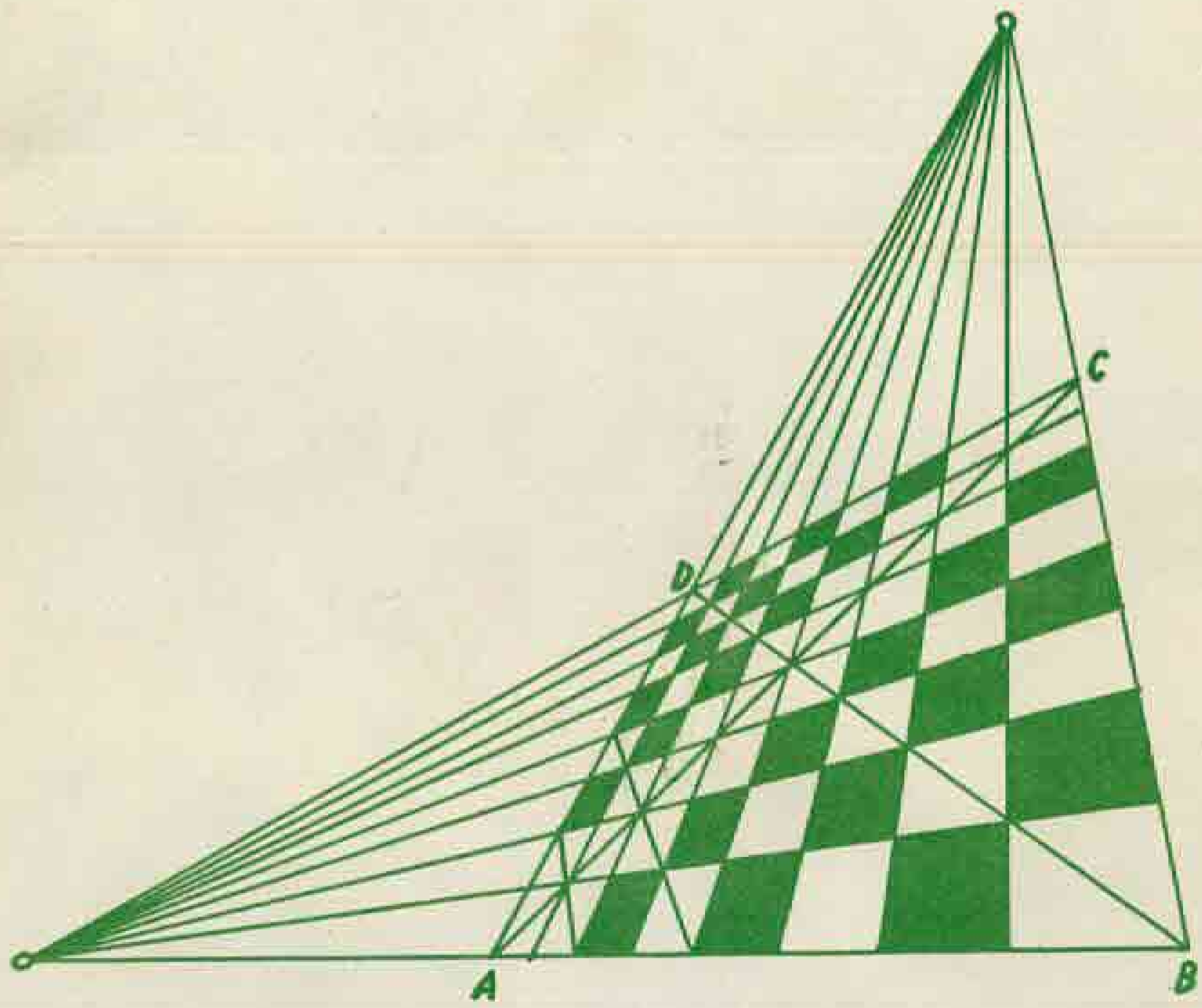
גליונות
מתמטיקה
לנוער הלומד ולחובבים



כרך 3 רחובות, אייר תשכ"ו, אפריל 1966 מס' 2

יוצא לאור בחסות
ה„אגוד למתמטיקה בישראל"

העורך: י. גיליס

דבר המערכת

הננו מביעים את צערנו על העיכוב שחל בהוצאת חוברת זו. עיכוב זה נבע מכמה קשיים טכניים, בעיקר כספיים, ואנו מקווים כי הצלחנו להתגבר עליהם. במיוחד אנו אסירי תודה למשרד החינוך והתרבות אשר נאות לתמוך בהוצאת החוברות האלה. התמיכה הכספית חשובה ותאפשר הוצאה סדירה יותר של הגליונות, אבל לא פחות חשובה בעינינו העובדה כי אנו רואים בזה הבעת אימון במפעלנו מטעם הרשות העליונה לחינוך בארץ. נשתדל לא לאכזב אימון זה.

הטפסים שצורפו לחוברת האחרונה בשביל פותרי השאלות הצדיקו את עצמם בחוסכם זמן רב לאחראים לבדיקת הפתרונות. אנו חוזרים גם הפעם ומבקשים מהפותרים לצרף את הטפסים לפתרונותיהם. בהזדמנות זו אנו מעירים בשמחה כי פנייתנו לפותרים למסור את החומר בצורה ברורה ונקיה הוכתרה בהצלחה ואנחנו מקווים כי הפותרים ימשיכו בכוון זה.

ובסוף, בקשה מעשית. אנו מבקשים מהמנויים המשלמים בהמחאות לכתוב את אלה לפקודת "גליונות מתמטיקה". התקבלו כמה המחאות לפקודת שמות אחרים והדבר גרם לבלבול ולעבודה מיותרת. תודה.

ב ע י ה

נתון שמספר מסויים (לאו דוקא שלם) נמצא בין 1 ל- 100 ועליך לנחש אותו כך ששגיאתך היחסית האפשרית (באחוז המספר האמיתי) תהיה קטנה ככל האפשר. מה תנחש?

(תשובה בעמ' 8)

ג ר פ י ם (המשך)

ח. חנני ו- ש. אביטל (טכניון)

פרק ב' - n גונים כחלקים מגרף.

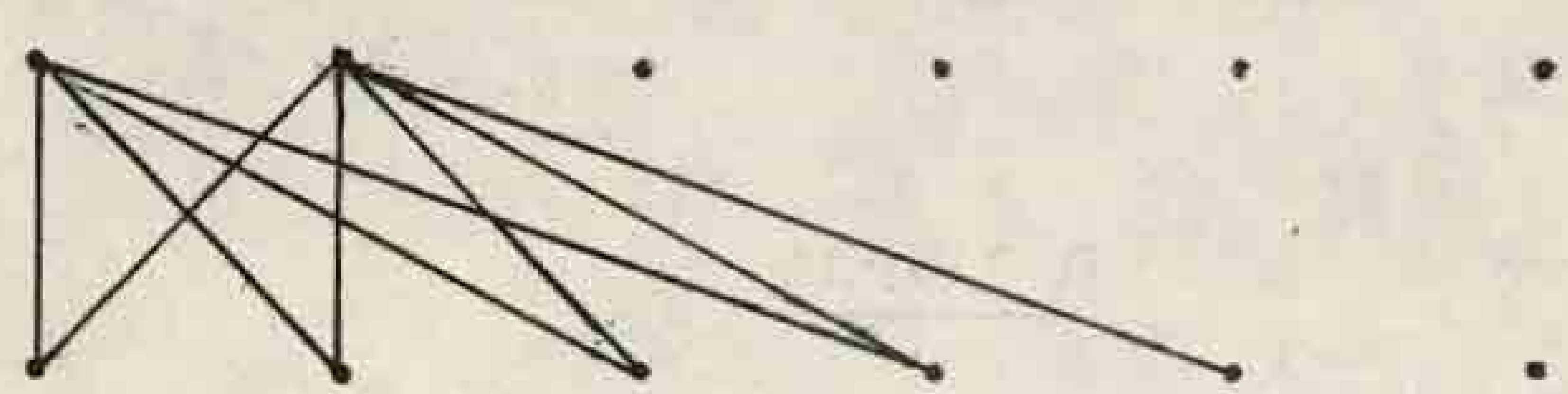
בעיות מעניינות בתורת הגרפים קשורות בשאלה מהו תנאי הכרחי ומספיק לכך שגרף יכיל גרפים חלקיים מסוג מסויים. נביא כאן שני משפטים מעניינים, שהוכיח טורן (Turan).

נדון כאן רק בגרפים שבין כל שני קודקודיו עובר לכל היותר מקצוע אחד.

משפט 8: תנאי לכך שגרף בעל $2n$ קודקודים יכיל משולש הוא שמספר מקצועותיו יהי לפחות $n^2 + 1$.
קיימים גרפים בני $2n$ קודקודים ו-n^2 מקצועות שאינם מכילים משולש.

הוכחה: נוכיח תחילה את החלק השני, ונעשה זאת ע"י כך שנבנה גרף בן $2n$ קודקודים ו- n^2 מקצועות, שאינו מכיל משולש.

נתאר לעצמנו $2n$ הקודקודים ערוכים ב- 2 שורות, n קודקודים בכל שורה.



ציור 12

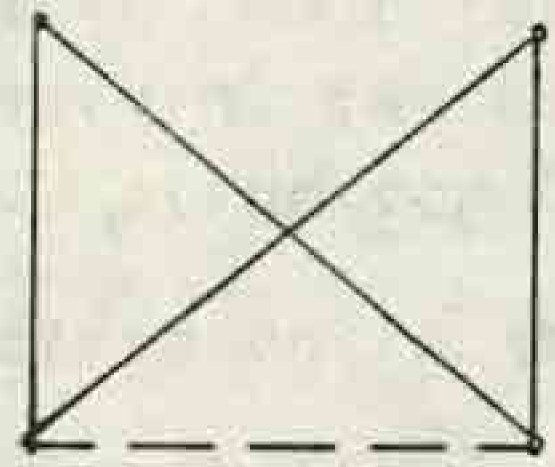
כל קודקוד מהשורה העליונה קשור במקצוע עם כל הקודקודים בשורה התחתונה. בסך הכל יהיו בגרף זה n^2 מקצועות. אבל גרף זה לא יכיל משולש כי בין כל 3 קודקודים מוכרחים להיות לפחות 2 מאותה שורה ואלה אינם מחוברים במקצוע.

נוכיח עתה שהתנאי הוא מספיק. נעשה זאת ע"י אינדוקציה.

א) בשביל $n=2$ המשפט נכון כי גרף המכיל 4 קודקודים ו- 5 מקצועות מוכרח להכיל משולש.

ב) נניח שהמשפט נכון בשביל n ונוכיח שהוא נכון גם בשביל $n + 1$. עלינו להוכיח איפוא כי גרף המכיל $2(n + 1)$

קודקודים ו- $(n + 1)^2 + 1$ מקצועות מוכרח להכיל משולש.



ציור 13

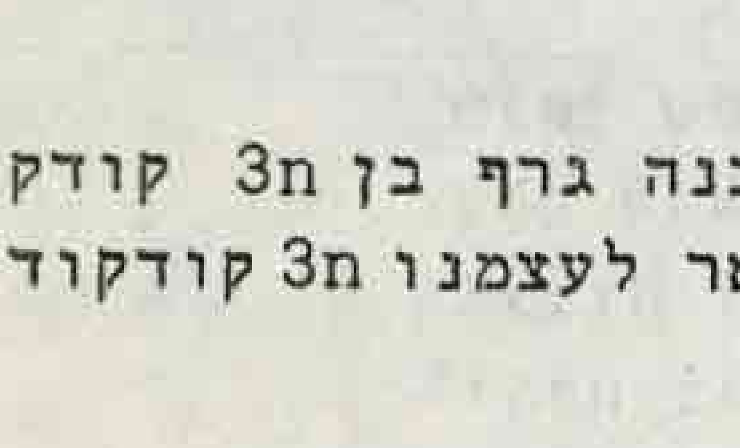
נסתכל בזוג קודקודים כלשהו המחוברים במקצוע. נסמנם ב- P ו- Q

. אם קודקוד אחר כלשהו מחובר במקצועות גם עם P וגם עם Q הרי קבלנו משולש. נניח לכן שאין זה כך – כלומר שאף אחד משאר $2(n+1) - 2 = 2n$ הקודקודים אינו מחובר גם עם P וגם עם Q. לפיכך, מספר המקצועות היוצאים מ- P ומ- Q גם יחד אינו גדול מ- 2n. כי נניח ש- P מחובר ל- k קודקודים ו- Q מחובר ל- s קודקודים, הרי $k + s \leq 2n$ כי אחרת יש קודקוד אחד שאליו מחוברים שניהם, ז"א קיים משולש. נוציא מן הגרף את הקודקודים P ו- Q ואת כל המקצועות היוצאים מהם. ע"י כך מחקנו מהגרף 2 קודקודים ולכל היותר $2n + 1$ מקצועות. נשארו איפוא 2n קודקודים ולפחות $(n+1)^2 + 1 - (2n+1) = n^2 + 1$ מקצועות. לפי הנחת האינדוקציה מכיל הגרף הנותר משולש המוכל גם בגרף המקורי.

תנאי דומה בשביל ארבע-גון שלם מוכח במשפט הבא:

<u>משפט 9</u>: תנאי מספיק לכך שגרף בעל 3n קודקודים יכיל ארבע-גון שלם הוא שמספר מקצועותיו יהיה לפחות $3n^2 + 1$. וקיימים גרפים בני 3n קודקודים ו- $3n^2$ מקצועות שאינם מכילים ארבע-גון שלם. (נשים לב לכך שמדובר רק בגרפים אשר בין כל 2 קודקודים שלהם עובר לכל היותר מקצוע אחד).

