרה

$$x_1,\ x_2=f(x_1),\ x_3=f(x_2),\dots,\ x_{n+1}=f(x_n),\dots, \qquad (2)$$

שבה x_1 הוא מספר שלם, $f(x)$ הוא פולינום במקדמים שלמים, באבר חפשי קבוע $c\neq0$ כך ש $(x_1,c)=1$ וכך ש $(f(x),c)=1$ כל אימת ש $(x,c)=1$, היא סדרה דסיונקטיבית.

<u>הוכחה</u>. באנדוקציה לפי n מוכח כי $(x_n,c)=1$ לכל n. כן נקבל, בגלל $f(x_{n+1})=f(f(x_n))$ ובגלל שויון האברים החפשיים ב $f(x_{n+1})$ וב $f(x_n)$ כי $c=f(0)=f(f(0))=f(c)$. המשפט יוצא אפוא ממשפט 1.

---

1) Richard Bellman, A note on relatively prime sequences, Bull. Amer. Math. Soc. 53(1947), 778-779.

משפט 5. הסדרה

$$x_1,\ x_2=x_1^2-2c,\ x_3=x_2^2-2c^2,\ x_4=x_3^2-c^4,\dots,\ x_{n+1}=x_n^2-2c^{2^{n-1}},\dots \qquad (3)$$

שבה x_1 ו c הם מספרים טבעיים זרים ביניהם, או סדרת חצאי אבריה, היא סדרה דסיונקטיבית, בהתאם לכך אם x_1 הוא מספר אי-זוגי או זוגי.

<u>הוכחה</u>. מן ההנחה $(x_1,c)=1$ יוצא $(x_n,c)=1$, לכל n. מלבד זה קים:

$(-2c^{2^{n-1}})^2-2c^{2^{n-1}}=2c^{2^{n-1}}$. משפטנו יוצא אפוא ממשפט 1.

בפרט, כאשר $c=1$, נקבל ממשפט 5:

<u>משפט 6</u>. הסדרה

$$x_1,\ x_2=x_1^2-2,\ x_3=x_2^2-2,\ x_4=x_3^2-2,\dots,\ x_{n+1}=x_n^2-2,\dots \qquad (4)$$

שבה x_1 הוא מספר טבעי, או סדרת חצאי אבריה, היא סדרה דסיונקטיבית, בהתאם לכך אם x_1 הוא מספר אי-זוגי או זוגי.

בפרט, כאשר $x_1=3$, נקבל ממשפט 6:

<u>משפט 7</u>. הסדרה

$$x_1=3,\ x_2=7,\ x_3=47,\ x_4=2207,\ x_5=4870847,\ x_{n+1}=x_n^2-2,\dots \qquad (5)$$

היא סדרה דסיונקטיבית.

וכאשר $x_1=4$, נקבל ממשפט 6:

<u>משפט 8</u>. סדרת חצאי האברים של הסדרה

$$x_1=4,\ x_2=14,\ x_3=194,\ x_4=37634,\dots,\ x_{n+1}=x_n^2-2,\dots \qquad (6)$$

היא סדרה דסיונקטיבית.

כאשר $x_1=a+b$, $c=ab$, נקבל ממשפט 5:

<u>משפט 9</u>. הסדרה

$$x_1=a+b,\ x_2=a^2+b^2,\ x_3=a^4+b^4,\ x_4=a^8+b^8,\dots,\ x_{n+1}=a^{2^n}+b^{2^n},\dots \qquad (7)$$

שבה a ו b הם מספרים טבעיים זרים ביניהם, או סדרת חצאי אבריה, היא סדרה דסיונקטיבית, בהתאם לכך אם רק אחד מן המספרים a ו b הוא אי-זוגי או שניהם אי-זוגיים.

בפרט, כאשר $b=1$, $a=2$, נקבל ממשפט 9 (וכן ממשפט 4):

<u>משפט 10</u> (גולדבך, 1729). סדרת מספרי פרמה

$$x_1=3,\ x_2=5,\ x_3=17,\ x_4=257,\dots,\ x_{n+1}=2^{2^n}+1,\dots \qquad (8)$$

היא סדרה דסיונקטיבית.