<u>הוכחה</u>: תחילה נוכיח את החלק השני. נבנה גרף בן 3n קודקודים ו- $3n^2$ מקצועות שאינו מכיל ארבע-גון שלם. נתאר לעצמנו 3n קודקודים ערוכים ב- 3 שורות, n קודקודים בכל שורה. כל שני מקצועות, שאינם בשורה אחת, קשורים ביניהם במקצוע. שני קודקודים בשורה אחת <u>אינם</u> קשורים במקצוע. ע"י כך קבלנו גרף בעל $3n^2$ מקצועות: בגרף זה אין ארבע-גון שלם, כי כל רביעיה של קודקודים מוכרחה להכיל לפחות 2 קודקודים מאותה שורה, ואלה אינם קשורים ביניהם ע"י מקצוע.



ציור 14

נוכיח עתה שהתנאי הוא מספיק. נעשה זאת ע"י אינדוקציה.

א) בשביל $n=2$ ישנם בגרף $3x2 = 6$ קודקודים ו- $3x2^2+1 = 13$ מקצועות. לפי המשפט הקודם מכיל גרף זה משולש, למשל משולש ABC, ונוסף לכך 3 קודקודים למשל D; E; F. 6 קודקודים יכולים להיות קשורים לכל היותר ע"י $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ מקצועות (הנחתנו שאין יותר ממקצוע אחד המקשר 2 קודקדים). לכן ברור כי לפחות אחד הקודקודים F, E או D מוכרח להיות קשור עם <u>כל</u> המקצועות של המשולש ABC ז"א הוא יוצר אתו ארבע-גון שלם.

ב) נניח שהמשפט נכון בשביל n ונוכיחו בשביל n+1, ז"א נוכיח שגם גרף המכיל $3(n+1)$ קודקודים ולפחות $3(n+1)^2 + 1$ מקצועות מוכרח להכיל ארבע-גון שלם.

לפי משפט 8 יש בגרף משולש שלם. נסמנו ב- ABC. אם אחד מ- $3(n+1)-3 = 3n$ הקודקודים הנותרים קשור עם כל אחד משלושת הקודקודים של המשולש, הרי נוצר ארבע-גון שלם. אם אין זה כך, ז"א אם כל אחד מהקודקודים האחרים קשור לכל היותר עם 2 מקודקודי המשולש ABC אז מקודקודי המשולש ABC יוצאים לכל היותר $6n$ מקצועות.

אם נמחוק מקצועות אלה וגם נמחוק את מקצועות המשולש ייוותרו $3n$ קודקודים ולפחות $3(n+1)^2 +1-6n-3 = 3n^2 + 1$ מקצועות אלה, לפי הנחת האינדוקציה מכילים ארבע-גון שלם והוא מוכל גם בגרף המקורי.

הכללה של שני משפטים אלה מבוטאת במשפט טורן האומר:

תנאי מספיק לכך שגרף בעל kn קודקודים יכיל $k+1$-גון שלם הוא שיהיה בו לפחות $\binom{k}{2}n^2 +1$ מקצועות. ואפשר לבנות גרף בעל kn קודקודים ו- $\binom{k}{2}n^2$ מקצועות שלא יהיה בו k-גון שלם.

את המשפט הזה לא נוכיח כאן. (הסימן $\binom{k}{2}$ מייצג את מקדם הבינום $\frac{k(k-1)}{2}$)

<u>פרק ג' - גרפים במישור</u>

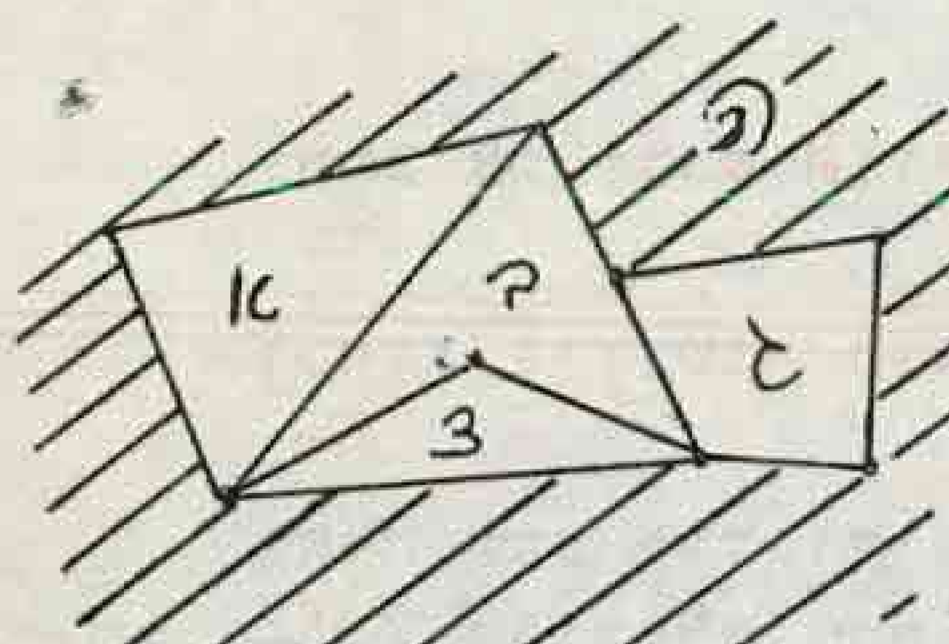
בפרק א' ראינו כי בכל גרף נחשבים כקודקודים רק נקודות שצויינו במפורש בתור כאלה. עם זאת הדגשנו שלפעמים ישנם גרפים, שאי אפשר לציירם במישור בלי שמקצועות מסויימים יאלצו להיחתך, למרות שנקודת החיתוך אינה נחשבת כקודקוד.

להבא נראה למשל, כי אי אפשר לצייר חמש-גון שלם בלי שמקצועות מסויימים שלו יאלצו להחתך שלא בקודקודים.

<u>הגדרה:</u> גרף שאפשר לציירו במישור בלי שמקצועותיו ייחתכו שלא בקודקודים, נקרא <u>מישורי</u>. בפרק זה נדון בגרפים מסוג זה.

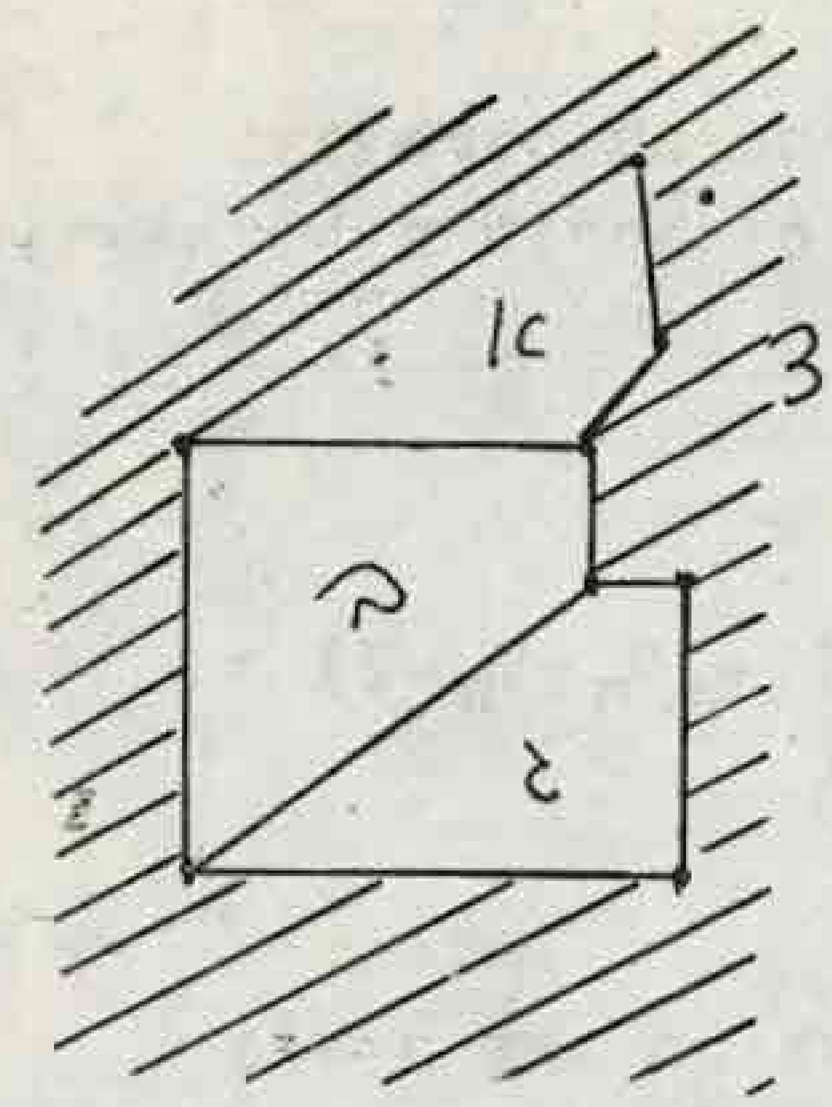
תחילה נדון בגרפים מישוריים היוצרים רשת של מצולעים סגורים - פוליגונים. לגרף כזה נקרא גרף פוליגונלי. גרף פוליגונלי מחלק את המישור ל"מדינות" ויוצר "מפה". לגבי גרפים פוליגונליים מקובל לראות כ"פוליגון" גם את השטח החיצוני המקיף את הפוליגונים.

למשל בציור מס' 15 ישנם 5 פוליגונים. החמישי הוא התחום המקווקו בציור והוא מכסה את כל המישור פרט לפוליגונים הסגורים שבגרף. פוליגון זה נכנה להבא בשם פוליגון חיצוני.



ציור 15

נספור בגרף כזה את
מספר הקודקודים V (Vertices)
מספר המקצועות E (Edges) ומספר המצולעים F (Faces). בגרף שבציור מס' 15 $V = 8$; $E = 11$; ו- $F = 5$
בגרף שבציור מס' 16 $V = 8$; $E = 10$
ו- $F = 4$.



ציור 16

בשביל גרפים פוליגונליים הוכיח אוילר את המשפט הבא:

<u>משפט 10</u>: בכל גרף פוליגוני
קיים $V + F = E + 2$

<u>הוכחה:</u> מספר הפוליגונים הפנימיים פרט לפוליגון החיצוני הוא $F-1$. נסמן את מספרי מקצועות הפוליגונים האלה ב- n_{F-1} ;... ;n_2 ;n_1.
כידוע, סכום הזויות הפנימיות בכל פוליגון בעל n צלעות הוא $180° (n-2)$.
לפיכך סכום הזויות הפנימיות בכל הפוליגונים יהיה

$$S = (n_1-2)\,180° + (n_2-2)\,180° + \ldots + (n_{F-1}-2)\,180°$$

$$= 180° \,[n_1 + n_2 + \ldots + n_{F-1} - 2\,(F-1)] \qquad (1)$$

את מקצועות הפוליגונים נחלק לשני סוגים, כאלה המפרידים בין שני פוליגונים פנימיים, את מספרם נסמך ב- $E_{פ}$; וכאלה המפרידים בין פוליגון פנימי לבין הפוליגון החיצוני, את אלה נסמן ב- $E_{ח}$. מובן כי $E_{פ} + E_{ח} = E$

כל מקצוע משמש 2 פוליגונים לפיכך
$$n_1 + n_2 + \dots + n_{F-1} + E_{ח} = 2E$$
מכאן
$$n_1 + n_2 + \dots + n_{F-1} = 2E - E_{ח}$$
נציב מסקנה זאת ב-(1) ונקבל כי סכום הזויות הפנימיות הוא:
$$S = 180° \, [2E - E_{ח} - 2\,(F-1)]$$

נחשב את סכום הזויות הפנימיות בדרך שניה.

נבחין בין שני סוגים של קודקודים:

כאלה שהם קודקודים של פוליגונים פנימיים <u>בלבד</u>, נסמן את מספרם ב- $V_{פ}$; וכאלה שהם קודקודים של הפוליגון החיצוני, את מספרם נסמן ב- $V_{ח}$. מובן כי $V = V_{פ} + V_{ח}$ וכן $V_{ח} = E_{ח}$.

סכום הזוויות ליד כל קודקוד הוא $360°$, לפיכך סכום הזויות ליד הקודקודים של פוליגונים פנימיים הוא $360° V_{פ}$.

כדי לקבל את סכום כל הזויות הפנימיות עלינו להוסיף את הזוויות שליד קודקודים המשמשים את הפוליגון החיצוני. סכומם הוא: $180° \, (V_{ח} - 2)$.

ז"א
$$S = 360° \, V_{פ} + 180° \, (V_{ח} - 2) =$$
$$= 360° \, (V - V_{ח}) + 180° \, (V_{ח} - 2) = 180° \, (2V - 2V_{ח} + V_{ח} - 2) =$$
$$= 180° \, (2V - V_{ח} - 2)$$

נשווה שתי התוצאות
$$180° \, (2V - V_{ח} - 2) = 180° \, [2E - E_{ח} - 2\,(F-1)]$$
אבל $V_{ח} = E_{ח}$ לכן $2V - 2 = 2E - 2(F-1)$

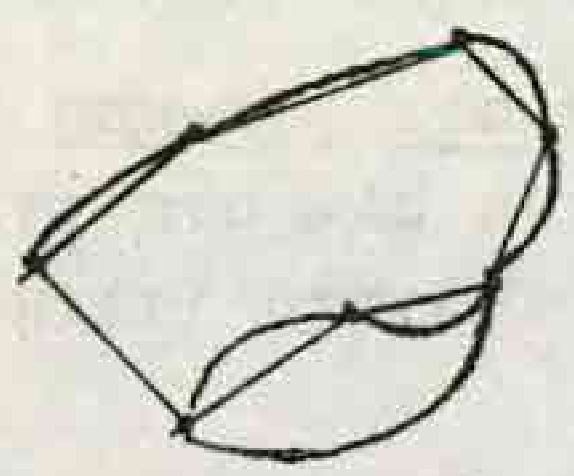
לכן $V = E - F + 2$ ומכאן $V + F = E + 2$.

הוכחנו משפט אוילר בשביל גרפים פוליגוניים.

המשפט נכון גם כאשר המקצועות הם קוים עקומים. כי כל קו עקום נוכל להפוך לשרשרת פוליגונלית של קטעים ישרים, בלי לשנות את מספר הפוליגונים, ע"י הוספת V_3 קודקודים נוספים באופן זה יתווספו גם E_3 מקצועות נוספים - ומובן כי $E_3 = V_3$.
הגרף החדש מורכב מ- $V + V_3$ קודקודים, $E + E_3$ מקצועות ו-F פוליגונים עבורו קיים המשפט שהוכחנו

ז"א $(V+V_3)+F = (E+E_3)+2$ $V_3 = E_3$

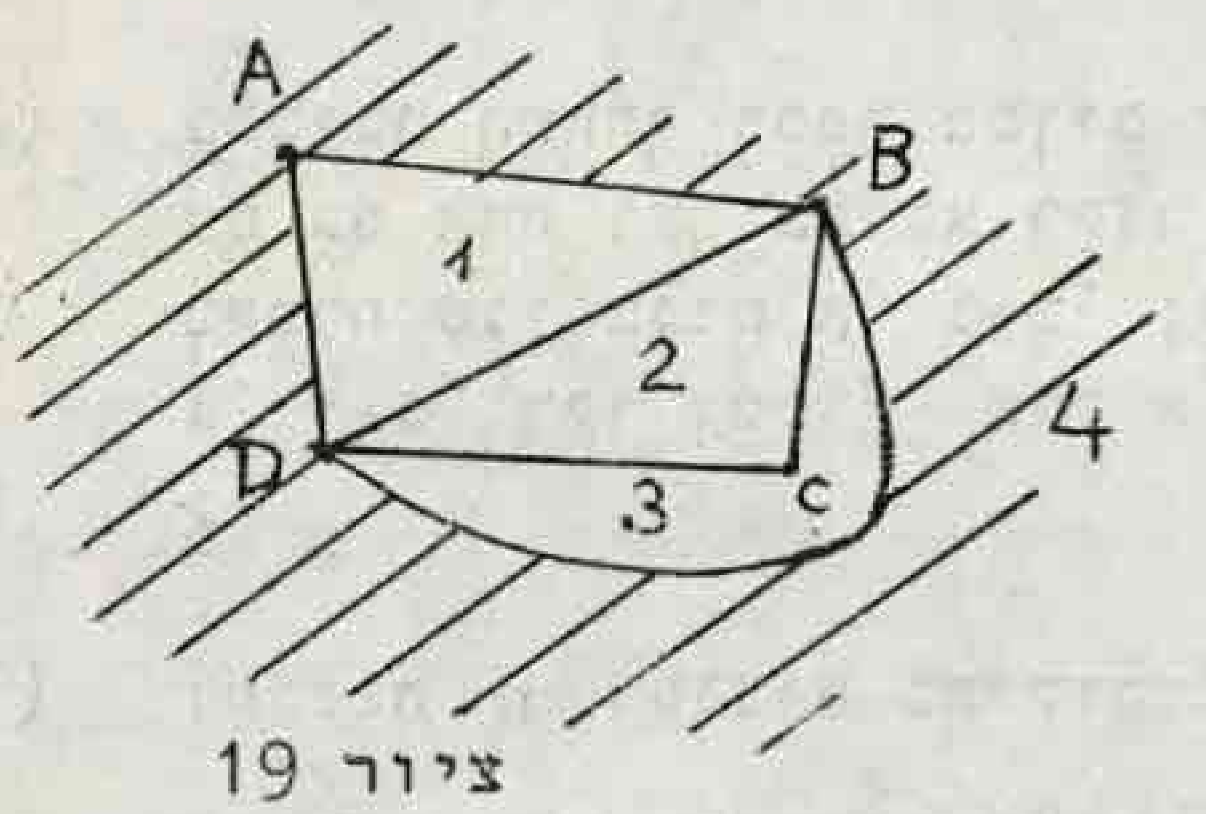
מכאן שגם בגרף המקורי $V+F = E+2$



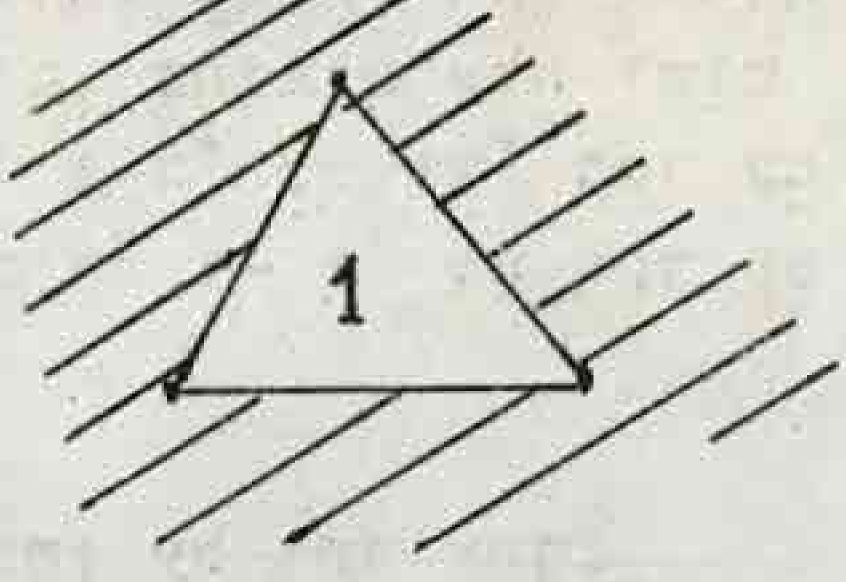
ציור 17

נבחן שימוש במשפט ל-n - גונים שונים.

$n = 1$ ו- $n = 2$ אינם מענינים, בשבילם מתקבלים פוליגונים מנוונים. $n = 3$ ז"א $V = 3$ ו- $E = 3$ לפיכך $3 + F = 3 + 2$ ז"א $F = 2$ הגרף הפוליגונלי מורכב מ-2 פוליגונים ואמנם מתקבל משולש ו-"הפוליגון החיצוני".



ציור 19



ציור 18

$n = 4$ ז"א $V = 4$; $E = \frac{4x3}{2} = 6$. אם F נחשב לפי משפט אוילר $4+F = 6+2$ מכאן $F = 4$ ואומנם בציור מס' 19 הננו רואים ארבע-גון שלם ו-4 הפוליגונים - כולל "הפוליגון החיצוני".

$n = 5$ הוא מקרה מעניין. נוכיח בעזרת משפט אוילר כי ה-חמש-גון איננו גרף מישורי.

נניח להיפך - שהחמש-גון גרף מישורי - מובן שהוא גרף פוליגונלי. $V = 5$; $E = \frac{5x4}{2} = 10$ לפיכך $5+F = 10+2$ ז"א $F = 7$ וישנם 7 פוליגונים (כולל החיצוני). נסמן את מספרי המקצועות

שלהם ב- $n_1; n_2; \dots n_7$ ז"א $n_1 + n_2 + \dots + n_7 = 2E = 20$

אבל כל פוליגון לפחות משולש, ז"א $n_i \geqslant 3 \quad (i = 1; 2; \dots 7)$

ז"א $n_1 + n_2 + \dots + n_7 \geqslant 3 \times 7 = 21$, סתירה.

לפיכך חמש-גון שלם איננו גרף מישורי. מובן שכל גרף אחר המכיל - חמש-גון שלם גם הוא איננו מישורי ומכאן שעבור $n \geqslant 5$ ה-n-גון השלם איננו מישורי.

נסו את כוחכם בפתרון מספר בעיות יותר קשות בתורת הגרפים:

1) את המשפט הבא מצא והוכיח לראשונה מתמטיקאי צעיר מהונגריה Posa כאשר היה בן 14 בלבד:

בכל גרף בעל n קודקודים ו- $2n-3$ מקצועות יש מצולע סגור ואלכסון במצולע זה.

במקרה שיש רק $2n-4$ מקצועות אין התכונה הנ"ל חייבת להתקיים.

2) במסיבה השתתף מספר מסוים של בנים ובנות. כל בן רקד לפחות עם בת אחת ואף בת לא רקדה עם כל הבנים. בתנאים אלה ישנם בהכרח שני בנים א' ו-ב' ושתי בנות ג' ו-ד' כך שא' רקד עם ג' ו-ב' רקד עם ד' אבל א' לא רקד עם ד' ו- ב' לא רקד עם ג'.

3) נתונות n נקודות במישור ואף שלוש מהן על ישר אחד.

נקודות אלה מחוברות ע"י $n+1$ קטעים. הוכח שיש ביניהם לפחות 2 קטעים שאינם נחתכים.

בעיה שפתרונה איננו ידוע: מהו מספר הקטעים הדרוש כדי שימצאו ביניהם בהכרח שלושה קטעים שאף זוג ביניהם איננו נחתך.

פתרון הבעיה מעמ' 1

הפתרון פשוט אבל התשובה מפתיעה במקצת. אם ננחש, למשל, 50 והמספר הוא 1 תהיה שגיאתנו 4900% של המספר הנכון. ברור כי הניחוש הבטוח ביותר יהיה כזה שהשגיאה היחסית תהיה שווה בשני המקרים הקיצוניים כשהמספר האמיתי הוא 1, ו-100, ז"א עלינו לנחש x כך ש-

$$\frac{x-1}{1} = \frac{100-x}{100} \qquad \text{ז.א.} \qquad 101x = 200$$

$$x = 1.9802$$

ציאנשידזי, משחק סיני

מבוא

לפני כשנה (כרך 2, מס' 7) פרסמנו מאמר בשם הנ"ל ובו הגדרנו שתי סדרות של מספרים טבעיים ע"י התהליך הבא: -

(1 $C_0 = d_0 = 0$

(2 אם הוגדרו כבר (C_r, d_r) עבור $r = 0,1,2,\ldots,n-1$ מגדירים את C_n כמספר הטבעי הקטן ביותר בין אלה אשר לא הופיעו ב- (C_r, d_r), $r = 0,1,\ldots,(n-1)$.

(3 $d_n = C_n + n$

שאלנו אז אם יוכל מישהו מבין קוראינו למצוא נוסחה עבור המספרים האלה.

התקבלו תשובות על שאלה זו מאת מר י. קליין (קבוץ יסודות) ומאת ד"ר מ. שמשוני (מכון ויצמן). שניהם הגיעו לאותה מסקנה והיא: -

$$C_n = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right] \quad , \quad d_n = \left[\frac{\sqrt{5}+3}{2}n\right]$$

כשהסימן $[x]$ מוגדר, עבור כל x ממשי, כמספר השלם הגדול ביותר שאיננו גדול מ- x (לדוגמה $[8.0]=8$, $[4.9]=4$, $[-4.3]=-5$, $[7.2]=7$, וכו').

ההוכחות שנתנו שני הקוראים האלה שונות במקצת בצורתן, אבל זהות באופן עקרוני. העורך לקח איפוא על עצמו לתרגם את שתי ההוכחות לשפה משותפת ולהציג אותה בזה בשם שני המחברים.

הוכחה:

נגדיר עבור כל מספר טבעי k,

$$x_k = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}k\right]$$

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}k - x_k$$

$$y_k = [\frac{\sqrt{5}+3}{2} k] = x_k + k$$

$$\beta_k = \frac{\sqrt{5}+3}{2} k - y_k$$

ברור כי, עבור $k > 0$, יהיה $0 < \alpha_k < 1$, $0 < \beta_k < 1$.
נסמן ב-X את קבוצת כל המספרים x_k וב-y את קבוצת המספרים y_k ($k = 0,1,\ldots$). נתחיל בהוכחת שני המשפטים הבאים: -

<u>משפט 1</u>. כל מספר חיובי שלם שייך ל-X או ל-Y.

<u>משפט 2</u>. אין לקבוצות X, Y איבר משותף (פרט למספר 0).

<u>הוכחת המשפטים</u>

<u>הוכחת משפט 1:</u>

נוכיח כי אם אין המספר החיובי השלם b שייך ל-X אז הוא מוכרח להשתייך ל-Y. ברור כי זה מוכיח את המשפט.