(ב) <u>יחס סדרות דסיונקטיביות הבנויות בשיטה הראשונה לסדרות-נסיגה מסדר 2</u>.

<u>משפט 11</u>. הסדרה (4) היא סדרה חלקית של סדרת-הנסיגה מסדר 2

$$v_0=2,\ v_1=x_1,\ v_2=x_1^2-2,\dots,\ v_n=x_1v_{n-1}-v_{n-2},\dots \qquad (9)$$

ודהינו קים $x_n=v_{2^{n-1}}$.

<u>הוכחה</u>. באנדוקציה לפי k ו $k+1$ קל לבדוק כי קים $v_kv_1=v_{k+1}+v_{k-1}$.
מכאן, כאשר $k=1$, $v_{2k}=v_k^2-2$ ובפרט $v_{2^n}=v_{2^{n-1}}^2-2$.

<u>הערה</u>. משפט 11 מראה כי "זנב" סדרה (4) מופיע באין-סוף סדרות-נסיגה (9) שונות. מלבד זה קים עוד לגבי הסדרה (5) המשפט הבא:

<u>משפט 12</u>. הסדרה (5) היא סדרה חלקית של סדרת-הנסיגה מסדר 2 הצמודה לסדרת <u>פבונצ'י</u>

(10) $$V_0=2,\ V_1=1,\ V_2=3,\dots,\ V_n=V_{n-1}+V_{n-2},\dots$$
ודהינו קים $x_n=V_{2^n}$.

<u>משפט 13</u>. הסדרה (7) היא סדרה חלקית של סדרת-הנסיגה מסדר 2

(11) $$S_0=2,\ S_1=a+b,\ S_2=a^2+b^2,\ S_3=a^3+b^3,\dots,\ S_n=(a+b)S_{n-1}-abS_{n-2},\dots$$
ודהינו קים $x_n=S_{2^{n-1}}$.

<u>הוכחה</u>. באנדוקציה לפי n בודקים את קיום הנוסחה $S_n=(a+b)S_{n-1}-abS_{n-2}$

(ג) <u>שיטה שניה</u>.

<u>משפט 14</u>. הסדרה

(12) $$x_1,\ x_2=A_1+B_1,\ x_3=A_2+B_2,\dots,\ x_{n+1}=A_n+B_n,\dots,$$
שבה x_1, A_n ו B_n הם מספרים שלמים שונים מאפס ו A_nB_n היא כפולה כלשהי של כל הגורמים הראשוניים השונים של $x_1,\dots,x_n$ כך שכל גורם כזה מופיע רק באחד משני המחוברים A_n ו B_n, היא סדרה דסיונקטיבית.

בפרט, ממשפט 14 יוצא:

<u>משפט 15</u>. הסדרה

(13) $$x_1,\ x_2=ax_1^b+c_1,\ x_3=a(x_1x_2)^b+c_2,\dots,\ x_{n+1}=a(x_1\cdots x_n)^b+c_n,\dots,$$
שבה x_1 ו a הם מספרים שלמים, c_n הוא מספר שלם זר ל $x_1\dots x_n$ ו b הוא מספר טבעי, היא סדרה דסיונקטיבית.

בפרט, כאשר $a=b=1,\ c_n=\pm1$ נקבל ממשפט 15:

<u>משפט 16</u>. הסדרה

(14) $$x_1,\ x_2=x_1\pm1,\ x_3=x_1x_2\pm1,\dots,\ x_{n+1}=x_1\cdots x_n\pm1,\dots,$$
שבה x_1 הוא מספר שלם והסימנים $\pm$ יכולים להבחר בכל פעם כרצוננו, היא סדרה דסיונקטיבית.

<u>משפט 17</u>. כל סדרה דסיונקטיבית נתנת להתקבל לפי השיטה השניה.

<u>הוכחה</u>. תהי נתונה סדרה דסיונקטיבית

(15) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\dots,x_n,\dots$$
נוכל להניח

(16) $$x_n=x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}+(x_n-x_1x_2x_3\cdots x_{n-1})$$
באשר המחובר בסוגרים בודאי זר ל $x_1\cdots x_{n-1}$ בהתאם לדסיונקטיביות של (15).

(ד) <u>קשרים בין שיטה ראשונה ושניה</u>.