מאחר ש-
$$1 < \frac{\sqrt{5}+1}{2} k - \frac{\sqrt{5}+1}{2} (k-1) < 2$$

רואים כי $x_k - x_{k-1}$ מוכרח להיות שווה ל-1 או ל-2. במקרה השני יש לנו

$$2 = x_k - x_{k-1} = \{\frac{\sqrt{5}+1}{2} k - \alpha_k\} - \{\frac{\sqrt{5}+1}{2} (k-1) - \alpha_{k-1}\}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \alpha_k + \alpha_{k-1}$$

$$< \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \alpha_k + 1$$

ולכן
$$\alpha_k < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

אם המספר החיובי השלם b איננו נמצא בסדרת ה-x_n-ים יהיה k טבעי כך ש-

$$x_{k-1} < b < x_k$$

ואז יתקיימו

$$x_k - x_{k-1} = 2$$

$$b = x_k - 1 = x_{k-1} + 1$$

ולפי האמור לעיל

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} k - x_k = \alpha_k < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

מכל זה נובע כי

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} (x_k - k) - b = \frac{3+\sqrt{5}}{2} (x_k - k) - x_k + 1$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} x_k - \frac{\sqrt{5}+1}{2} k - k + 1$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} x_k - \{x_k + \alpha_k\} - k + 1$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} x_k - k + 1 - \alpha_k$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \{\frac{\sqrt{5}+1}{2} k - \alpha_k\} - k + 1 - \alpha_k$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \alpha_k$$

אבל $0 < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \alpha_k < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$

ולכן $0 < 1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \alpha_k < 1$

מזה רואים כי המספר החיובי השלם b קטן מ- $\frac{3+\sqrt{5}}{2} (x_k - k)$
בהפרש חיובי שהוא פחות מ-1 ולכן

$$b = [\frac{3+\sqrt{5}}{2} (x_k - k)]$$

$$= y_\ell$$

כש- $\ell = x_k - k$. מ.ש.ל.

הוכחת משפט 2:

אם אין המשפט נכון קיים מספר חיובי שלם a כך ש-

$$a = x_m = y_n$$

ולכן $$a = \frac{\sqrt{5}+1}{2} m - \alpha_m \quad (0 < \alpha_m < 1)$$

וגם $$= \frac{3+\sqrt{5}}{2} n - \beta n \quad (0 < \beta_n < 1)$$

נכפיל את הראשון מאלה ב- $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ואת השני ב- $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ונקבל

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} a = m - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \alpha_m$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} a = n - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \beta_n$$

נחבר את שתי המשוואות האלה, ואז

$$a = m + n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \alpha_m - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \beta_n$$

$$m + n - a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \alpha_m + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \beta_n > 0$$

וגם $$< \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1$$

אבל m, a ו-n מספרים שלמים הם וכן גם $m + n - a$, ולכן לא יוכל זה להיות בין 0 ל- 1. מסתירה זו נובע משפט 2.

ה מ ש ח ק

עלינו להוכיח כי, עבור כל n טבעי, $C_n = x_n$, $d_n = y_n$

מאחר ש-

$$(C_o, d_o) = (0, 0)$$

$$(C_1, d_1) = (1, 2)$$

רואים כי הדבר נכון עבור $n = 1,0$. את הנוסחה הכללית נוכיח ע"י אינדוקציה. נניח כי היא נכונה עבור $n = 0,1,2,\dots,(k-1)$. הזוגות עד $n = k-1$ ניצלו איפוא את ה- X וה-Y עד לסדר $k-1$ ועד בכלל. המספר הטבעי הקטן ביותר אשר עוד טרם נוצל מוכרח, לפי משפט 1, להשתייך או ל-X או ל- Y. הקטן ביותר של X הנשאר עוד פנוי הוא x_k וזה של Y הוא y_k. מאחר ו- $x_k + k > x_k = y_k$ יוצא כי עלינו לקחת $C_k = x_k$ ואז נובע מיד כי $d_k = C_k + k = y_k$. זה משלים את ההוכחה.

הערה: אחרי קבלת שתי ההוכחות קבלנו הערה מד"ר א. פרנקל (ממכון ויצמן) כי אפשר להכליל את שני המשפטים היסודיים. יהיו p, q שני מספרים חיוביים בלתי ראציונליים המקיימים

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

כל מספר חיובי שלם ניתן להצגה באחת הצורות $[\ell p]$ או $[\ell q]$ ואף מספר כזה לא יוכל לשאת את שתי ההצגות יחד. המשפטים דלעיל מהווים מקרה פרטי של המשפט הכללי הזה כש-

$$q = \frac{\sqrt{5}+3}{2} \quad , \quad p = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

אכסיומות וגיאומטריה

1. מערכות אכסיומות

במתמטיקה יוצאים ממערכת אכסיומות והתפקיד הוא לבדוק איזו מסקנות אפשר להסיק מהן, ללא קשר עם שאלת נכונותן של האכסיומות. אנשים התרגלו לראות את האכסיומות של הגיאומטריה האויקלידית כ-"נכונות" בזה שהתאימו לנסיון. והגם שהתאמה זו לא היתה אף פעם מלאה התנחמו במחשבה כי הסטיות נובעות אך ורק מהצורה הגסה בה אנו משרטטים ומודדים, וכי במידה שנשכיל לחדד את עפרונותינו, לישר את סרגלינו, ולדייק במדידותינו, יתקרב הנסיון יותר ויותר לגיאומטריה האויקלידית הצרופה. אבל אחת התגליות החשובות ביותר של המאה ה- 19 היתה דווקא האפשרות להקים מערכות אכסיומות שונות מאלה של אויקלידס ולבסס עליהן גיאומטריות שונות, כל אחת בעלת זכות שווה לזו של הגיאומטריה האויקלידית לשאת בשם גיאומטריה. בין המערכות האלה ישנן הנותנות תוצאות שונות מאד מהאויקלידיות. ישנן גם שאין להבחין בין תוצאותיהן והתוצאות האויקלידיות, כשמדובר בקנה המידה הקטן של נסיוננו היום-

יומי, אבל השונות מהן כשעובדים בקנה מידה יותר גדול. וראוי להוסיף כי כשמגיעים למדידות בקנה המידה האסטרונומי של הקוסמולוגים כבר קשה לדבר בכלל על גיאומטריה נוסח אויקלידס.

אבל גם אם אין טעם לדון ב"נכונות" של מערכות אכסיומות, נשארות בכל זאת שאלות רבות בעלות משמעות יסודית. מערכת אכסיומות צריכה להיות נקיה מסתירות, ז.א. אסור שנוכל להסיק ממנה שתי מסקנות הסותרות זו את זו. שאלה שניה נוגעת לאי-התלות של מערכת אכסיומות, פרוש הדבר האם אחת האכסיומות איננה אלא מסקנה מחברותיה במערכת, כי במקרה זה מיותרת היא. מובן כי השאלה השניה פחות חמורה מהראשונה, כי לא ייגרם נזק על ידי שמירת האכסיומה המיותרת במערכת, פרט לפגיעה באסתטיקה ובשאיפתנו לבסס את המדע על מספר הנחות יסוד קטן ככל האפשר.

לפעמים מתעוררת שאלה שלישית והיא צורת תלותה של איזו מסקנה מתמטית באכסיומות מהן הוסקה. למשל, משפט שהוכח כנובעת מאכסיומות X,Y, ו- Z האם אפשר להסיק אותו מ- X ו- Y בלבד מבלי להזדקק ל- Z ? ואמנם בשאלה מעין זו נדון במאמר הזה. מדובר כאן בגיאומטריה הפרויקטיבית המקובלת ובמשפט מסויים.

.2 משפט דסרג (DESARGUES)

נחתיל בכמה הגדרות. עבור כל ארבע נקודות S, R, Q, P נסמן ב- (PQ,RS) את נקודת המפגש של הישרים RS, PQ בתנאי שנקודה זו קיימת, ז.א. שארבע הנקודות חד-מישוריות הן. נגיד כי שני משולשים ABC, $A'B'C'$ הם פרספקטיביים אם שלושת הישרים AA' BB', CC' נפגשים בנקודה אחת. שני משולשים ABC, $A'B'C'$ ייקראו חד-ציריים אם כל שלוש הנקודות $(BC,B'C')$, $(CA, C'A')$ $(AB, A'B')$ קיימות ונמצאות בקו ישר אחד. המשפט המפורסם של דסרג אומר כי תנאי מספיק והכרחי שיהיו שני משולשים פרספקטיביים הוא שיהיו חד-ציריים.

.3 הוכחת משפט דסרג

הכל פשוט במקרה שאין ABC, $A'B'C'$ נמצאים במישור אחד. כי יהיו אז p, p' מישורי ABC, $A'B'C'$ בהתאמה, ונסמן ב- ℓ את הישר בו נחתכים שני המישורים p, p'. אם המשולשים פרספקטיביים, אזי BB' ו- CC' נפגשים ולכן ארבע הנקודות B, B', C, C' הן

חד-מישוריות. מזה נובע כי גם BC, $B'C'$ ייפגשו. אבל BC נמצא כלו במישור p, ו-$B'C'$ ב-p' ולכן מוכרחת הנקודה $(BC, B'C')$ להיות משותפת ל-p, p' ז.א. להימצא על הישר ℓ. כמו-כך יימצאו גם $(CA, C'A')$ ו-$(AB, A'B')$ על ℓ ולכן יהיו המשולשים חד-ציריים.

כדי להוכיח את ההיפוך נניח כי $(BC, B'C')$ קיים ולכן, כמו לעיל, ייפגשו BB', CC' ויקבעו מישור, נגיד q. כמו-כך יפגוש AA' גם את BB' ואת CC'. אם הוא פוגש אותם בשתי נקודות שונות, אזי יהיו לו שתי נקודות במישור q ולכן יימצא כלו ב-q, ז.א. A, B, C, A', B', C' יהיו חד-מישוריים בניגוד להנחה. המוצא היחידי הוא שפגישת AA' עם BB', CC' היא בנקודתם המשותפת, ז.א. ב-(BB', CC'), במלים אחרות שהמשולשים יהיו פרספקטיביים.

רואים כי ההוכחה הזאת תלויה במישרין בעובדה שאין ABC, $A'B'C'$ חד-מישוריים, ולכן תידרש הוכחה חדשה עבור המקרה ששני המשולשים נמצאים באותו מישור. נניח איפוא כי ABC, $A'B'C'$ נמצאים שניהם במישור r ושהישרים AA', BB', CC' נפגשים ב-O. תהיה S איזו נקודה שהיא מחוץ למישור r ונחבר SA, SB, SC. תהיה S' נקודה נוספת בקו SO. הרביעיה S, S', A, A' היא חד-מישורית; נסמן ב-A'' את הנקודה $(SA, S'A')$. כמו-כך יהיו $B'' = (SB, S'B')$, $C'' = (SC, S'C')$. הנקודות A'', B'', C'' קובעות מישור, נגיד r', ויהיה λ קו החיתוך של המישורים r, r'. רואים מיד כי גם $(BC, B''C'')$ וגם $(B'C', B''C'')$ נמצאים על λ ולכן גם הנקודה $(BC,B'C')$. בדרך דומה נוכל להוכיח כי גם $(CA,C'A')$ ו-$(AB,A'B')$ יימצאו על הקו הישר λ ולכן ABC, $A'B'C'$ הם חד-ציריים.

להוכחת ההיפוך, נניח כי ABC, $A'B'C'$ הם חד-ציריים ונמצאים במישור אחד m, ויהיה ℓ הישר עליו נמצאים $(BC,B'C')$, $(CA,C'A')$, ו-$(AB,A'B')$. ניקח A'' מחוץ למישור m ותהיה S נקודה נוספת בקו AA''. הישר ℓ והנקודה A'' קובעים מישור m', ונסמן ב-B'', C'' את נקודות החיתוך של SB, SC בהתאמה עם m'. מאחר ש-B, C, B'', C'' נמצאים במישור SBC נובע כי הנקודה $(BC, B''C'')$ תתקיים ותהיה משותפת ל-m ו-m' ולכן תימצא על הקו ℓ. אבל הנחנו כי BC, $B'C'$ נפגשים על ℓ ולכן ייפגשו גם $B'C'$, $B''C''$. מזה נובע כי B', C', B'', C'' הם חד-מישוריים ולכן ייפגשו גם $B'B''$, $C'C''$. כמו-כך רואים כי $A'A''$ יפגוש גם את $B'B''$ וגם את $C'C''$. אבל השישיה $A', B', C', A'', B'', C''$ איננה חד-מישורית, ולכן יצטרכו הקווים $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ להיפגש בנקודה משותפת, S'. הנקודות S, S' תהיינה משותפות לשלושת המישורים $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ והישר SS' יחתוך את המישור m באיזו נקודה O. רואים

מיד כי AA', BB', CC' עוברים כולם דרך נקודה O ולכן שני המשולשים הם פרספקטיביים.

(בכוונה לא צרפנו ציורים להוכחות האלה והשארנו את התפקיד הזה לקורא. דוקא שרטוט הציורים בהתאם להוכחות יעזור לו לרדת לעומקן).

4. דיון

ראינו בסעיף 3 כי אפשר להוכיח משפט דסרג במרחב על סמך אכסיומות ההנדסה הפרויקטיבית המרחבית (שני מישורים נפגשים בישר, שלוש נקודות שאינן בקו ישר אחד קובעות מישור, וכו'). מאידך, כשבאנו להוכיח את המשפט במישור השתמשנו לא רק באכסיומות של גיאומטריה מישורית אלא גם בהנחות נוספות, בעיקר שקיימות נקודות מחוץ למישור אשר יחד אתו יוצרות גיאומטריה מרחבית. נשאלת איפוא השאלה האם אפשר להוכיח את משפט דסרג במישור בהסתמך אך ורק על אכסיומות המישור ומבלי לצאת למרחב. נוכיח בסעיף 5 את העובדה המענינת כי אי-אפשר להסיק את משפט דסרג במישור מאכסיומות המישור בלבד.

5. הרכחה שאי-אפשר להוכיח משהו!

נוכיח כאן כי אי-אפשר להסיק את משפט דסרג במישור מהאכסיומות המישוריות בלבד. כצעד ראשון ננסח את האכסיומות האלה. ישנן כמה צורות אפשריות אבל זאת הניתנת כאן היא פשוטה למדי ושוות-ערך לניסוחים אחרים: -

(i) ישנם עצמים הנקראים <u>נקודות</u> וקבוצות מסויימות של נקודות שיקראו קווים.

(ii) אם A,B הן נקודות שונות, אזי קיים בדיוק קו אחד המכיל אותן, ומסמנים אותו ב- AB.

(iii) $AB = BA$.

(iv) עבור כל A,B יש בקו AB לפחות נקודה אחת נוספת.

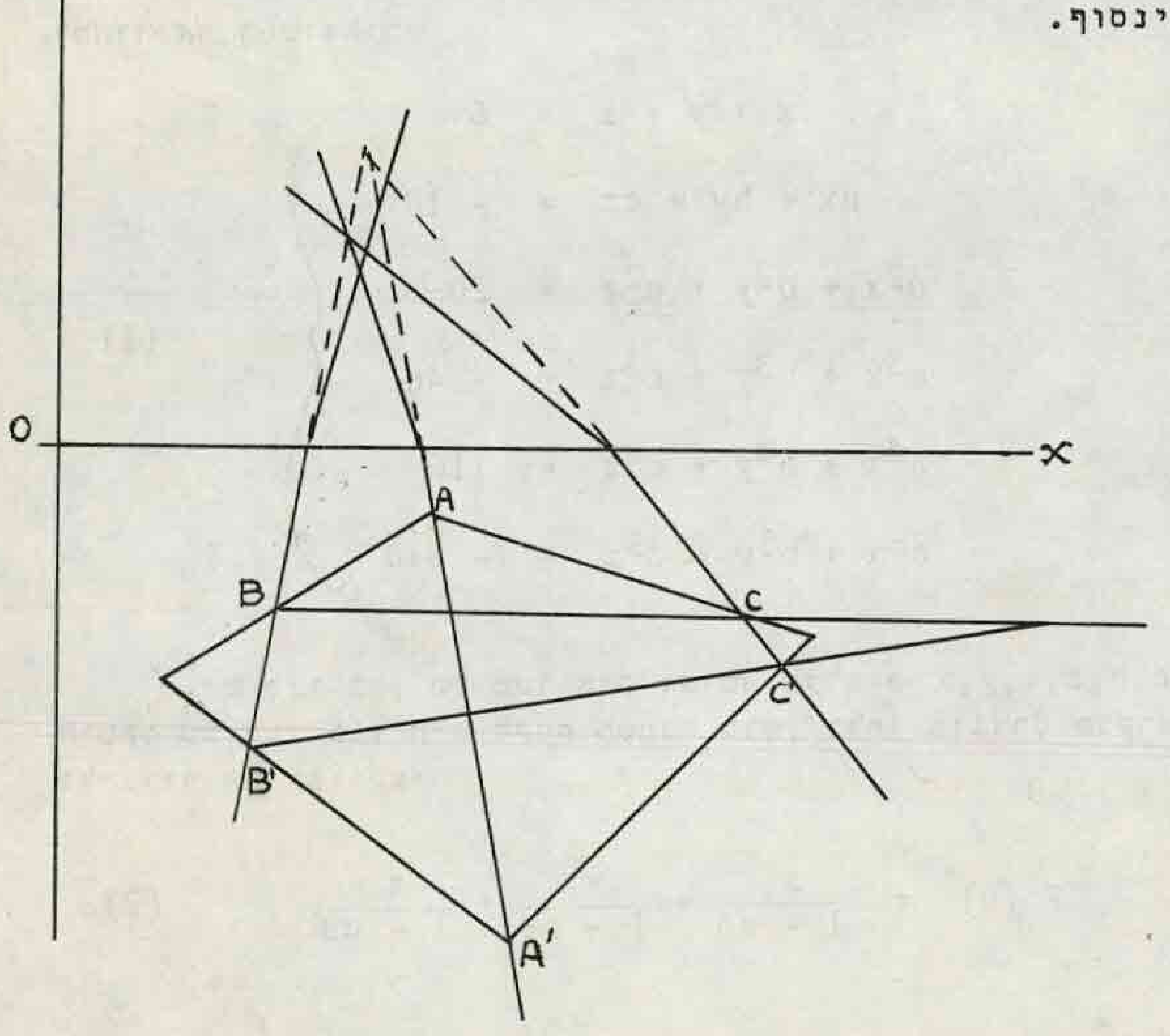
(v) אם C שייך ל- AB אזי הקווים AB, AC, BC זהים.

(vi) עבור כל A, B יש נקודה שאינה שייכת לקו AB.

(vii) אם C אינה שייכת ל- AB ו- A' היא נקודה של BC שונה מ-B
ו-C' ו- B' נקודה של CA שונה מ- C ו-A; אזי יש לקווים
AA', BB' נקודה משותפת.

עכשיו נקים דגם של נקודות וקווים המקיימים (i) - (vii)
ואשר עבורם משפט דסרג איננו נכון. מזה נדע כי אי-אפשר להסיק את
המשפט מהאכסיומות האלה בלבד; כי אילו התקיימה אפשרות כזאת, הרי
כל מערכת של נקודות וקווים המקיימים את האכסיומות היתה מקיימת גם
את המשפט. יוצא איפוא כי הזדקקותנו למעלה לגיאומטריה מרחבית לשם
הוכחת משפט דסרג במישור לא היתה מקרית אלא צורך ממשי. ועכשיו
נציג את הדגם.

נקח כנקודות כל הזוגות של מספרים ממשיים (x,y) (ברור כי
אפשר לסמן נקודות כאלה במישור בדרך הרגילה בראותנו x, y כקואור-
דינטות). נגדיר את הקו המחבר שתי נקודות (x_1,y_1) , (x_2,y_2)
ע"י המסלול של קרן אור העוברת מאחת הנקודות לשניה, תוך שבירה לפי
מנת שבירה $3/2$ בציר של x בעברה שמה. נקרא למסלול כזה <u>קו חדש</u>,
ונשאיר לקורא להיווכח כי כל האכסיומות (i) - (vii) מתקיימות אם
ניקח נקודות כפי שהגדרנו אותן זה עכשיו, וכקווים ניקח "קווים
חדשים". מובן שבמקרה של קווים חדשים "מקבילים" יש לראות את נקודתם
המשותפת כאינסוף.



עכשיו נסתכל בציור. ברור כי $A'B'C'$, ABC הם פרספקטיביים במובן הרגיל, ולכן יהיו גם חד-ציריים. פרוש הדבר כי הנקודות $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$, עם ההגדרה הרגילה הישנה של קווים, תימצאנה בישר אחד. אבל כל זה מתרחש בציור בצד אחד של הציר Ox ושם הקווים מתלכדים בקווים חדשים. יוצא כי ABC, $A'B'C'$ הם חד-ציריים גם לפי קווים חדשים. אבל מאידך ברור כי הקווים החדשים AA', BB', CC' אינם נפגשים בנקודה אחת. הוכחנו איפוא כי לפי הקווים החדשים אין "חד ציריות" גוררת "פרספקטיביות". כמו-כן אפשר ליצור דוגמא כשהפרספקטיביות אינה גוררת חד-ציריות. לשם כך ניקח ABC, $A'B'C'$ כך ש- AA', BB', CC' נפגשים בלי לחצות Ox אבל ש- BC, $B'C'$ נפגשים (כקווים ישנים) רק אחרי חציית Ox. זה יזיז את המפגש של הקווים החדשים BC, $B'C'$ ותופר החד-ציריות.

מערכת משוואות

השיטה שתוצג כאן היא המצאתו של המתמטיקאי הדגול רמנוג'ן ופורסמה בשנה 1912. כדי להבהיר אותה נתחיל בדוגמא פשוטה, והיא לפתור את המשוואות

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ ax + by + cz &= -10 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= 20 \\ a^3x + b^3y + c^3z &= -46 \\ a^4x + b^4y + c^4z &= 116 \\ a^5x + b^5y + c^5z &= -310 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

יש לנו כאן שש משוואות ושישה נעלמים x,y,z,a,b,c.
שיטתו של רמנוג'ן היא לקחת משתנה חדש, בלתי מוגדר, שנקרא לו θ, ולהגדיר את הפונקציה

$$F(\theta) = \frac{x}{1 - a\theta} + \frac{y}{1 - b\theta} + \frac{z}{1 - c\theta} \qquad (2)$$

ברור כי נוכל לכתוב

$$F(\theta) = \frac{x(1-b\theta)(1-c\theta) + y(1-c\theta)(1-a\theta) + z(1-a\theta)(1-b\theta)}{(1-a\theta)(1-b\theta)(1-c\theta)}$$

$$= \frac{N_0 + N_1\theta + N_2\theta^2}{1 + D_1\theta + D_2\theta^2 + D_3\theta^3} \qquad (3)$$

כשהמקדמים D_j, N_i עוד טעונים חישוב.

אבל נוכל גם לכתוב

$$F(\theta) = x(1+a\theta+a^2\theta^2+\ldots) + y(1+b\theta+b^2\theta^2+\ldots) +$$

$$+ z(1+c\theta+c^2\theta^2+\ldots) \qquad (4)$$

$$= 6-10\theta+20\theta^2-46\theta^3+116\theta^4-310\theta^5+K_6\theta^6+K_7\theta^7+\ldots$$

לפי (1), כשהמקדמים K_6, K_7, ... עוד טרם חושבו אבל למעשה
לא יענינו אותנו. מ-(3) ו- (4) רואים כי

$$N_0+N_1\theta+N_2\theta^2 = (1+D_1\theta+D_2\theta^2+D_3\theta^3) \qquad (5)$$
$$(6-10\theta+20\theta^2-46\theta^3+116\theta^4-310\theta^5+K_6\theta^6+\ldots)$$

ומאחר ש- (5) צריך להתקיים באופן זהה עבור כל θ נוכל להשוות את
מקדמי החזקות של θ בשני האגפים - לפיכך

$$N_0 = 6$$

$$N_1 = 6D_1 - 10$$

$$N_2 = 6D_2 - 10D_1 + 20$$

$$0 = 6D_3 - 10D_2 + 20D_1 - 46$$

$$0 = -10D_3 + 20D_2 - 46D_1 + 116$$

$$0 = 20D_3 - 46D_2 + 116D_1 - 310$$

את שלוש המשוואות האחרונות נוכל לפתור עבור D_3, D_2, D_1
ומקבלים מיד

$$D_1 = 6 \ , \ D_2 = 11 \ , \ D_3 = 6$$

ע"י הצבת ערכים אלה בשלוש המשוואות הראשונות נקבל N_3
ולמעשה $N_1, N_2,$

$$N_0 = 6$$

$$N_1 = 26$$

$$N_2 = 26$$

יש לנו איפוא כי

$$F(\theta) = \frac{6+26\theta+26\theta^2}{1+6\theta+11\theta^2+6\theta^3} = \frac{6+26\theta+26\theta^2}{(1+\theta)(1+2\theta)(1+3\theta)} \qquad (6)$$

עכשיו יש לנו שתי דרכים לגמור את הבעיה. הראשונה היא
להציג את הנוסחה ב- (4) ע"י <u>שברים חלקיים</u>, ז.א. לכתוב

$$\frac{6+26\theta+26\theta^2}{(1+\theta)(1+2\theta)(1+3\theta)} = \frac{A}{1+\theta} + \frac{B}{1+2\theta} + \frac{C}{1+3\theta} \qquad (7)$$

נוכל לכתוב את (7) בצורת

$$6 + 26\theta + 26\theta^2 = A(1+2\theta)(1+3\theta) + B(1+\theta)(1+3\theta) + C(1+\theta)(1+2\theta) \qquad (8)$$

המשוואה (8) צריכה להתקיים עבור כל θ. אם נציב $\theta = -1$
נקבל

$$6 = A\ (1-2)(1-3\theta)$$

ולכן

$$A = 3$$

כמו-כן הצבת $\theta = -\frac{1}{2}$ נותנת

$$6 - 13 + \frac{26}{4} = B\ (1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{2})$$

ז.א.

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}B$$

$$B = 2$$

ו- $\theta = -\frac{1}{3}$ נותן
$$6 - \frac{26}{3} + \frac{26}{9} = C(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{2}{3})$$

ז.א.
$$\frac{2C}{9} = \frac{2}{9}$$

$$C = 1$$

קבלנו איפוא כי

$$F(\theta) = \frac{3}{1+\theta} + \frac{2}{1+2\theta} + \frac{1}{1+3\theta} \qquad (9)$$

עכשיו, אם נשווה (9) עם (2) נקבל כי, עבור כל θ

$$\frac{x}{1-a\theta} + \frac{y}{1-b\theta} + \frac{z}{1-c\theta} \equiv \frac{3}{1+\theta} + \frac{2}{1+2\theta} + \frac{1}{1+3\theta}$$

לכן

$$(x,y,z,a,b,c) \equiv (3,2,1,-1,-2,-3)$$

וזה הפתרון. ביתר דיוק נוכל למצוא כאן 6 פתרונות שונים ע"י שנוי בסדר ה- x,y,z עם שנוי מתאים בסדר ה- a,b,c. למשל

$$(x,y,z,a,b,c) \equiv (2,3,1,-2,-1,-3)$$

הוא גם פתרון של המערכת (1).