<u>משפט 18</u>. בסדרה (4) קים:

(17) $$x_n\equiv2 \bmod (x_1x_2x_3\cdots x_{n-2})^2,\ n\geq3.$$

<u>הוכחה</u>. ראשית $x_n=x_{n-1}^2-2=(x_{n-2}^2-2)^2-2\equiv2 \pmod{x_{n-2}^2}$. כן יהיה גם $x_n=((x_{n-3}^2-2)^2-2)^2-2\equiv2 \pmod{x_{n-3}^2}$ וכן הלאה. אך כל שנים מהמספרים x_{n-2}, x_{n-3}, ... זרים ביניהם: מכאן (17).

<u>משפט 19</u>. בסדרה (5) קים

(18) $$x_n=2x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}+U_{2^n-3}=2U_{2^n}+U_{2^n-3},$$
באשר (U) היא סדרת פבונצ׳י המגדרת ע"י

(19) $$U_1=U_2=1,\ U_n=U_{n-1}+U_{n-2}.$$

<u>הוכחה</u>. כידוע קים $V_n=2U_n+U_{n-3}$. מכאן $x_n=V_{2^n}=2U_{2^n}+U_{2^n-3}$. מצד שני קים $U_{2n}=U_nV_n$. מכאן משפטנו.

<u>משפט 20</u>. בסדרה (6) קיים

$$x_n=2x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}+2(\bar{u}_{2^{n-1}}-u_{2^{n-1}-1}), \qquad (20)$$

באשר $(\bar{u})$ היא הסדרה המגדרת על-ידי:

$$\bar{u}_0=0,\bar{u}_1=1,\bar{u}_n=4\bar{u}_{n-1}-\bar{u}_{n-2}. \qquad (21)$$

<u>הוכחה</u>. כידוע קים $\bar{v}_n=4\bar{u}_n-2\bar{u}_{n-1}$, באשר $(\bar{v})$ היא הסדרה המגדרת על-ידי:

$$\bar{v}_0=2,\bar{v}_1=4,\bar{v}_n=4\bar{v}_{n-1}-\bar{v}_{n-2} \qquad (22)$$

לאמר (22) היא מקרה פרטי של (8). לכן $x_n=\bar{v}_{2^{n-1}}=4\bar{u}_{2^{n-1}}-2\bar{u}_{2^{n-1}-1}$. מצד שני קים $\bar{u}_{2n}=\bar{u}_n\bar{v}_n$. מכאן משפטנו.

<u>משפט 21</u>. בסדרה (7) קים:

$$x_n=x_0x_1x_2\cdots x_{n-1}+2b^{2^{n-1}} \qquad (23)$$

באשר $x_0=a-b$.

<u>הוכחה</u>. באנדוקציה.

<u>הוכחה אלטרנטיבית למשפט 9</u>. (23) נותן:

$$a^{2^{n-1}}+b^{2^{n-1}}=x_n=x_0x_1x_2\cdots x_{n-1}+2b^{2^{n-1}}$$

מכאן, כל מחלק אי-זוגי משותף d של x_n ואבר קודם לו מחלק גם ל $b^{2^{n-1}}$ ולכן גם ל $a^{2^{n-1}}$. אך $(a,b)=1$. לכן $d=1$.

<u>משפט 22</u>. בסדרה (13) קים:

$$x_{n+1}=x_n^{b+1}-c_{n-1}x_n^b+c_n, \quad n\geqslant 2 \qquad (24)$$

ו (24) הוא מטפוס הפולינומים (1).

<u>הוכחה</u>.