הדרך השניה היא לשים לב כי נובע מ- (4) ש- (a,b,c) הם $(-3, -2, -1)$. אם נציב את הערכים האלה בשלוש המשוואות הראשונות של (1) נקבל מערכת משוואות ליניאריות עבור x,y,z והיא: -

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 10 \\ x + 4y + 9z &= 20 \end{aligned}$$

את אלה אפשר לפתור מיד ומקבלים $(x,y,z) = (3,2,1)$.

אולי ירצה הקורא לנסות את המערכת: -

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ ax + by + cz &= 8 \\ a^2x + b^2y + c^2z &= 42 \\ a^3x + b^3y + c^3z &= 224 \\ a^4x + b^4y + c^4z &= 1170 \\ a^5x + b^5y + c^5z &= 6008 \end{aligned}\right\}$$

שטח של מרובע

כשצלעי משולש הן c,b,a ו- $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ יש לנו נוסחה הידועה ללא ספק לכל קוראינו עבור שטח המשולש. השטח שווה ל-

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \ .$$

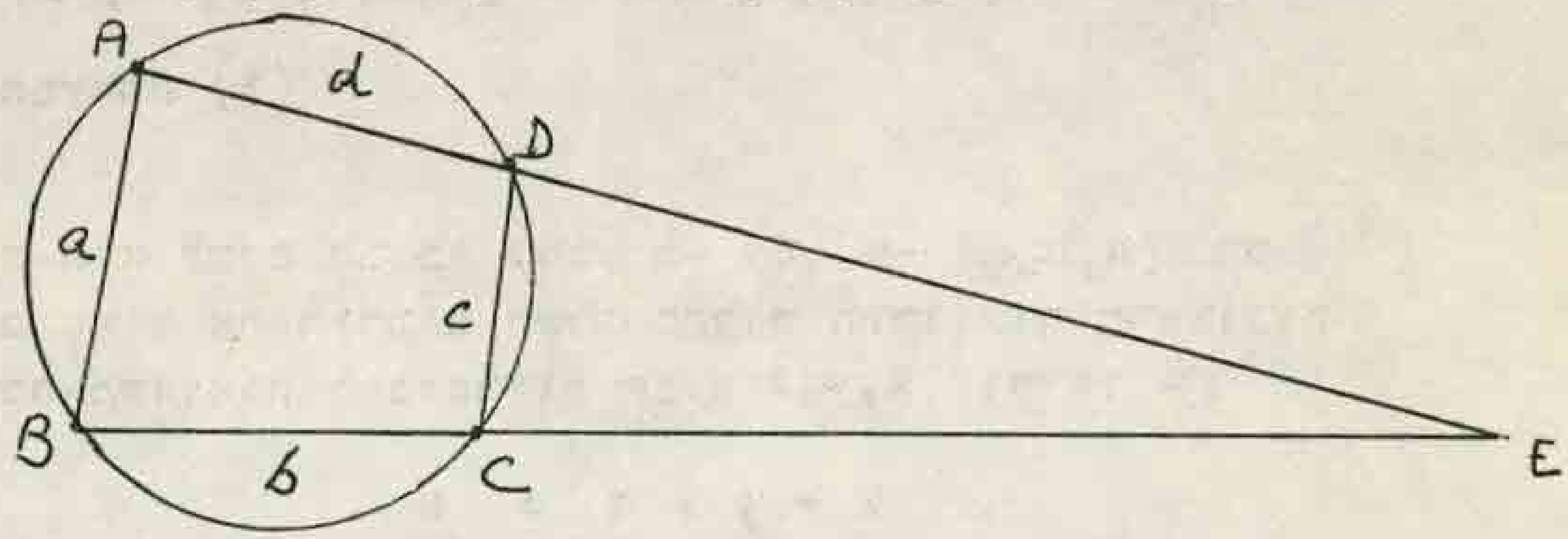
עבור מצולעים בעלי מספר צלעות העולה על 3 אין לצפות בדרך כלל לנוסחה דומה שתהיה תלויה רק בארכי הצלעות, מאחר וארכי הצלעות אינם קובעים את צורת המצולע.

נציג פה מקרה מיוחד של מרובע אשר שטחו נקבע ע"י ארכי צלעותיו, הוא מרובע החסום במעגל. יהיו c,b,a ו- d צלעותיו של מרובע כזה ו- $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. שטח המרובע שווה ל-

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

במקרה הפרטי $d = 0$ עובר המרובע למשולש ואנחנו מקבלים את הנוסחה הקלאסית. ועכשיו נוכיח את הנוסחה.

נוכל להניח כי המרובע אינו מקבילית. כי אז יהיה גם מלבן (מאחר שהוא חסום במעגל) והנוסחה ברורה. ובכן יהיה ABCD המרובע החסום, ו- DA,CD,BC,AB שווים ל- d,c,b,a, בהתאמה.



לאור מה שנאמר נוכל להניח ש- BC,AD נפגשים ב- E מחוץ למעגל. נגדיר $x = AE$, $y = BE$, $p = \frac{1}{2}(a+x+y)$. שטחו של המשולש ABE שווה ל- $\sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}$. אבל המשולשים ABE, CDE דומים ולכן

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABE}} = \frac{CD^2}{AB^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

ומזה נובע כי

$$S_{ABCD} = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}$$

שוב בגלל דמיון המשולשים יש לנו

$$\frac{BE}{BA} = \frac{DE}{CD}$$

ו־

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CE}{CD}$$

ז.א.

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{a} &= \frac{x-d}{c} \\ \frac{x}{a} &= \frac{y-b}{c} \end{aligned}\right\}$$

הזוג האחרון של משוואות מאפשר קביעת x,y כפונקציות של a,b,c,d כי משתי המשוואות

$$ax - cy = ad$$

$$cx - ay = -ab$$

מתקבל

$$x = \frac{a(ad+bc)}{a^2-c^2} \quad , \quad y = \frac{a(ab+cd)}{a^2-c^2}$$

ומכאן נובע כי

$$x + y = \frac{a}{a^2-c^2}(a+c)(b+d) = \frac{a(b+d)}{a-c}$$

ו־

$$x - y = \frac{a}{a^2-c^2}(a-c)(d-b) = \frac{a(d-b)}{a+c}$$

יוצא איפוא כי

$$2p = x+y+a = \frac{a}{a-c}[(b+d)+(a-c)] = \frac{2a(s-c)}{a-c}$$

$$2(p-a) = x+y-a = \frac{a}{a-c}[(b+d)-(a-c)] = \frac{2a(s-a)}{a-c}$$

$$2(p-x) = -x+y+a = a-(x-y) = \frac{a}{a+c}[(a+c)-(d-b)] = \frac{2a(s-d)}{a+c}$$

$$2(p-y) = x-y+a = \frac{a}{a+c}[(d-b)+(a+c)] = \frac{2a(s-b)}{a+c}$$

מהמשוואות האלה אנו מסיקים כי

$$S_{ABCD} = \frac{a^2-c^2}{a^2}\sqrt{p\ (p-a)(p-x)(p-y)}$$

$$= \frac{a^2-c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^4}{(a^2-c^2)^2}(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

הוכחנו איפוא את הנוסחה. למעשה אפשר להוכיח משהו יותר כללי. יהיה ABCD מרובע כלשהו (לאו דוקא חסום במעגל), אז שטחו ניתן ע"י

$$S_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$$

רואים מיד כי במרובע חסום $A+C = 180°$ ולכן האיבר האחרון מתאפס ואנחנו חוזרים למקרה דלעיל. דבר שני הנובע מהנוסחה האחרונה הוא כי עבור d,c,b,a נתונים יהיה שטח המרובע הכי גדול כשהוא חסום במעגל.

בעיות חדשות

הבעיות המסומנות בכוכב דורשות ידיעות של כתות ט' ו-י' בלבד (אין פרוש הדבר שהן קלות). את הפתרונות יש להגיש למערכת בצרוף הטופס עד 15.8.66. מספר הנקודות לכל בעיה מסומן בסוגרים ע"י מספר הבעיה.

ת.271* (2) הוכח כי עבור כל b,a חיוביים

$$\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} \geq 2$$

מתי יתקיים שוויון?

ת.272 (4) להוכיח כי, עבור כל x, $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

ת.273* (3) נתונים ארבעה מספרים חיוביים $a < b < c < d$. המספרים p_1, p_2, p_3, p_4 הם אותם ארבעת המספרים (a,b,c,d) לפי איזה סדר אחר. מה צריך להיות הסדר כדי ש-

$$(p_1-p_2)^2 + (p_2-p_3)^2 + (p_3-p_4)^2 + (p_4-p_1)^2$$

יהיה קטן ככל היותר?

ת.274 (4) הוכח כי עבור כל מספר טבעי N,

$$\binom{2N}{N}\frac{1}{2^{2N}} + \binom{2N-1}{N}\frac{1}{2^{2N-1}} + \binom{2N-2}{N}\frac{1}{2^{2N-2}} + \dots + \binom{N}{N}\frac{1}{2^{2N}} = 1$$

ת.275* (2) יהיה AC הגדול בין שני אלכסוני המקבילית $ABCD$ ויהיו CE, CF הניצבים מ- C להמשכם של AB, AD בהתאמה. הוכח כי

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$

ת.276* (2) יהיו $a_1,a_2,\dots,a_7$ כל שביעיה של מספרים שלמים ו- $b_1,b_2,\dots,b_7$ אותה שביעיה באיזה סדר אחר. הוכח כי

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\dots(a_7-b_7)$$

הוא מספר זוגי.

ת.277* (3) שש עשרה נקודות נמצאות על היקפו של מעגל ורוצים לחבר אותן בזוגות על ידי מיתרים כך שאף מיתר לא יחתך מיתר שני בפנים המעגל. בכמה אופנים ניתן זה להיעשות?

ת.278 (2) α, β הם שרשי המשוואה $x^2+px+1 = 0$ ו- γ, δ הם שרשי $x^2+qx+1 = 0$. להוכיח כי

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta) = q^2 - p^2$$

ת.279* (3) להוכיח כי

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\cdot\frac{(2n-1)}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

עם שוויון אך ורק כש- $n=1$.

ת.280* (2) להוכיח כי אם $a+b+c = 0$ אזי

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9$$

ת.281 (2) הוכח כי אם n,m הם מספרים טבעיים אזי החלק השלם של $\{m+\sqrt{m^2-1}\}^n$ הוא בלתי זוגי.

ת.282* (3) מה היא הספרה האחרונה של המספר

$$7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}$$

כשהספרה 7 מופיעה כאן 1001 פעם?

ת.283* (2) חוצה הזוית A של משולש ABC פוגש את הצלע BC בנקודה D. הוכח כי AD קטן מהממוצע ההנדסי של AB ו- AC.

ת.284* (3) שלשה מעגלים, כולם בעלי אותו רדיוס r, עוברים כולם דרך נקודה משותפת X. המעגלים נפגשים בזוגות גם בנקודות הנוספות A,B ו- C. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא r.

ת.285* (4) x,y,z הם שונים אחד מהשני ולאו דוקא ממשיים ו-

$$\frac{yz-x^2}{y+z} = \frac{zx-y^2}{z+x}$$

הוכח כי למעשה לא יוכלו המשתנים x,y,z להיות כולם ממשיים וכי

$$\frac{yz-x^2}{y+z} = \frac{zx-y^2}{z+x} = \frac{xy-z^2}{x+y} = x+y+z$$

פתרון הבעיות ת. 241 - 255

ת.241 מספר האפשרויות ליצור מספר בעל 10 ספרות כשקיימות 9 אפשרויות עבור כל ספרה (במקרה דנן $0,2,3,4,\ldots,9$) הוא 9^{10}. אבל זה כולל את המקרה שכל הספרות הן 0, ז.א. המספר 0 שאיננו בתחום המוגדר. התשובה היא איפוא $9^{10}-1 = 3,486,784,400$.

ת.242 אם נחלק את 2^x $(x = 1,2,\ldots)$ ב-7 יהיו השאריות $2,4,1,2,4,1,\ldots$, בזמן שהשאריות מחלוקות x^2 ע"י 7 הן $1,4,2,2,4,1,0,1,4,2,2,4,1,0,\ldots$. לסדרת השאריות הראשונה

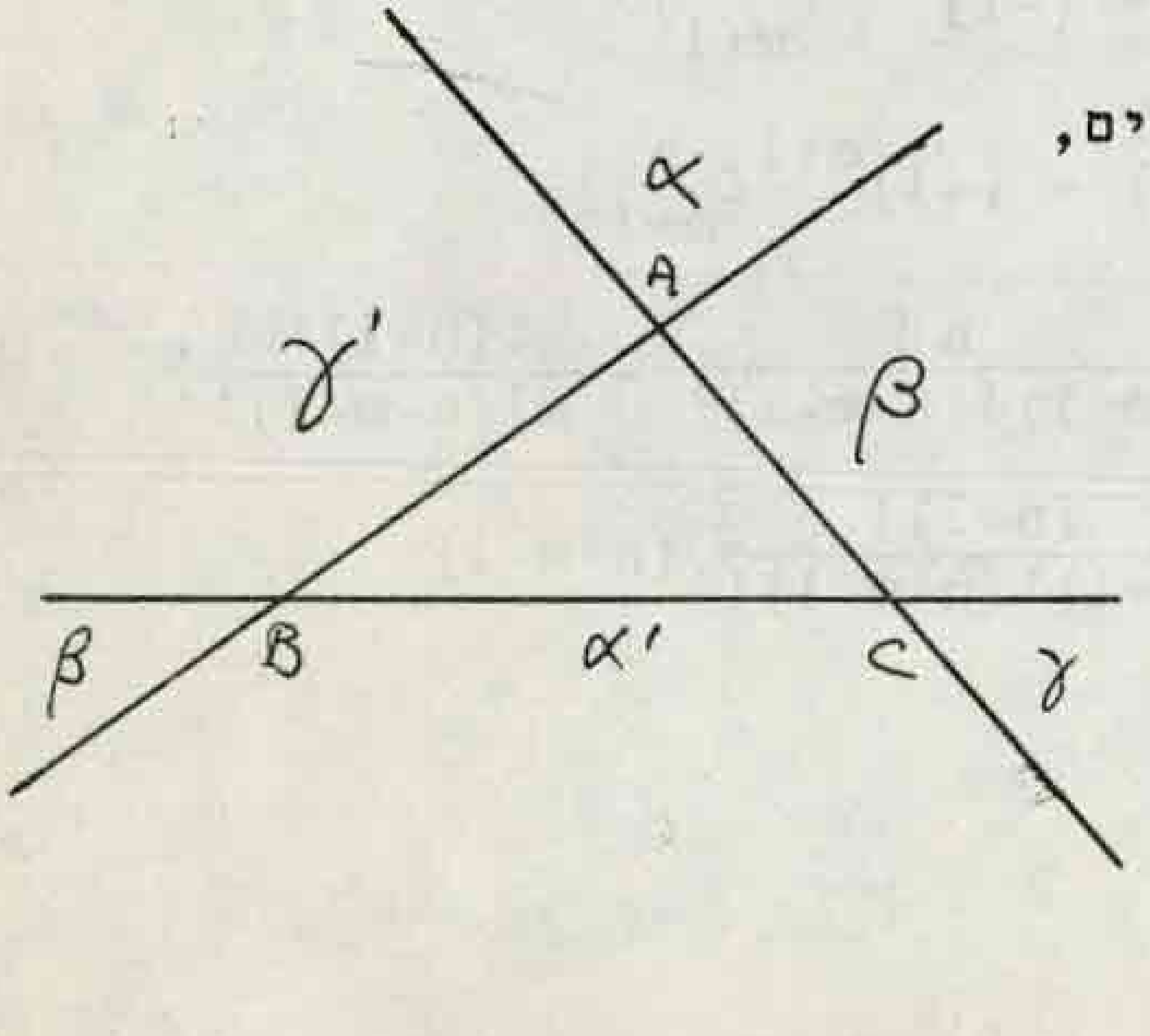
יש מחזור באורך 3 ולשניה מחזור בעל אורך 7. מזה נובע כי סדרת השאריות מחלוקת $2^x - x^2$ תהיה מחזורית עם מחזור 21 ולכן מספיק לבדוק את 21 הערכים הראשונים של x. בין אלה מקיימים 15,10,6,5,4,2 את תנאי הבעיה.

אבל $10,000 = 21\times476+4$. בין ה-21×476 יהיו 6×476 ערכים של x כך ש- 2^x-x^2 מתחלק ב-7. בין ה-4 בסוף יקיימו השני והרביעי את התנאי הזה. התשובה היא $6\times476+2$ שהוא 2858.

<u>ת.243</u> נסתכל במשולש ABC המחולק לתחומים ע"י קווים ישרים ונצייר קו ישר מ-A לפגוש את BC בלי לעבור דרך זויותיהם של התחומים. ברור כי אם נעקוב אחרי הקו מ-A נראה כי כל פעם שהוא פוגש שפה של אחד האזורים (כולל הפגישה עם BC) הוא יגדיל ב-1 את מספר התחומים אשר ABC מחולק להם.

עכשיו ברור כי הקווים מ-B ו-C בבעיה שלפנינו מחלקים את ABC ל- $(n+1)^2$ תחומים. כל קו מ-A פוגש את $2n$ הקווים מ-B ו-C וגם את BC, ז.א. $n(2n+1)$ פגישות סה"כ. כל פגישה מגדילה כאמור את מספר התחומים ב-1 ולכן מספר התחומים בחלוקה הסופית הוא $(n+1)^2 + n(2n+1)$, ז.א. $3n^2 + 3n + 1$.

<u>ת.244</u> נכתוב $x = 100A+10B+C$; $\alpha = 9,000,017 + 100x$; $\beta = 4,910,004+10x$; $\gamma = 79,000 + x$. נתון כי ל- α,β,γ יש גורם משותף והוא יחלק איפוא גם את $10\beta-\alpha$ ואת $\beta-10\gamma$, ז.א. 40,100,023 ו- 4,120,004. הגורם המשותף לשני האחרונים הוא 547 וזה יהיה הגורם המשותף ל- α,β,γ. כדי לקבוע את x נשים לב לעובדה ש-γ, הנמצא בין 79,000 ל-80,000, הוא מכפלה של 547. ישנן שתי אפשרויות, 79315 ו-79862. קל לראות כי 315 ו-862 הם שניהם ערכים אפשריים עבור ABC.



<u>ת.245</u> <u>משפט עזר</u>. אם אין המשפט מתקיים, אזי נוכל למצוא שלוש מבין הנקודות, כך שהמשולש המוגדר על ידן יכיל את שתי הנקודות הנותרות בתוכו.

<u>הרכחה</u>. תהיינה E,D,C,B,A הנקודות ונסתכל במשולש ABC (ראה ציור). אם נמצא D ב- α', β' או γ' אזי יהיו

A,B,C,D רביעיה המקיימת את המשפט. מאחר שהנחנו שאין המשפט מתקיים מוכרח D להיות בתוך המשולש או באחד התחומים: α,β,γ. במקרה שהוא ב-α יהיה A בתוך המשולש DBC. מצאנו איפוא משולש משלוש נקודות הקבוצה המכיל נקודה רביעית של הקבוצה בתוכה, ונוכל להמשיך בטענה דומה בקשר לנקודה החמישית, מה שמוכיח את משפט העזר.

עכשיו נחזור לבעיה המקורית. אם אין רביעיה המקיימת את התנאים נוכל להסתמך על משפט העזר ולהניח ש- D ו-E נמצאים בתוך המשולש ABC. הקו DE יחתוך שתי צלעות המשולש מבפנים; נניח שהן AB,AC. במקרה זה ברור כי B,C,D,E יקיימו את דרישות הבעיה.

<u>ת.246</u> נוכל למצוא מספר שלם r ‏$(0\leqslant r\leqslant n-1)$ כך ש- $\frac{r}{n}\leqslant x-[x]<\frac{r+1}{n}$. מזה יוצא כי $[x+\frac{k}{n}]$ הוא $[x]$ עבור $k+r+1\ngtr n$, ו- $[x]+1$ עבור $k+r+1 < n$ ז.א. עבור הערכים $n-r, n-r+1, \dots, n-1$ של k לכן

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]\ \dots\ +[x+\frac{n-1}{n}]=n[x]+r$$

$$=[nx]$$

<u>ת.247</u> נוכיח ע"י אינדוקציה לגבי m ש-

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\dots+(-1)^m\binom{n}{m}=(-1)^m\binom{n-1}{m}$$

הנוסחה מידית כש- m=0. אם היא נכונה עבור איזה m אזי יהיה

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\dots+(-1)^m\binom{n}{m}+(-1)^{m+1}\binom{n}{m+1}$$

$$=(-1)^m\binom{n-1}{m}+(-1)^{m+1}\binom{n}{m+1}$$

$$=(-1)^{m+1}\left\{\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}-\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}\right\}$$

$$=(-1)^{m+1}\frac{(n-1)!}{(m+1)!(n-m-1)!}(n-m-1)$$

$$= (-1)^{m+1} \binom{n-1}{m+1}$$

מ.ש.ל.

ת.248

$$(x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)$$
$$= [x^2-(a+b)^2][x^2-(a-b)^2]$$
$$= (x^2-a^2-b^2-2ab)(x^2-a^2-b^2+2ab)$$
$$= (x^2-a^2-b^2)^2 - 4a^2b^2 \geqslant -4a^2b^2$$

שוויון יתקיים אך ורק אם $x^2-a^2-b^2 = 0$

ז.א. $x = \pm\sqrt{a^2+b^2}$

ת.249 נניח ש- x היה גילו של שמעון (בשנים) כשהיה ראובן פי 3 גדול ממנו. כשהיה שמעון פי 3 גדול מגילו של ראובן דאז היה בן $9x$. כשהיה ראובן חצי הגיל הזה, היה איפוא בן $\frac{9x}{2}$ ואז היה גילו של שמעון $x + (\frac{9x}{2}-3x) = \frac{5x}{2}$. עכשיו ראובן הוא פי שנים מהגיל הזה, ז.א. $5x$, ולכן גילו של שמעון הוא $x + (5x-3x)$ ז.א. $3x$. יוצא כי $5x + 3x = 48$ ז.א. $x=6$ גילו של ראובן הוא עכשיו 30 ושל שמעון 18.

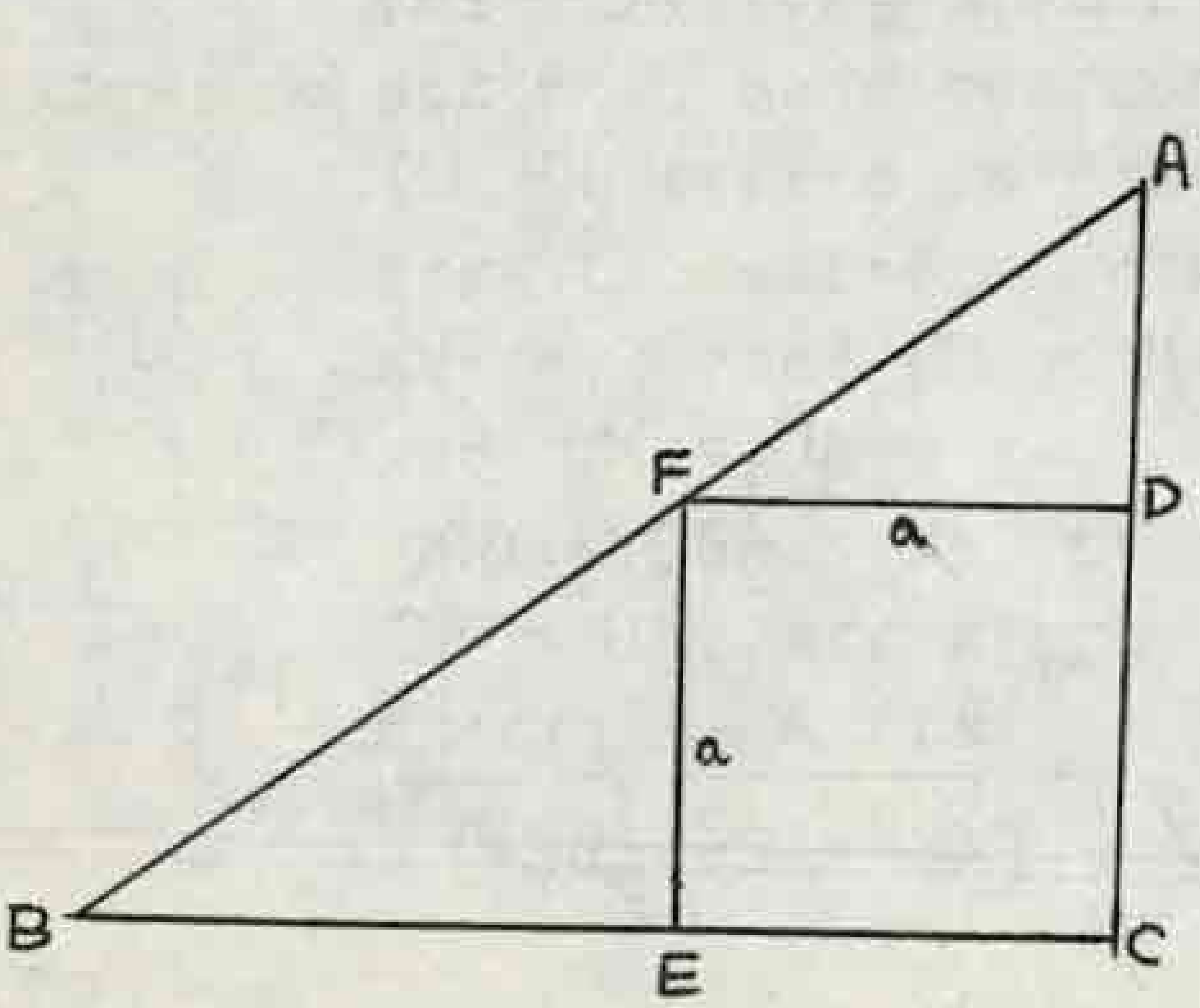
ת.250 יהיה $AD=x$. מהמשולשים הדומים AFD, FBE יש לנו $\frac{BE}{a} = \frac{a}{x}$ ולכן $BE = \frac{a^2}{x}$.

לכן קיים

$$(x+a)^2 + (\frac{a^2}{x}+a) = b^2$$

ז.א.

$$(x+a)^2(x^2+a^2) = b^2x^2 \quad (1)$$



באשר לשטח יש לנו

$$a^2+S_{FEB}+S_{ADF} = S_{ABC}$$
$$=a^2 + \frac{1}{2}a\cdot\frac{a^2}{x} + \frac{1}{2}ax$$
$$= \frac{a}{2x}(x+a)^2 \quad (2)$$

אבל מ- (1) נובע כי

$$(x+a)^2\,[(x+a)^2 - 2ax] = b^2x^2$$

ז.א.