$$x_{n+1}=a(x_1\cdots x_n)^b+c_n \qquad (25)$$

$$x_n=a(x_1\cdots x_{n-1})^b+c_{n-1} \qquad (26)$$

מ (26) יוצא

$$a(x_1\cdots x_{n-1})^b=x_n-c_{n-1} \qquad (27)$$

על ידי הצבת (27) ב (25), נקבל:

$$x_{n+1}=(x_n-c_{n-1})x_n^b+c_n$$
$$=x_n^{b+1}-c_{n-1}x_n^b+c_n.$$

קונגרס בינלאומי של מתמטיקאים

קונגרס בינלאומי של מתמטיקאים יתקים בקמברידג׳, מסצ׳וססס, מן ה 30 באוגוסט עד ה 6 בספטמבר, 1950, בחסותה של החברה המתמטית האמריקאית. לכתחלה היה בדעתה של החברה לשמש אכסניה של קונגרס בספטמבר, 1940, שנועד גם הוא להיות בקמברידג׳. אולם פרוץ מלחמת העולם השניה גרם לדחית הקונגרס וכתוצאה מכך לא היה שום כנס בינלאומי של מתמטיקאים מאז 1936. תקותה הכנה של החברה המתמטית האמריקאית היא כי הכנס ב 1950 יהיה בינלאומי במלוא מובן המלה, וכי כל הארצות תהיינה מיוצגות בו כראוי. מועצת החברה המתמטית האמריקאית קבלה החלטה פה אחד לקים קונגרס שיהיה פתוח למתמטיקאים בני כל הקבוצות הלאומיות והגאוגרפיות.

מ ו ע ד ו מ ק ו ם. תאריכי הקונגרס נקבעו ל 30 באוגוסט – 6 בספטמבר, 1950. מכללת הרברד תהיה המוסד המארח הראשי. גם מספר מוסדות אחרים בעיר בוסטון ישתתפו בהארחת מבקרי הקונגרס על-ידי סדורים מיוחדים במעונותיהם.

א פ י ה ק ו נ ג ר ס. בשנים החולפות התרשמו המתמטיקאים מאד מהצלחת שיטת הועידות לשם הצגת מחקרים חדישים בשטחים שבהם הושגו זה עתה השגים נמרצים או שהם בתהליך התקדמות. הקונגרס ב 1950 יכלול ועידות בכמה שטחים. בהתאם לנהג הקבוע, תהיינה גם מספר הרצאות יחידות מפי מתמטיקאים בעלי שם. נוסף לכך תתקימנה פגישות חוגיות להצגת מאמרים שהוגשו ולא נכללו בתכניות הועידות. הללו תתקימנה בשדות הבאים: א, אלגברה ותורת המספרים; ב, אנליזה; ג, גאומטריה וטופולוגיה; ד, סכויים וסטטיסטיקה, תורת הבטוח, כלכלה; ה, פיסיקה מתמטית ומתמטיקה שמושית; ו, הגיון ופילוסופיה; ז, הסטוריה וחנוך.

השפות הרשמיות של הקונגרס ב 1950 תהיינה אנגלית, צרפתית, גרמנית, איטלקית ורוסית.

א ר ג ו ן. התכניות לקונגרס נמצאות בפקוחה של ועדה מארגנת שנבחרה בפברואר 1948 על-ידי החברה המתמטית האמריקאית. היושב ראש הוא פרופסור גרט בירקהוף ממכללת הרברד וסגן היושב ראש הוא פרופסור ו. ט. מרטין מן המכון לטכנולוגיה של מסצ׳וססס. פרופסור י. ר. קלין ממכללת פנסילבניה נתמנה כמזכיר הקונגרס.

ה א ר ח ה. מכללת הרברד הציעה לרשות המתמטיקאים ואורחיהם למשך תקופת הקונגרס את חדרי השנה והאכל שלה. הועדה המארגנת מקוה שיהא זה בגדר האפשר לספק אש"ל ללא תשלום לכל המתמטיקאים חברי הקונגרס שמחוץ ליבשת אמריקה הצפונית. גבה התשלומים של דמי החברות בקונגרס יפורסם בעוד מועד לפני פתיחת הקונגרס. יעשה כל מאמץ להקל את הנסיעה במחיר מתקבל על הדעת למשתתפים בני חוץ-לארץ בתקופת שהותם בארצות הברית.

א י נ פ ו ר מ צ י ה. ידיעות מפורטות תשלחנה במועד הנכון לחברות ואקדמיות מתמטיות לשם העברתן לחבריהן. יחידים המעונינים בקבלת אינפורמציה יואילו להגיש את שמם למשרד החברה המתמטית האמריקאית. הכתבת למכתבים היא:

American Mathematical Society, 531 West 116th Street, New York City 27, U.S.A.

הועדה המארגנת