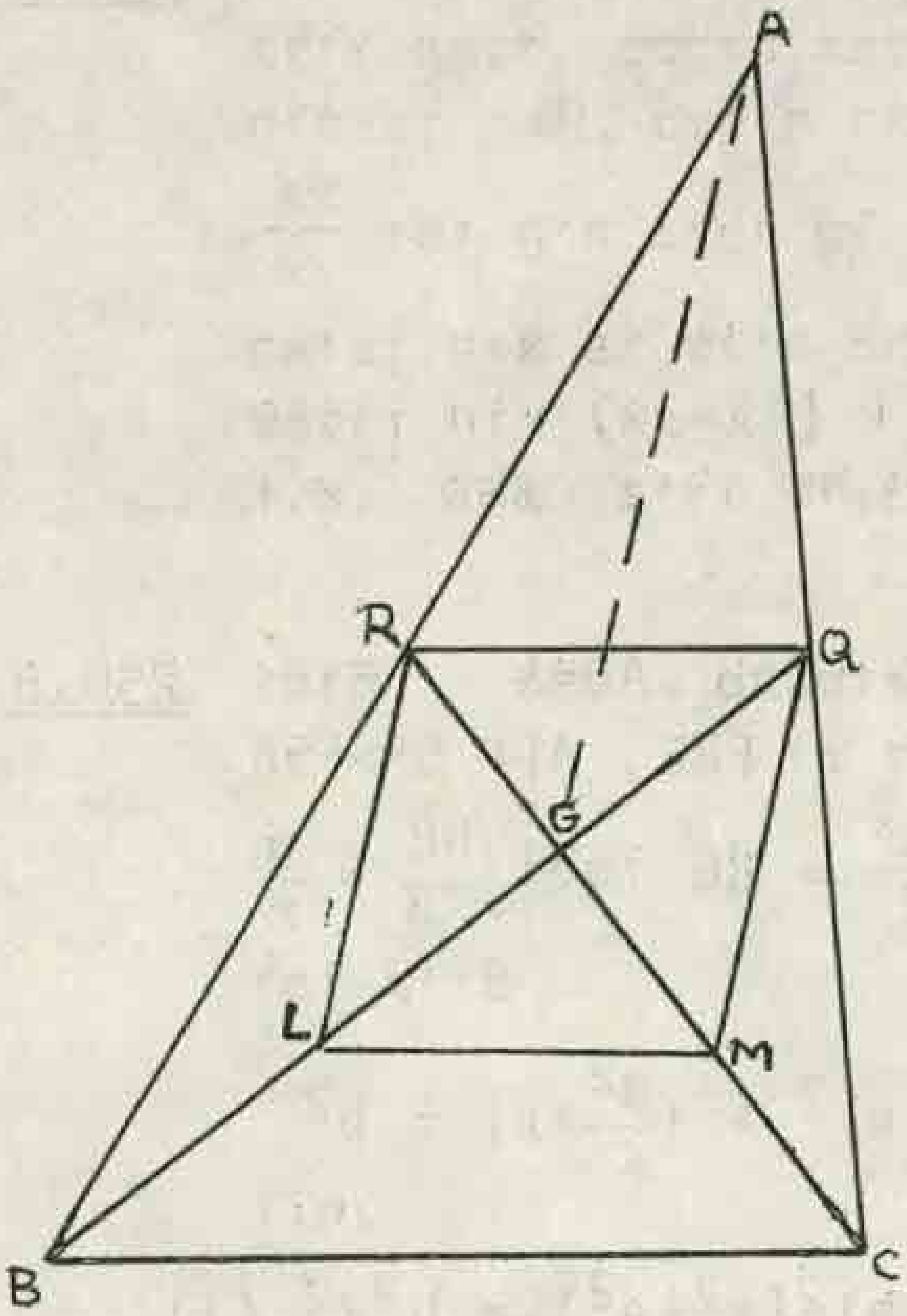
$$\frac{(x+a)^4}{x^2} - \frac{2a(x+a)^2}{x} - b^2 = 0$$

ולכן (3)

$$\frac{(x+a)^2}{x} = a + \sqrt{a^2+b^2}$$

מ- (2) ו-(3) נובע שהשטח = $\frac{1}{2}a\,[a + \sqrt{a^2+b^2}]$

ת.251 תהיה X נקודת המפגש של המעגלים CPQ,BPR (מובן כי המעגלים האלה נפגשים ב- P ולכן יש בדיוק נקודת מפגש שניה אחת והיא X). אז $\sphericalangle AQX = \sphericalangle XPC = \sphericalangle BRX$ ולכן X,R,Q,A נמצאים על מעגל.



ת.252 יהיו CR,BQ תיכונים ו-G הנקודה בה הם נפגשים. נתון שהזוית $\sphericalangle CGQ$ היא זוית ישרה. נסמן ב- L ו- M את האמצעים של CG,BG בהתאמה. LM,QR שניהם מקבילים ל- BC ושווים לחצי BC ולכן LMQR הוא מקבילית. מאחר שהאלכסונים RM,LQ ניצבים זה לזה נובע כי המקבילית היא מעויין, ולכן QR = MQ אבל $\frac{1}{2}AG = MQ$ ו- $\frac{1}{2}BC = QR$ יוצא כי AG = BC. אבל אורך התיכון מ- A הוא

$$\sqrt{\frac{1}{2}\,(AB^2+AC^2-\frac{1}{2}BC^2)}$$

ו- AG הוא $\frac{2}{3}$ מאורך זה. יוצא כי

$$\frac{1}{2}\,[AC^2 + AB^2 - \frac{1}{2}\,BC^2] = \frac{9}{4}\,BC^2$$

$$5\ BC^2 = AB^2 + AC^2$$ ז.א.

$$= BC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \cos A = BC^2$$ ז.א.

$$\frac{1}{2}\sin C \cdot \sin B \cdot \cos A = \sin^2 A$$ ומזה

$$= \sin A \sin (B+C)$$

$$= \sin A (\sin B \cos C + \cos B \sin C).$$

אם נחלק עכשיו ב-$\sin A \sin B \sin C$ נקבל את הנוסחה המבוקשת.

<u>ת.253</u>
$$\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\phi)} - \frac{\cos(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\phi)} = \frac{\cos(\beta+\theta)}{\cos(\beta+\phi)} - \frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin(\beta+\phi)}$$

ולכן
$$\frac{\sin[(\alpha+\theta)-(\alpha+\phi)]}{\sin(\alpha+\phi)\cos(\alpha+\phi)} = \frac{\sin[(\beta+\phi)-(\beta+\theta)]}{\sin(\beta+\phi)\cos(\beta+\phi)}$$

ז.א.
$$\sin(\theta-\phi)\sin 2(\beta+\phi) = -\sin(\theta-\phi)\sin 2(\alpha+\phi)$$

פתרון אחד ניתן ע"י $\sin(\theta-\phi)=0$, ז.א. $\theta-\phi = k\pi$. אחרת

$$\sin 2(\beta+\phi) = -\sin 2(\alpha+\phi)$$

ומכאן <u>או</u>
$$2(\beta+\phi) = 2k\pi - 2(\alpha+\phi)$$

ז.א.
$$\alpha + \beta + 2\phi = k\pi$$

<u>או</u>
$$2(\alpha+\phi) = (2k-1)\pi + 2(\beta+\phi)$$

ז.א.
$$\alpha - \beta + \frac{1}{2}\pi = k\pi$$

<u>ת.254</u> נכתוב $\sin\theta = s,\ \cos\theta = c$. יש לנו

$$\cos 7\theta + i \sin 7\theta = (c+is)^7$$

$$= c^7+7ic^6s-21c^5s^2-35ic^4s^3+35c^3s^4+21ic^2s^5-7cs^6-is^7$$

ולכן

$$\sin 7\theta + 8\sin^7\theta = (7c^6s-35c^4s^3+21c^2s^5-s^7) + 8s^7$$

$$= 7s\ (c^6-5c^4s^2+3c^2s^4+s^6)$$

$$= 7s\ \{(1-s^2)^3-5s^2(1-s^2)^2+3s^4(1-s^2)+s^6\}$$

$$= 7s\ (1-8s^2+16s^4-8s^6)$$

$$= 7s\ (1-2s^2)(1-6s^2+4s^4)$$

מכאן נובע כי האפשרויות עבור s הן: –

(1) $s = 0$

(2) $s = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $s^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$, אבל מאחר ו- $0 \leq s^2 \leq 1$ נהיה מוגבלים

למקרה $s^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ ולכן $3 = \pm\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}$

<u>ת.255</u> אם נשים לב לעובדה ש- $2^5\cdot3^2\cdot5^3\cdot7 = 252{,}000$ נראה כי המחלקים שלו הם כל המספרים מהצורה $2^{\alpha}\cdot3^{\beta}\cdot5^{\gamma}\cdot7^{\delta}$ כש- $0 \leq \alpha \leq 5$, $0 \leq \beta \leq 2$, $0 \leq \gamma \leq 3$ ו- $0 \leq \delta \leq 1$. סכום כל המספרים האלה שווה בדיוק למכפלה

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+5+5^2+5^3)(1+7)$$

וקל לראות שזה שווה ל- 1,022,112.

רשימת פותרי השאלות מס. 241 - 255

(בסוגרים ס"ה הנקודות של הפותר)

1.	איש-שלום אריאל	יא',	תיכון ה', תל-אביב	(47)
2.	אליאס אורי	י',	בי"ס ריאלי, חיפה	(46)
3.	אשכנזי מכס	יב',	בי"ס אחד-העם, פתח-תקוה	(33)
4.	בורשטיין מיכאל	יא',	בי"ס תיכון , חולון	(30)
5.	בן-שחר ברק	יב',	גימנסיה עברית, ירושלים	(4)
6.	בראון עמירם	יא',	גימנסיה אוהל-שם, רמת-גן	(32)
7.	בר-יהושע דוד	יא',	מקצועי-תיכון, חיפה	(32)
8.	גולדברג צבי	יא',	תיכון ט', תל-אביב	(13)
9.	גולדפרב אלי	יא',	תיכון ה', תל-אביב	(22)
10.	גרש אגון		תיכון ליד האקדמיה למוסיקה, י-ם	(43)
11.	דימנט דוד	יב',	בי"ס ריאלי, חיפה	(42)
12.	דרוקר אביגדור	יב',	בי"ס טשרניחובסקי, נתניה	(42)
13.	הכט סרג'יו	יא',	תיכון י', תל-אביב	(50)
14.	הראל צבי	י',	בי"ס ריאלי, חיפה	(52)
15.	ויטק יהושע	יב',	בי"ס ריאלי, חיפה	(42)
16.	וייט יצחק	יא',	בי"ס תיכון, קרית עמל	(31)
17.	וייסבוק ישראל	יב',	תיכון אחד-העם, פתח-תקוה	(34)
18.	ויך דבורה	י',	בי"ס תיכון, קרית-מוצקין	(6)
19.	וקס מתי	יב',	בי"ס טשרניחובסקי, נתניה	(41)
20.	זיסאפל זוהר		תיכון א', תל-אביב	(41)
21.	חביב חיים	יא',	גימנסיה אוהל-שם, רמת-גן	(37)
22.	יהודאי עמירם	יב',	תיכון א', תל-אביב	(49)
23.	יעקובי יגאל	יא',	תיכון ט', תל-אביב	(31)
24.	ליבמן יעקב		חיפה	(41)
25.	לסמן אסתר	י',	תיכון ג', תל-אביב	(8)
26.	מגידו נמרוד	יב',	גימנסיה הרצליה, תל-אביב	(31)
27.	נפרסטק יעקב	יא',	גימנסיה הרצליה, תל-אביב	(22)
28.	סאיאס אליהו	יב',	בי"ס תיכון, חולון	(20)
29.	סורין אנדרי	יא',	תיכון מקצועי, חיפה	(38)
30.	עובד שמואל	יב',	תיכון, כפר-אתא	(7)
31.	עמית מיכה	יא',	בי"ס תיכון, קרית-מוצקין	(49)
32.	פסקרו אהרון	יב',	בי"ס ריאלי, חיפה	(31)
33.	רחמים שאול	יב',	גימנסיה אוהל-שם, רמת-גן	(29)
34.	רייך שמעון	יא',	בי"ס ריאלי, חיפה	(51)
35.	שגב אלי	יב',	בית חנוך משותף, כפר בלום	(27)
36.	שוחט חיים	י',	גימנסיה אוהל-שם, רמת-גן	(23)
37.	שטרן רפאל	יב',	תיכון דתי, חיפה	(26)
38.	שמר עדו	יב',	תיכון א', תל-אביב	(50)
39.	שמש מאיר	יב',	גימנסיה הרצליה, תל-אביב	(45)

ה ת כ ן

		עמוד
דבר המערכת		1
בעיה		1
גרפים (המשך)	ח. חנני ש. אביטל	2
פתרון הבעיה מעמ' 1		8
ציאנשידזי, משחק סיני		9
אכסיומות וגיאומטריה		13
מערכת משוואות		18
שטח של מרובע		22
בעיות חדשות		24
פתרון הבעיות ת.226 - 240		26
רשימת הפותרים		33

כתובת המערכת:

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון וייצמן למדע, רחובות

חשבון בנק הדאר מס' 23357

מחיר חוברת בודדת 50 אגורות.

מחיר חתימה ל־4 חוברות 1.80 ל"י.